Controlabilidad de sistemas lineales mediante el análisis de raíces ⋆

L. Guzman-Zeferino * **E. Alcorta-Garcia** *
C. Elizondo-Gonzalez *

* *Universidad Autónoma de Nuevo León,*
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado en Ingeniería Eléctrica
(e-mail: efrain.alcortagr@uanl.edu.mx).

Resumen. La existencia de un control para llevar el estado de un sistema lineal a un valor deseado esta ligado al concepto de controlabilidad. En la literatura especializada existen varios criterios equivalentes para determinar cuando un sistema lineal es controlable. En este trabajo se propone una nueva forma de revisar la controlabilidad de sistemas lineales. La motivación para obtener una forma novedosa para determinar la controlabilidad de un sistema lineal es la de disponer de un marco que permita considerar incertidumbre paramétrica en el sistema. La contribución se logra modificando la manera específica de realizar la prueba y trasladando el problema al de verificar la negatividad de raíces de un polinomio. Así se hace posible utilizar criterios que normalmente se utilizan para determinar la estabilidad. La propuesta es mostrada mediante ejemplos.

Keywords: Controlabilidad, sistema lineal, estabilidad, raíces, control.

1. INTRODUCCIÓN

La inclusión de la representación en espacio de estado de los sistemas dinámicos, realizada por Kalman en 1960 Kalman (1960), fue acompañada por el concepto de controlabilidad, el cual corresponde a una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos y es de particular importancia en la teoría de control. La controlabilidad significa, en general, que es posible dirigir el estado de un sistema de control dinámico de un valor arbitrario inicial a uno final, (el origen) arbitrario, utilizando el conjunto de controles admisibles. Cabe mencionar, que en la literatura existen muchas variantes de la definición de controlabilidad, las cuales dependen en gran medida de la clase de sistemas dinámicos, y la forma de controles admisibles, ver por ejemplo, Klamka (2013).

Después del impulso inicial dado al tema en los primeros años de la década de los 60s del siglo pasado en Kalman (1960), Gilbert (1963) y Chen (1984), en la que se logran los métodos de prueba para determinar si un sistema es controlable, el tema vuelve a ser considerado, pero ahora bajo la óptica de incertidumbre paramétrica, ver por ejemplo los trabajos de A. V. Savkin (1997) y Elizondo-Gonzalez (1999). Una observación importante es la manera en la que se incrementa el número de operaciones requeridas en la medida en la que el sistema se vuelve incierto. Elizondo-Gonzalez (1999).

En este trabajo se desarrolla un método de prueba nuevo para la controlabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo. El método propuesto permite verificar la controlabilidad mediante la prueba de que las raíces de un polinomio se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto da pie a utilizar herramientas que normalmente se utilizan para verificar la estabilidad de un sistema. Una de las principales ventajas es que una misma herramienta puede servir ahora para dos propósitos distintos y además el método propuesto permite sentar las bases para construir una prueba de controlabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica. Esta última no es desarrollada en el presente trabajo.

El resto del trabajo está organizado como sigue: en la siguiente sección se revisan las diferentes maneras de probar que un sistema lineal es controlable, en la sección 3 se presenta el método propuesto, en la sección 4 se incluyen ejemplos numéricos y en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. PRELIMINARES

En esta sección se revisará la definición así como los resultados relacionados con la controlabilidad existentes en la literatura.

Considerar un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ + \ Bu(t) \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada del sistema y las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ son matrices constantes.

⋆ El primer autor agradece el financiamiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) México.

2.1 Controlabilidad

La controlabilidad, para fines de este trabajo, se define como sigue:

Definición *(controlabilidad). El sistema lineal (1) se dice que es controlable en el intervalo $[t_0, t_f]$, si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$ existe una entrada continua $u(t)$ definida en $[t_0, t_f]$ tal que la solución de (1) satisface $x(t_f) = 0$ en un tiempo finito.*

Una consecuencia de la definición de controlabilidad es que un sistema lineal se puede dividir en una parte controlable y una no controlable. Note como la conexión entre la entrada y la parte dinámica no aparece en el sistema no controlable, mientras que en el sistema controlable si.

Las diferentes pruebas de controlabilidad disponibles en la literatura son resumidas en el siguiente resultado, el cual puede ser revisado en Chen (1984), Rugh (1996):

Teorema 1 *L*as siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par $(A,\ B)$ es controlable.
2. La matriz $\mathcal{U}$ (de controlabilidad de Kalman) de dimensión $n \times np$:
$$\mathcal{U} = \left[\, B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B \,\right]$$
tiene rango n (rango completo por renglones).
3. La matriz de $n \times n$
$$W_c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)}BB^T e^{A^T(t_0-\tau)}d\tau$$
es no singular para $t > t_0$.
4. La matriz de $n \times (n+p)$:
$$[A - \lambda I \ B]$$
tiene rango pleno por renglones para todo valor propio λ de A.
5. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces la solución única W_c de la ecuación:
$$AW_c + W_cA^T = -BB^T$$
es definida positiva.
6. La matriz $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ es no singular.

$\triangle \triangle \triangle$

2.2 Estabilidad

La estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser verificada mediante las raíces del polinomio característico. Un sistema es estable si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, ver, por ejemplo, Chen (1984). Como pruebas de estabilidad en las cuales no se requiere calcular las raíces de forma explícita se encuentran los resultados de Hurwitz (ver por ejemplo Elizondo-Gonzalez (1999)), el criterio de Routh (ver por ejemplo en Chen (1984)), el criterio de Mihailov (ver por ejemplo en Elizondo-Gonzalez (1999)) y más recientemente en Elizondo-Gonzalez (2001) se propone un método que se desarrolla sobre la misma base del criterio de Routh (también utiliza cadenas de Sturm, pero unas alternativas a las utilizadas por Routh), pero se realiza de forma más sencilla al no requerirse una división. El procedimiento dado en Elizondo-Gonzalez (2001) será resumido a continuación.

La estabilidad del sistema (1) depende de las raíces del polinomio característico, el cual está definido como verse en la siguiente expresión:

$$p(s) = |sI - A| = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0 \quad (2)$$

El siguiente resultado es bien conocido, ver por ejemplo Chen (1984):

Resultado 1 *El sistema lineal invariante en el tiempo (1) es asintóticamente estable, si todas las raíces de su polinomio característico tienen parte real estrictamente negativa.*

Es posible obtener las raíces del polinomio característico para casos sencillos, sin embargo, para los casos de mayor complejidad son difíciles de obtener sin la ayuda de una computadora. Existen varios criterios que permiten determinar el número de polos que se encuentran en el semiplano derecho de los complejos sin tener que factorizar el polinomio característico.

A continuación se presenta el resultado más reciente en este sentido, el cual utiliza un arreglo similar a la tabla de Routh, y fue desarrollado por Elizondo-González en Elizondo-Gonzalez (2001), ver tambén Elizondo-Gonzalez (2011). Este nuevo criterio de estabilidad tiene la ventaja de reducir el número de operaciones con respecto a los métodos alternativos existentes y los coeficientes son funciones polinómicas multivariables por lo que para el caso de incertidumbre paramétrica y positividad robusta es más fácil de probar que, por ejemplo, el criterio de Routh. Enseguida se muestra el procedimiento desarrollado por Elizondo-Gonzalez (2011):

Teorema 2 *Dado un polinomio $p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$, con coeficientes reales, el número de raíces en el semiplano derecho en el plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo de la columna de signo σ del siguiente arreglo:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \cdots \\ \sigma_2 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \sigma_3 & e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Donde

$$e_{i,j} = e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1},\ \forall 3 \leq i \leq n+1$$
$$e_{i,j} = c_{n+1-i-2(j-1)},\ \forall i \leq 2$$
$$\sigma_i = sign(e_{i,1}),\ \forall i \leq 2$$
$$\sigma_i = sign(ei,1) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} sign(e_{m+2(j-1),1})\ \forall i \geq 3$$

$\triangle \triangle \triangle$

Como se puede apreciar, el procedimiento para obtener los elementos $e_{i,j}$ es similar a la tabla de Routh pero sin usar la división.

Para obtener σ_i primero multiplicamos el signo del elemento $e_{i,1}$ por el signo del elemento superior inmediato $e_{i-1,1}$ y luego por el signo del los elementos superiores pero saltando en pares. Tampoco es necesario calcular el último elemento $e_{n-1,1}$, solamente es necesario calcular su signo. Para entender mejor lo anterior consideremos un ejemplo.

Ejemplo. El ejemplo ha sido tomado de Elizondo-Gonzalez (2011). Dado el polinomio

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 2,$$

por medio del criterio de Elizondo-González, determine el número de raíces en el semiplano derecho de los complejos. Aplicando el criterio de Elizondo-González obtenemos la tabla siguiente,

+	1	1	2
+	2	5	2
-	-3	2	
+	-19	-6	
+	-56		
+	+		

la cual muestra dos cambios de signo en la columna σ, así que el polinomio tiene dos raíces en el semiplano derecho de los complejos.

3. RESULTADO PRINCIPAL

La idea es generar un criterio alternativo a los mencionados en la sección anterior. Se trata de trasladar los resultados a una forma en la cual sea posible revisar la controlabilidad mediante técnicas que normalmente son utilizadas para verificar la estabilidad de un sistema. Para lograrlo partimos de uno de los resultados del teorema presentado en la sección anterior: El sistema (1) es controlable si $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ matriz es regular. Note que debido a la manera en la que se formó, la matriz M, esta es simétrica. Del álgebra lineal se sabe que una matriz simétrica tiene valores propios reales (ver por ejemplo Gantmacher (1990)).

Hecho 1. *Los valores propios de la matriz M son mayores o iguales a cero.*

$\triangle \triangle \triangle$

Prueba *La prueba se puede revisar en Gantmacher (1990).*

Hecho 2. *Los valores propios de la matriz $-M$ tienen todos partes negativas o son cero.*

$\triangle \triangle \triangle$

Lema 1 *La matriz $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ es no singular si y solo si los valores propios de la matriz $-M$ están todos en el semiplano izquierdo, es decir, son todos negativos (abusando del lenguaje decimos que son estables).*

$\triangle \triangle \triangle$

Como consecuencia del lema anterior, la controlabilidad de un sistema lineal puede ser probada mediante el análisis de las raíces de la matriz $-M$, mediante algún método como el presentado en la sección anterior.

El procedimiento de solución propuesto consiste en los siguientes pasos:

Procedimiento

1. Construir la matriz $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ donde $\mathcal{U}$ es la matriz de controlabilidad de Kalman,
2. Obtener $P(\lambda)$, es decir, el determinante de la matriz $P(\lambda) = |\lambda I + M|$,
3. Analizar la estabilidad del polinomio de $P(\lambda)$.
4. Concluir sobre la controlabilidad.

Note que el método propuesto requiere revisar si las raíces de un cierto polinomio están en el semiplano izquierdo del plano complejo. La forma de revisarlo utiliza un procedimiento alternativo al método de Routh, el cual no requiere divisiones. Para los fines de este trabajo, es posible utilizar el método de Routh e inclusive la utilización del cálculo aproximado mediante métodos numéricos. Sin embargo, el método propuesto puede ser utilizado cuando el polinomio en cuestión contiene incertidumbre en los coeficientes. Para estos casos de incertidumbre, el método de Routh o el de determinación numérica no pueden ser aplicados. Aunque esta problemática de incertidumbre no se considera en este trabajo, representa la motivación para que el procedimiento propuesto sea como el mostrado arriba.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Con la finalidad de mostrar la aplicación del método propuesto se considera los siguientes ejemplos.

4.1 Ejemplo 1

Considerar un sistema lineal, tomado de Svaricek (1995).

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \qquad (3)$$

La matriz de controlabilidad de Kalman queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.1 & 1.2 \\ 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determinando ahora M:

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{U}\mathcal{U}^T \\ &= \begin{bmatrix} 3.0 & 3.3 & 0.3 \\ 3.3 & 3.65 & 0.33 \\ 0.3 & 0.33 & 0.03 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio característico de -M queda:

$$s^3 - 6.68s^2 + 0.0606s + 2.106 \times 10^{-19} = 0$$

La tabla queda

+	1	6.68
+	0.0606	-2.106×10^{-19}
+	0.404808	
-	$-8.525 \times^{-20}$	

Como se puede apreciar en la columna de los signos, hay un cambio de signo que implica que el sistema no es completamente controlable, hay un modo no controlable. Esto se puede observar del polinomio característico, donde el término independiente es muy pequeño que hace que al menos una raíz este casi en cero, que hace al sistema no controlable. Note que el sistema no es completamente controlable, sin embargo si contiene algunos modos controlables, es decir, existen algunos estados del sistema que permanecen controlables mientras que otros están desconectados.

Note que las raíces del polinomio:

$$s^3 - 6.68s^2 + 0.0606s + 2.106 \times 10^{-19} = 0$$

resultan:

$$\begin{aligned} -6.6709158 \\ -0.0090842 \\ 3.476 \times 10^{-18} \end{aligned}$$

Lo cual verifica el resultado obtenido mediante el análisis de la tabla anterior.

4.2 Ejemplo 2

Considerar el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} u(t) \tag{4}$$

La correspondiente matriz de controlabilidad es

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 17 & 12 & 62 \\ 0 & 5 & 4 & 15 & 20 & 45 \end{bmatrix}$$

Ahora, el valor de la matriz M resulta:

$$M = \begin{bmatrix} -21 & -48 & -88 \\ -48 & -4281 & -3295 \\ -88 & -3295 & -2691 \end{bmatrix}$$

Ahora el polinomio característico de M queda:

$$s^3 + 6993s^2 + 799510s + 2410098 = 0$$

La tabla queda

$+$	1	$799,510$
$+$	$6,993$	$2,410,098$
$+$	$5,588,563,332$	
$+$	$+$	

De acurdo a lo anterior el sistema es controlable completamente.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se propone un nuevo método para la determinación de controlabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo. El procedimiento propuesto requiere de la construcción de la matriz de controlabilidad de Kalman así como la determinación del polinomio característico del producto de matrices. Aunque pudiera ser más laborioso inicialmente, este procedimiento sienta las bases para analizar sistemas con incertidumbre basados en los resultados disponibles para analizar estabilidad de Elizondo-Gonzalez (1999). Una virtud del método propuesto es que nos brinda información sobre la cantidad de modos del sistema que no son controlables. El procedimiento es mostrado mediante ejemplos numéricos.

REFERENCIAS

A. V. Savkin, I.R.P. (1997). Weak robust controlability and observability of uncertain linear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44, 1037–1041.

Chen, C.T. (1984). *Linear System Theory and Desing (1st Edition).* Oxford University Press, USA.

Elizondo-Gonzalez, C. (1999). *Estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales con incertidumbre multilineal.* Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León.

Elizondo-Gonzalez, C. (2001). A new stability criterion on space coefficients. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2663–2664. Orlando, FI, USA.

Elizondo-Gonzalez, C. (2011). *Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics*, chapter Parametric Robust Stability, 3–26. InTech, (Ed. Andreas Mueller). doi: 10.5772/24460.

Gantmacher, F.R. (1990). *The Theory of Matrices.* Chelsea Publishing Company.

Gilbert, E.G. (1963). Controlability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society of Indutrial Applications in Mathematics, S.I.A.M., Control Set. A*, 2(1), 128–151.

Kalman, R.E. (1960). On the general theory of systems. In *Proceedings of the first IFAC World Congress*, 481–492. Moscow.

Klamka, J. (2013). Controlability of dynamic systems, a survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical sciences*, 61(2), 335–342. doi: 10.2478/bpasts-2013-0031.

Rugh, W.J. (1996). *Linear System Theory.* Prentice Hall, second edition.

Svaricek, F. (1995). *Zuverlässige numerische Analyse linearer Regelungssysteme.* Teubner.