

Una Aproximación al Consenso en el Volumen de una Red de Tráfico Vehicular

H. M. Bacilio Navarro, G. Solís-Perales *

* *Departamento de Electrónica, CUCEI, Universidad de Guadalajara*
Av. Revolución 1500, Guadalajara, Jal., 44430, México
hector.bacilio@alumnos.udg.mx gualberto.solis@cucei.udg.mx

Resumen: En esta contribución presentamos el desarrollo de un modelo adaptable, para lograr el consenso en el volumen de tráfico en una red de tráfico vehicular. Se considera que la dinámica del nodo está dada por la variación en el tiempo del volumen existente en una avenida. El flujo en cada nodo se adapta para lograr el consenso o alcanzar un flujo de equilibrio en cada nodo. Esto se logra en todos los nodos de la red y es debido a la interconexión. De esta manera tenemos un modelo macroscópico de la dinámica de cada nodo interconectado, luego se construye una red de nodos, donde se busca el consenso en los flujos a pesar de algunas variaciones en los flujos de entrada, así la dinámica modelada nos representa el flujo de cada nodo interconectado.

Palabras clave: Redes complejas, modelado, consenso.

1. Introducción

La teoría del flujo de tráfico, la cual nos describe la relación entre los parámetros básicos del flujo de tráfico, como el volumen, la velocidad y la densidad, utilizando principios matemáticos o físicos nos proporciona una base teórica para la planificación y gestión del tráfico (Treiber and Kesting, 2013). Los departamentos de transporte utilizan información sobre los tiempos de viaje actuales, así como los proyectados para ajustar las mediciones y los semáforos. Los viajeros utilizan los tiempos de viaje proyectados para hacer planes de viaje y ajustar los horarios de salida, el tipo de transporte y la ruta. Los tiempos de viaje estimados se desarrollan utilizando modelos de flujo de tráfico que comienzan con observaciones sobre velocidad y densidad para desarrollar la estimación de la capacidad de la carretera, basándose en estimaciones de densidad y flujo de corriente (Polson and Sokolov, 2014). La teoría de modelado y flujo de tráfico se inició en la década de 1930, por primera vez por la US-American Bruce D. Greenshields (Bretti et al., 2007). Sin embargo desde la década de 1990, el campo ha ganado una considerable atracción ya que la demanda global del tráfico ha aumentado y más datos, así como un fácil acceso a la potencia de cálculo se ha hecho disponible (Treiber and Kesting, 2013)(Bretti et al., 2007). Los modelos de flujo de tráfico se categorizan con respecto a varios aspectos:

Nivel de agregación (la forma en que se representa en la realidad), estructura matemática y aspectos conceptuales. Nos centraremos en los dos modelos principales siguientes:

- Modelos macroscópicos
- Modelos microscópicos

Los modelos microscópicos incluyendo los modelos de seguimiento de coches y la mayoría de los autómatas celulares (CA), describen individualmente las partículas vehículo-conductor, que colectivamente forman el flujo de tráfico (Elefteriadou, 2014).

Estos modelos describen la reacción de cada conductor (aceleración, frenado, cambio de carril) en función del tráfico circundante. Los modelos macroscópicos describen el flujo de tráfico de forma análoga a líquidos o gases en movimiento, de ahí que se llaman modelos hidrodinámicos. Las variables dinámicas se agregan localmente, cantidades tales como la densidad de tráfico $\rho(x,t)$, de flujo $Q(x,t)$, la velocidad media $V(x,t)$, o la variación de velocidad (Kerner, 2009). Debido a que la agregación es local estas cantidades varían generalmente a través del espacio y tiempo, es decir que corresponden a los campos dinámicos. Así, los modelos macroscópicos son capaces de describir fenómenos colectivos tales como la evolución de las regiones congestionadas o la velocidad de propagación de las ondas de tráfico (Barceló, 2010). La teoría de flujo de tráfico se ha venido estudiando desde 1930, con avances considerables en este tema, por ejemplo la utilización del modelo de flujo de tráfico LWR es una ecuación diferencial parcial que nos indica que el flujo es función de la posición y el tiempo (x,t) , de donde la densidad es modelada en los cruces, cada cruce se considera como un nodo, y se modela la dinámica de los nodos (Treiber and Kesting, 2013), es decir la densidad en el cruce. Se han realizado análisis bayesiano del modelo de flujo de tráfico en base al modelo LWR con características similares (Polson and Sokolov, 2014). Modelos de nodos y enlaces para simulación de flujo de tráfico de red, de igual forma considerando los nodos como cruces, en donde se modela la dinámica del flujo (Astarita, 2002).

En este trabajo utilizamos un modelo macroscópico para representar la dinámica del flujo de tráfico considerando la interacción con los nodos que lo influyen, sin embargo, la dinámica no es modelada en los cruces si no que es modelada en la unión de los cruces, esto permite entonces tener la dinámica del volumen en las avenidas, de donde se busca lograr que todas las avenidas tengan el mismo

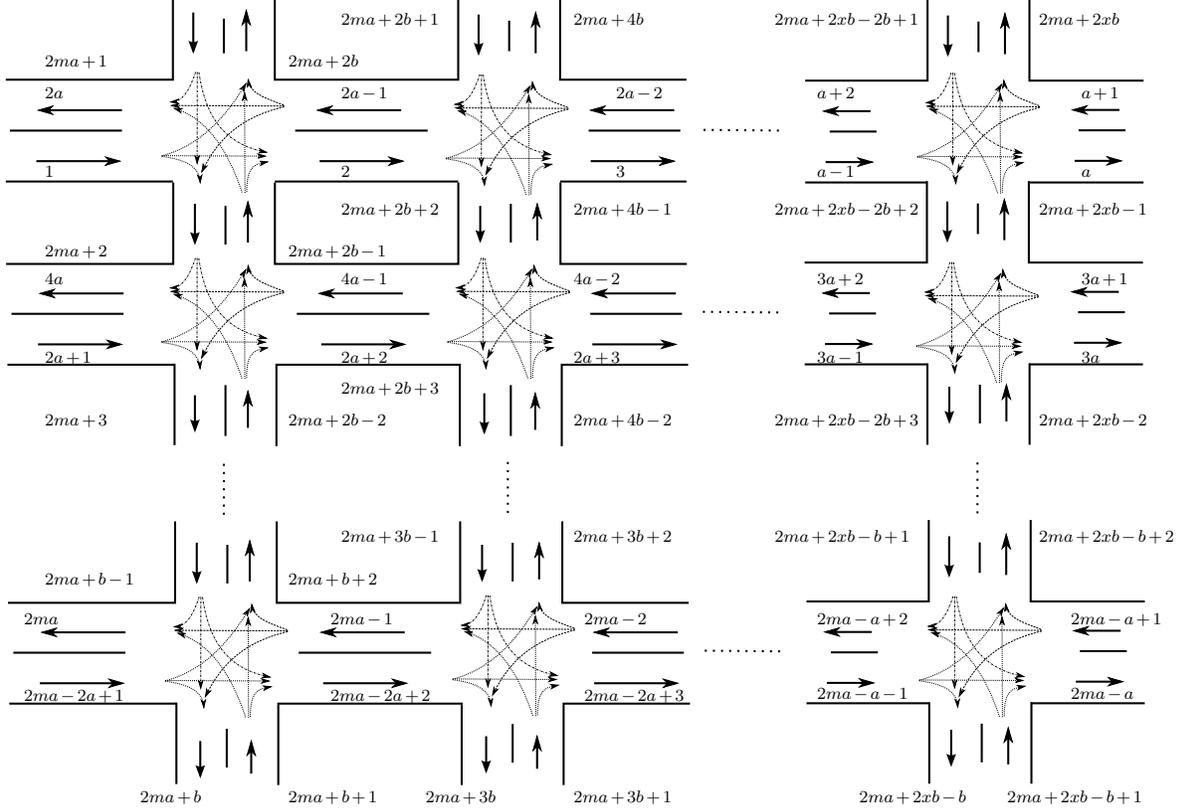


Figura 1. Diagrama general considerando flujo en dos direcciones.

volumen, de aquí el problema del consenso en el volumen de las calles conectadas.

Las redes complejas comprenden un área de investigación interdisciplinaria emergente que dispara mucha atención de físicos, matemáticos, biólogos, ingenieros, informáticos, entre muchos otros (Silva and Zhao, 2016). Las estructuras de red complejas describen una amplia variedad de sistemas de alta importancia tecnológica e intelectual, tales como internet, sistemas biológicos y químicos acoplados, redes financieras, sociales, neurales, redes de comunicación, redes de tráfico (Amaral and Ottino, 2004).

La representación de datos en redes complejas nos permite unificar la complejidad estructural y las diversidades de vértices y conexiones. Varias preguntas relevantes surgen cuando se investiga la dinámica en redes complejas, tales como aprender cuán grandes conjuntos de sistemas dinámicos que interactúan a través de una compleja topología de cableado pueden comportarse colectivamente. Sin embargo, algunos trabajos revelaron que muchas redes reales poseen diferentes tipos de topologías, como escala libre, el mundo pequeño entre otras (Wang Xiao Fan, 2003). De esta manera, la topología de red desempeña un papel importante en el sentido de que afecta las funciones del sistema representado. Por ejemplo, la estructura de las redes sociales afecta la información y las velocidades de propagación de la enfermedad, la topología de una red financiera puede amplificar los choques de diferentes maneras y la disposición de las redes eléctricas en redes puede afectar la robustez y estabilidad de la transmisión de energía (Loteró-Vélez, 2014). En este trabajo mostramos el consenso en el flujo de una red de tráfico, a través de la

interconexión con todos los nodos. Bajo las consideraciones en el flujo y parámetros del sistema.

En esta aportación nuestra propuesta es analizar la dinámica del volumen en cada calle (los nodos) para llegar a un equilibrio o consenso en toda la red, en base a un modelo simple, el cual nos permita entender el comportamiento del sistema de una manera clara, y a su vez nos permite añadir características o propiedades para formar un sistema mas complejo con mas características que nos permitan un mayor análisis del comportamiento de una red de flujo. Es importante notar que en este caso lo que nos interesa es mantener el volumen en consenso, a pesar de diferentes flujos volumétricos en las entradas.

2. Modelo de una red dinámica

Una red dinámica típica que consiste en N nodos idénticos conectados o acoplados, es representada por la siguiente ecuación de estados

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

donde $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondiente al nodo i , la constante $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento entre los nodos, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante $0-1$ que vincula variables acopladas. a_{ij} nos definen la conexión en la red. Si existe una conexión entre el nodo i y el nodo j entonces $a_{ij} = a_{ji} = 1$. En caso que no existe conexión entre el nodo i y el nodo j entonces $a_{ij} = a_{ji} = 0$. La matriz de acoplamiento $A = a_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la configuración de conexiones de la red (Wang Xiao Fan, 2003). En nuestro caso, el modelo de flujo de

tráfico, la red dinámica es representada por la variación del volumen en la calle sin considerar fuentes o sumideros, en tal caso la función $f(x)$ no existe y lo que queda entonces es la conexión entre las calles dada por los balances de los flujos de entrada y el flujo de salida. Si se consideraran fuentes o sumideros los modelos de dichos fenómenos se representan en la función $f(x)$.

3. Planteamiento de problema

Para iniciar el estudio establecemos las siguientes suposiciones:

- S.1 Los flujos en cada nodo son continuos en el tiempo.
- S.2 Los flujos en la salida, se dividen en cantidades iguales.
- S.3 No existe acumulación en el interior.
- S.4 La configuración del sistema se muestra de manera general en la Figura 1

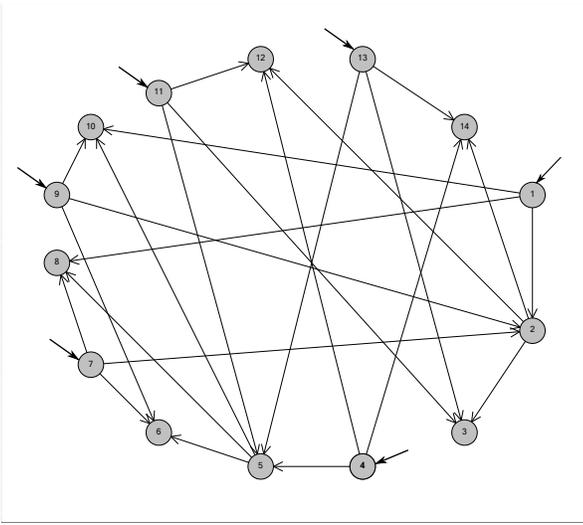


Figura 2. Representación en forma de grafo para un segmento de dos crucesos.

La suposición S.1 considera que los flujos no se interrumpen, lo que permite el análisis y la obtención del consenso. La suposición S.2 cada flujo de salida es dividido en partes iguales mediante un parámetro hacia el nodo o calle siguiente, sin embargo, este parámetro puede tener su propia dinámica. La suposición S.3 indica que los vehículos que ingresan salen, es decir no existen ni fuentes ni sumideros, sin embargo en modelos posteriores pueden ser agregados.

Consideramos una red compuesta por n nodos (calles), los cuales están interconectados con más nodos que son las calles que lo conectan, y analizamos el flujo en cada nodo el cual esta interconectado con todos los nodos.

La configuración establecida para representar la dinámica del modelo de flujo de tráfico se muestra en la Figura 1, de manera general considerando flujo en dos direcciones.

Donde m representa la cantidad de avenidas horizontales, x la cantidad de avenidas verticales, a la cantidad de nodos (calles) horizontales y b la cantidad de nodos (calles) verticales. $n = 2ma + 2xb$ representa la cantidad total de nodos.

Un caso particular de esta representación general, es el caso de 14 nodos, la dinámica de 14 flujos representado

como grafo dirigido se muestra en la Figura 2. Así como la interconexión de los nodos (calles) se muestra en la Figura 3

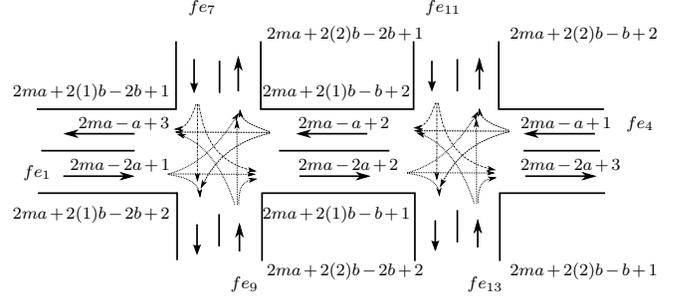


Figura 3. Extracto de Figura 1, para el caso de 2 avenidas que cruzan una avenida.

Las ecuaciones de la dinámica de flujos son las siguientes: donde af va incrementando, desde 1 hasta a y bf va incrementando, desde 1 hasta b

$$\begin{aligned} \dot{V}_j &= fe_j - w_j \sqrt{v_j} \\ \dot{V}_i &= p \cdot w(2ma - 2a + af) \sqrt{v(2ma - 2a + af)} \\ &\quad + q \cdot w(2ma + 2xb - 2b + bf) \sqrt{v(2ma + 2xb - 2b + bf)} \\ &\quad + r \cdot w(2ma + 2xb - b + bf) \sqrt{v(2ma + 2xb - b + bf)} - w_i \sqrt{v_i} \\ \dot{W}_l &= K_l(e(v)) w_l \end{aligned}$$

donde $i = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $j = \{1, 4, 7, 9, 11, 13\}$, $l = \{1, 2, \dots, 14\}$, $x = \{1, 2\}$, $m = \{1\}$, $a = 3$ y $b = 2$.

\dot{V}_j .- representa la dinámica donde se encuentra un flujo de entrada externo.

\dot{V}_i .- representa la dinámica interna, donde no existe flujo de entrada externo.

\dot{W}_l .- representa la dinámica de adaptación, la cual nos permite llegar al equilibrio o consenso.

fe_j .- representa el flujo de entrada externo.

$K_l \in \mathbb{R}$.- Es un parámetro de ajuste, nos permite reducir el tiempo transitorio.

$p, q, r \in [0, 1]$.- representa la proporción de vehículos que se distribuye de cada nodo estando en el intervalo de $[0, 1]$.

La representación para el i -ésimo nodo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -w_i \sqrt{V_i} + \sum_{j=1}^N a_{ij} w_j \sqrt{V_j} + u \\ \dot{w}_i &= kw_i \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, 14$, y se ha incluido la ecuación para ajustar el parámetro w_i que esta en funcion de las desviaciones de los volúmenes entre los nodos conectados y u es una entrada externa de flujo. De donde se identifica para la red en estudio la siguiente matriz

$$A_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones que modelan la dinámica en los nodos 7, 8 y 11, 12 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{V}_7 &= fe_7 - w_7 \sqrt{v_7} \\ \dot{V}_8 &= p \cdot w_7 \sqrt{v_7} + q \cdot w_1 \sqrt{v_1} + r \cdot w_5 \sqrt{v_5} - w_8 \sqrt{v_8} \\ \dot{W}_7 &= K_7(v_8 + v_2 + v_6 - 3v_7)w_7 \\ \dot{W}_8 &= K_8(v_7 + v_1 + v_5 - 3v_8)w_8 \\ \dot{V}_{11} &= fe_{11} - w_{11} \sqrt{v_{11}} \\ \dot{V}_{12} &= p \cdot w_{11} \sqrt{v_{11}} + q \cdot w_2 \sqrt{v_2} + r \cdot w_4 \sqrt{v_4} - w_{12} \sqrt{v_{12}} \\ \dot{W}_{11} &= K_{11}(v_{12} + v_3 + v_5 - 3v_{11})w_{11} \\ \dot{W}_{12} &= K_{12}(v_{11} + v_2 + v_4 - 3v_{12})w_{12} \end{aligned}$$

Los valores propios de la matriz A_v son todos menor a cero, en este caso son igual a -1 . Para este caso particular donde $n = 14$ tenemos, $m = 1$, $x = 2$, $a = 3$, y $b = 2$.

Las ecuaciones que modelan la dinámica en los nodos 9, 10 y 13, 14 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{V}_9 &= fe_9 - w_9 \sqrt{v_9} \\ \dot{V}_{10} &= p \cdot w_9 \sqrt{v_9} + q \cdot w_1 \sqrt{v_1} + r \cdot w_5 \sqrt{v_5} - w_{10} \sqrt{v_{10}} \\ \dot{W}_9 &= K_9(v_{10} + v_2 + v_6 - 3v_9)w_9 \\ \dot{W}_{10} &= K_{10}(v_9 + v_1 + v_5 - 3v_{10})w_{10} \\ \dot{V}_{13} &= fe_{13} - w_{13} \sqrt{v_{13}} \\ \dot{V}_{14} &= p \cdot w_{13} \sqrt{v_{13}} + q \cdot w_2 \sqrt{v_2} + r \cdot w_4 \sqrt{v_4} - w_{14} \sqrt{v_{14}} \\ \dot{W}_{13} &= K_{13}(v_{14} + v_3 + v_5 - 3v_{13})w_{13} \\ \dot{W}_{14} &= K_{14}(v_{13} + v_2 + v_4 - 3v_{14})w_{14} \end{aligned}$$

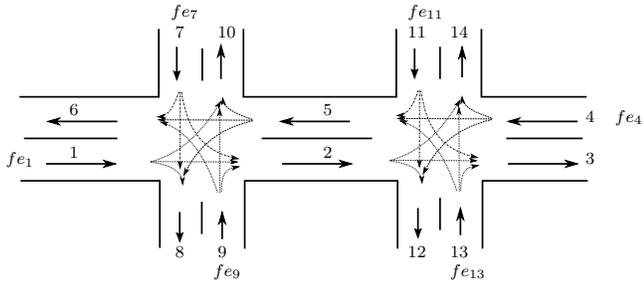


Figura 4. Extracto de Figura 1, indicando la numeración de cada nodo.

Las siguientes ecuaciones nos representan la dinámica de cada uno de los nodos. \dot{V}_1 representa la dinámica de flujo en el nodo 1, con una entrada externa. \dot{V}_2 , y \dot{V}_3 representan la dinámica de los nodos 2 y 3 los cuales no contienen entrada externa, el flujo es a través de la interconexión de sus nodos vecinos.

Las ecuaciones \dot{W}_1, \dot{W}_2 y \dot{W}_3 , representan la dinámica de adaptación en los nodos 1, 2 y 3, esta dinámica nos permite llegar a un equilibrio o consenso en el flujo de todos los nodos interconectados.

De acuerdo a la Figura 4 las ecuaciones que modelan la dinámica en los nodos 1, 2 y 3 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= fe_1 - w_1 \sqrt{v_1} \\ \dot{V}_2 &= p \cdot w_1 \sqrt{v_1} + q \cdot w_7 \sqrt{v_7} + r \cdot w_9 \sqrt{v_9} - w_2 \sqrt{v_2} \\ \dot{V}_3 &= p \cdot w_2 \sqrt{v_2} + q \cdot w_{11} \sqrt{v_{11}} + r \cdot w_{13} \sqrt{v_{13}} - w_3 \sqrt{v_3} \\ \dot{W}_1 &= K_1(v_2 + v_8 + v_{10} - 3v_1)w_1 \\ \dot{W}_2 &= K_2(v_1 + v_7 + v_9 - 3v_2)w_2 \\ \dot{W}_3 &= K_3(v_2 + v_{11} + v_{13} - 3v_3)w_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones que modelan la dinámica en los nodos 4, 5 y 6 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= fe_4 - w_4 \sqrt{v_4} \\ \dot{V}_5 &= p \cdot w_4 \sqrt{v_4} + q \cdot w_{11} \sqrt{v_{11}} + r \cdot w_{13} \sqrt{v_{13}} - w_5 \sqrt{v_5} \\ \dot{V}_6 &= p \cdot w_5 \sqrt{v_5} + q \cdot w_7 \sqrt{v_7} + r \cdot w_9 \sqrt{v_9} - w_6 \sqrt{v_6} \\ \dot{W}_4 &= K_4(v_5 + v_{12} + v_{14} - 3v_4)w_4 \\ \dot{W}_5 &= K_5(v_4 + v_{11} + v_{13} - 3v_5)w_5 \\ \dot{W}_6 &= K_6(v_5 + v_7 + v_9 - 3v_6)w_6 \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones se puede entonces estudiar el problema del consenso entre los nodos de la red, donde la ecuación para el parámetro w_i es puede verse como un control de todo el sistema, sin embargo, no existe una referencia preestablecida.

4. Resultados Simulación

Para ilustrar el estudio del consenso en una red de tráfico consideramos dos casos, el primero cuando los flujos externos de entrada son constantes y el otro cuando al menos uno de ellos es oscilatorio.

4.1. Caso I. Flujos externos constantes

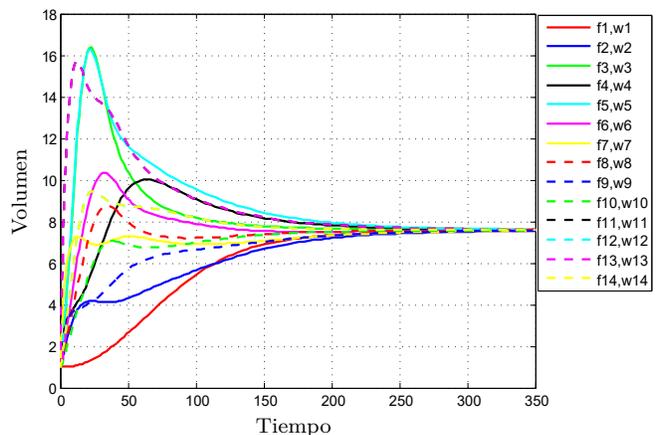


Figura 5. Volumen en cada nodo a lo largo del tiempo.

Considere dos conjuntos de condiciones iniciales unas para el volumen ($V_i^o = 1$) y para los flujos externos de entrada dados por

$$\begin{aligned} fe_1 &= 1 & fe_4 &= 2 & fe_7 &= 3 \\ fe_{11} &= 5 & fe_9 &= 2 & fe_{13} &= 5 \end{aligned} \quad (2)$$

Estos flujos a la entrada de los nodos indican que el numero de vehículos por unidad de tiempo es constante. Tomando en cuenta la interconexión dada por la Figura 4 con 14 nodos ($n = 14$), dicha figura es un fragmento del diagrama general mostrado en el Figura 1.

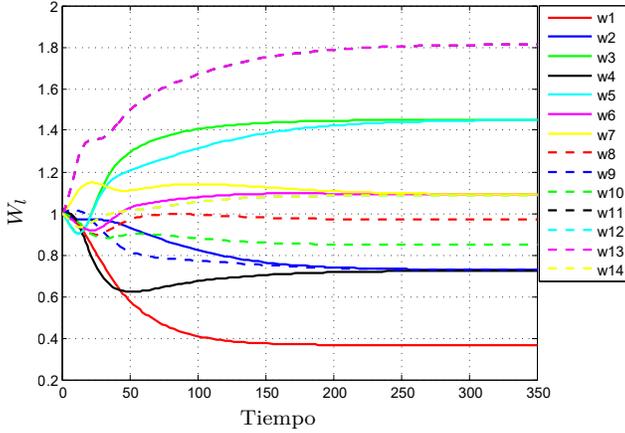


Figura 6. Valor del parámetro adaptable para ajustar el flujo de salida.

En la Figura 5 se muestra el comportamiento del volumen de cada nodo, noten que todos los volúmenes inician en el mismo valor, sin embargo, como los flujos externos son diferentes (3) el comportamiento del volumen en cada nodo varía de manera distinta. Una vez que el transitorio desaparece, los volúmenes en cada nodo llegan a un valor de equilibrio, debido a la dinámica del sistema, y la dinámica de adaptación que nos permite adaptar el flujo, para mantener un equilibrio entre los volúmenes de los nodos del sistema interconectado.

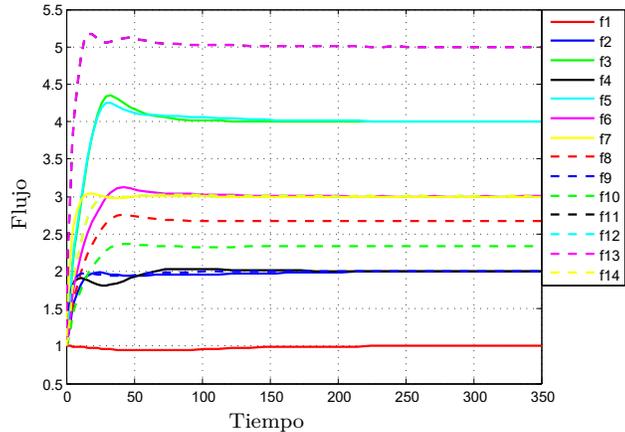


Figura 7. Flujo en cada nodo a lo largo del tiempo.

Para lograr el consenso en el volumen de cada nodo es necesario adaptar el valor w_i que es el parámetro que ajusta el valor del flujo a la salida de cada nodo, de tal manera que al adaptar este parámetro en función del error entre los volúmenes de los nodos interconectados es posible

lograr el consenso en el volumen; por ejemplo considere el valor para el volumen 1 en la Figura 5 y por otro lado el valor del parámetro w_1 en la Figura 6, esto indica que el flujo correspondiente al volumen 1 es bajo lo que indica que existe poca acumulación en ese nodo y por tanto el flujo a la salida debe ser reducido para incrementar su volumen, esto hace que el valor del parámetro w_1 sea igualmente bajo. De esta manera los nodos con mayor volumen presentan un valor alto en flujo de salida y lo de menor volumen presentan menor flujo a la salida y de esta manera llegar al consenso.

Por otro lado la Figura 7 muestra los flujos a la salida de cada nodo, y se aprecia como se ajustan a lo largo del tiempo para mantener el consenso en el volumen de todos los nodos y no solo de aquellos interconectados.

4.2. Caso II. Flujos externos variantes

Ahora consideremos el caso cuando al menos uno de los flujos externos entrantes a la red es variante en el tiempo, esto es que la cantidad de vehículos que ingresan a un nodo varía con el tiempo. Consideramos al igual que caso anterior que los volúmenes iniciales son ($V_i^o = 1$) y los flujos externos están dados por

$$\begin{aligned} fe_1 &= 2\text{sen}(0.04t) + 8 & fe_4 &= 1 & fe_7 &= 2 \\ fe_{11} &= 3 & fe_9 &= 5 & fe_{13} &= 4 \end{aligned} \quad (3)$$

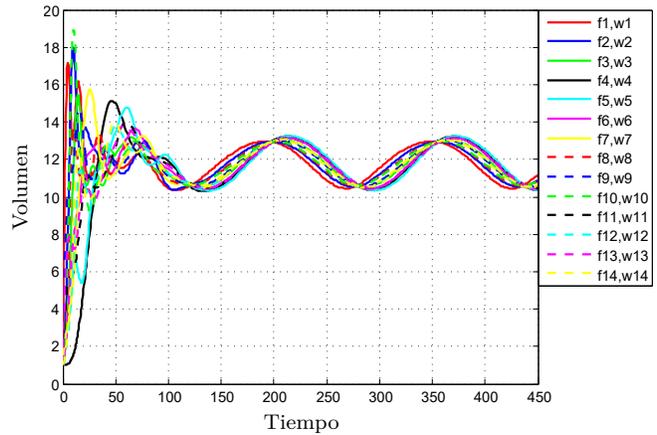


Figura 8. Volumen en cada nodo a lo largo del tiempo con un flujo externo variante.

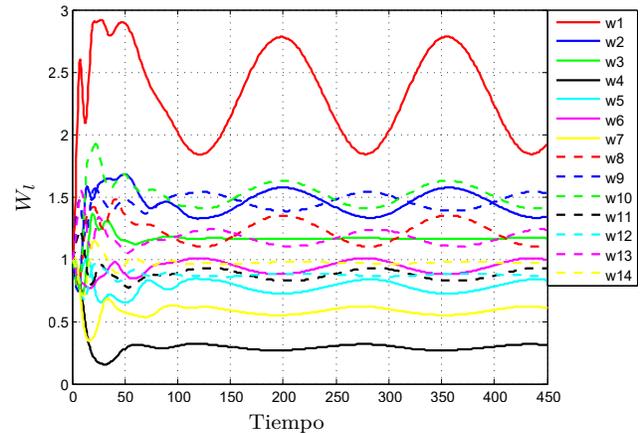


Figura 9. Valor del parámetro adaptable para ajustar el flujo de salida cuando un flujo de entrada es variante.

Note que el flujo externo f_{e1} está variando en el tiempo. Ahora en la Figura 8 se muestra el comportamiento de cada nodo, noten que ahora los volúmenes en cada nodo tiene un comportamiento oscilatorio, el cual es el reflejo del flujo f_{e1} , sin embargo, a pesar de esta oscilación el comportamiento en el volumen de los nodos tiende a un consenso de manera práctica. Existe un pequeño desfase entre los volúmenes en los nodos este es debido a la propagación de la variación en el nodo 1. Por otro lado, los parámetros w_i reflejan la variación en el flujo externo, lo que indica que este parámetro se adapta a la variación del flujo de entrada para mantener el consenso en el volumen. Por tanto se puede apreciar que a pesar de esta oscilación los volúmenes en los nodos se mantienen cercanos. Nuevamente observe el volumen correspondiente al nodo 1 (línea roja) en la Figura 8 y el comportamiento del parámetro w_1 , la oscilación indica que el flujo a la salida de ese nodo varía de igual forma que el flujo a la entrada.

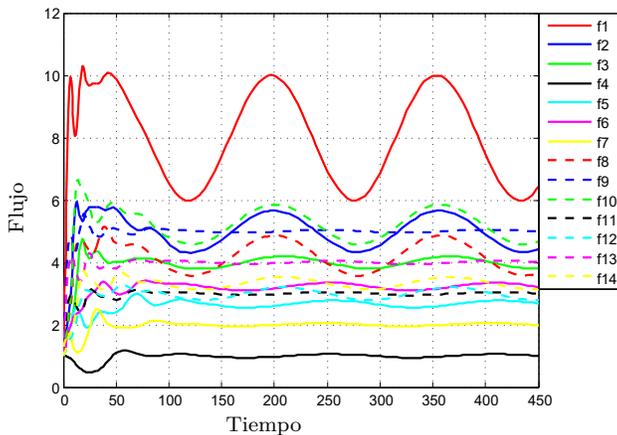


Figura 10. Flujo en cada nodo a lo largo del tiempo.

Por otro lado la Figura 10 muestra los flujos a la salida de cada nodo, y se observa como se va adaptando a lo largo del tiempo para mantener el consenso en el volumen de todos los nodos a pesar de la presencia de la oscilación en el flujo de entrada.

5. Conclusión

En este trabajo presentamos un modelo que describe la dinámica del volumen vehicular en donde mediante una interconexión se busca y se logra un consenso en la dinámica del volumen. Este modelo no describe la dinámica como una función de la distancia, ya que en tal caso requerimos una ecuación diferencial parcial y como estamos interesados en estudiar la interconexión y no la dinámica en el nodo, entonces solo observamos los volúmenes y los flujos de los nodos interconectados. En esta interconexión es posible llegar al consenso en el volumen de los nodos, esto es que independientemente de los flujos iniciales y los flujos externos, el consenso en volumen en los nodos es alcanzado, esto ajustando el valor del flujo de salida de cada nodo. Este ajuste se hace de manera adaptable y depende de las desviaciones de los volúmenes de los nodos vecinos. Cabe mencionar que este modelo es una aproximación ya que considera los flujos continuos en tiempo, sin embargo, es posible modificar

el modelo para considerar flujos discretos en el tiempo y modelar los cruces. Se encuentra que al considerar flujos externos, los flujos de salida de una pequeña red pueden considerarse como flujos externos en una red vecina con las mismas características, de tal manera que se puede crecer en forma de bloques (clusters). Aunque aún es simple el modelo, permite añadir más características, para trabajos futuros, como por ejemplo considerar flujos en tiempo discreto, añadir fuentes o sumideros en el interior del nodo, modificar la estructura de la interconexión (cruces de 3 calles o gloriets, etc.), considerando flujos bidireccional y unidireccional, etc. Finalmente, si consideramos que los nodos con un volumen alto de vehículos se considera que los tiempos de espera son altos comparados con aquellos que tienen un volumen bajo, entonces el consenso en el volumen de vehículos es un equilibrio en la acumulación de vehículos, donde el nodo con menos vehículos puede acumular y permitir que otro nodo reduzca su volumen, de tal forma que al equilibrar los volúmenes, los tiempos de espera en cada nodo se equilibran de igual manera.

Referencias

- Amaral, L.A.N. and Ottino, J.M. (2004). Complex networks. *The European Physical Journal B*, 38(2), 147.
- Astarita, V. (2002). Node and link models for network traffic flow simulation. *Mathematical and computer modelling*, 35.
- Barceló, J. (2010). Models, traffic models, simulation, and traffic simulation. In *Fundamentals of Traffic Simulation*. Springer.
- Bretti, G., Natalini, R., and Piccoli, B. (2007). A fluid-dynamic traffic model on road networks. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 14(2), 139.
- Elefteriadou, L. (2014). Two-lane highways. In *An Introduction to Traffic Flow Theory*. Springer.
- Kerner, B.S. (2009). Definitions of the three traffic phases. In *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Springer.
- Lotero-Vélez, L. y Hurtado-Heredia, R.G. (2014). Vulnerabilidad de redes complejas y aplicaciones al transporte urbano: una revisión de la literatura. *EIA.*, 11(21), 67–78.
- Polson, N. and Sokolov, V. (2014). Bayesian analysis of traffic flow on interstate i-55: The lwr model. *Annals of Applied Statistics*, 9(4), 1864–1888.
- Silva, T.C. and Zhao, L. (2016). Machine learning. In *Machine Learning in Complex Networks*. Springer.
- Treiber, M. and Kesting, A. (2013). The light-hill-whitham-richards model. *Traffic Flow Dynamics*.
- Wang Xiao Fan, C.G. (2003). Complex networks: small-world, scale-free and beyond. *IEEE Circ. Syst. Mag.*, 6–20.