

Mejorando la tasa de convergencia de sistemas lineales positivos con CLF-estabilizadores

Horacio Leyva C., Francisco A. Carrillo*

* *Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora,
hleyva@mat.uson.mx, carrillo@mat.uson.mx*

Resumen: De acuerdo a los resultados de la teoría CLF (función de Lyapunov de control), bajo la condición de conocer una función de Lyapunov, presentamos un control continuo y acotado, explícitamente dado, que logra mejorar la rapidez de convergencia de una familia de sistemas lineales positivos. Citamos un par de resultados para mostrar la robustez de la estabilización rápida. Como motivación, presentamos un par de aplicaciones, donde podemos observar la estabilización rápida bajo el estabilizador continuo obtenido vía CLF.

Palabras clave: Estabilización, sistema positivo, control CLF.

1. INTRODUCCIÓN

Para sistemas lineales positivos, mostramos una manera de mejorar la estabilización, haciendola más rápida y de forma robusta. Este resultado, obtenido con base en los trabajos (1), (6) y (7), representa una alternativa a los trabajos de estabilización para sistemas lineales positivos, obtenidos vía modos deslizantes, presentados en AMCA 2013 ver (13).

En la sección 2, mencionamos definiciones y resultados de sistemas positivos, así como resultados de estabilización para sistemas positivos. También describimos resultados de estabilización mediante estabilizadores continuos dados explícitamente vía la teoría CLF. Tales funciones de control son restringidos a un intervalo y pueden ser positivos.

En la sección 3 mostramos que los sistemas lineales positivos, descritos en (3), satisfacen propiedades que hacen factible la estabilización vía CLF. También mostramos los resultados que llevan a concluir la robustez de la estabilización obtenida.

En la sección 4 mostramos los resultados en un par de aplicaciones de sistemas positivos. Cabe mencionar que en la literatura no hay diseños de controles estabilizantes vía CLF para sistemas positivos. Los controles obtenidos mediante este método resultan continuos respecto a la variable de estado.

2. ANTECEDENTES DE SISTEMAS POSITIVOS LINEALES

En esta propuesta, la existencia de la dinámica de deslizamiento del sistema de control positivo surge de algunas propiedades interesantes del sistema lineal homogéneo:

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

Definición 1. El sistema (1) se dice que es positivo si $x(t, x_0) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ y $x_0 \geq 0$. En otras palabras, si R_+^n es un conjunto invariante para el sistema (1), entonces el sistema es positivo.

Definición 2. Una matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es llamada matriz Metzler, si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

Teorema 3. El sistema (1) es positivo si y sólo si A es Metzler.

Definición 4. Una matriz $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ es llamada matriz Hurwitz, si sus valores propios tienen parte real negativa.

Teorema 5. Frobenius–Perron para matrices Metzler

Sea A matriz Metzler. Entonces, existe un número real μ_0 y un vector $\omega_0 \geq 0$ tal que,

- (i) $A\omega_0 = \mu_0\omega_0$.
- (ii) If $\mu \neq \mu_0$ es un valor propio de A , entonces $Re(\mu) < \mu_0$.

Teorema 6. Sea $A \in R^{n \times n}$ una matriz Metzler. Existe una matriz positiva $-A^{-1}$ si y sólo si A es matriz Hurwitz, donde A^{-1} es la matriz inversa de A .

Definición 7. Una matriz $A \in R^{n \times n}$ es llamada Matriz Metzleriana si $a_{ii} < 0$ para toda i y $a_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$.

3. RESULTADOS ADICIONALES PARA SISTEMAS LINEALES POSITIVOS

El siguiente resultado sobre la ecuación de Lyapunov es conocido (ver (9)) y básico para nuestro estudio.

Teorema 8. Sea $A \in R^{n \times n}$ matriz Metzler. El origen es un equilibrio GAS del sistema $\dot{x} = Ax$ si y sólo si existe una matriz diagonal P con entradas positivas en la diagonal tal que la matriz $A^T P + PA$ es definida negativa.

El siguiente teorema es conocido, e incluimos una prueba conveniente para el objetivo de este trabajo.

Teorema 9. Sea $A \in R^{n \times n}$ Hurwitz y Metzler. Entonces el origen es GAS bajo el sistema:

$$\dot{x} = DAx,$$

para toda matriz diagonal D con entradas positivas.

Demostración. Primero hacemos la siguiente observación. Si A es matriz Metzler (Metzleriana) y Hurwitz, y la matriz D es diagonal con entradas positivas, entonces DA es Metzler (Metzleriana). Probaremos que la matriz DA también es Hurwitz.

Ya que la matriz A es Hurwitz, existe una matriz diagonal P tal que la matriz $A^T P + PA$ es negativa definida. Sea la matriz diagonal $P_D = D^{-1}P$, entonces

$$\begin{aligned} (DA)^T P_D + P_D (DA) &= A^T D^T (D^{-1}P) + (D^{-1}P) DA \\ &= A^T D (D^{-1}P) + (PD^{-1}) DA \\ &= A^T P + PA \end{aligned}$$

es decir, la matriz $(DA)^T P_D + P_D (DA)$ es negativa definida, por lo tanto la matriz DA es Hurwitz.

Observación 10. Los eigenvalores y eigenvectores de las matrices A y DA son diferentes.

El siguiente teorema es consecuencia directa de los resultados anteriores.

Teorema 11. Considere el sistema

$$\dot{x} = D(Ax + b\bar{u}) \quad (2)$$

donde D es matriz diagonal con entradas positivas y $A \in R^{n \times n}$ es matriz Metzler y Hurwitz, $b \in R_+^n$, con $\bar{u} > 0$. Sea \bar{x} el punto de equilibrio del sistema (2). Entonces $\bar{x} \in R_+^n$.

Para mejorar la tasa de estabilización del sistema (2) sustituimos la entrada constante \bar{u} por una función continua y acotada $u(x)$. Esta función es diseñada mediante la metodología CLF, que inicia con obtener una función de Lyapunov $V(x)$ para el sistema de control. La existencia de la función de Lyapunov es asegurada por el teorema 8.

Para diseñar un estabilizante vía la teoría CLF, necesitamos resolver versiones particulares de la ecuación de Lyapunov: Dada una matriz A Metzleriana y Hurwitz, por obtener matrices diagonales P tal que la matriz $A^T P + PA$ es definida negativa.

Después de resolver el problema anterior, definimos la función de Lyapunov $V = x^T P x$.

Es conocido que si A es matriz Hurwitz, entonces existe una matriz simétrica definida positiva P tal que la matriz

$$Q = A^T P + PA,$$

es definida negativa. Si además A es matriz Metzler, entonces existe matriz P diagonal tal que Q es definida negativa.

Consideremos la forma cuadrática

$$q = x^T Q x,$$

Definición 12. Los menores principales ordenados naturalmente de una matriz $Q \in R^{n \times n}$ se definen como determinantes de las matrices

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ q_{k1} & & & q_{kk} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Específicamente, los menores principales de la matriz Q son

$$\Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta_n = \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ q_{n1} & & & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 13. (Ver (12))

Sea $Q \in R^{n \times n}$ matriz simétrica. Entonces Q es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Para cualquier matriz Metzler y Hurwitz Q de dimensión 2×2 tenemos el siguiente lema:

Lema 14. Si $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ es matriz Hurwitz, con

$a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$, entonces con la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{21}} \end{pmatrix},$$

tenemos que la matriz simétrica $Q = A^T P + PA$ es definida negativa.

Demostración. Ya que A es Hurwitz, entonces $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. Mostraremos que la matriz $-A^T P - PA$ es definida positiva; donde

$$-A^T P - PA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & -2a_{12} \\ -2a_{12} & 2\frac{a_{12}}{a_{21}}a_{22} \end{pmatrix},$$

por lo tanto los menores principales son positivos; $\Delta_1 = 2a_{11}$ y $\Delta_2 = 4\frac{a_{12}}{a_{21}}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, de forma que la matriz Q es definida negativa.

4. RESOLVIENDO LA ECUACIÓN DE LYAPUNOV PARA TRES PROBLEMAS DE APLICACIÓN

4.1 La estabilidad de un sistema de control lineal que representa la respuesta neuromuscular a la anestesia

Para esta parte puede consultar (11).

Primero establecemos el siguiente

Lema 15. Si $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12} & 0 \\ a_{31} & 0 & -a_{33} \end{pmatrix}$ es matriz Hurwitz,

con $a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$, entonces con la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{31}^2} (2a_{33}(a_{11} - a_{21}) - a_{13}a_{31}) \end{pmatrix}$$

se tiene que $Q = A^T P + PA$ es definida negativa.

Demostración. Directamente tenemos que a la matriz $-(A^T P + PA)$ le corresponden los menores principales

$$\Delta_1 = 2a_{11}, \quad \Delta_2 = 4a_{12}^2 \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{21}},$$

$$\Delta_3 = 8a_{12}^2 a_{33} (a_{11} - a_{21}) \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{33}}{a_{21}a_{31}^2}$$

donde las desigualdades $a_{11} - a_{21} > 0$ y $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{33} > 0$ son necesarias para que la matriz A sea Hurwitz. Al tener que $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$, concluimos la prueba.

Y por este lema 15, si consideramos la matriz (ver (3))

$$A = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12} + k_{12}) & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{21} & 0 \\ k_{1e} & 0 & -k_{e0} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12} & 0 \\ a_{31} & 0 & -a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces mediante la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{21}}{k_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{1e}^2} (2k_{e0}(k_{10} + k_{12}) - k_{31}k_{1e}) \end{pmatrix},$$

tenemos que la matriz $-(A^T P + PA)$ es definida positiva.

4.2 Un modelo compartimental de Sorensen

Si $A \in R^{7 \times 7}$ es la matriz Metzler y Hurwitz citada en (3) que representa la dinámica lineal de la insulina (ver (10)), dada por

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{227} & \frac{173}{3151} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{100}{500} & -\frac{1000}{153} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{200}{47} & -\frac{153}{189} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{500}{1411} & \frac{200}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1000}{709} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{500}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix}$$

entonces, mediante la matriz

$$P = \begin{pmatrix} I_6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donde I_6 es la matriz identidad de dimensión 6×6 , obtenemos que la matriz $(A^T P + PA)$ es definida negativa.

4.3 Un sistema de n tanques interconectados

Consideremos ahora un sistema de n tanques interconectados (ver (3)). Cada tanque está conectado con su antecesor y su predecesor, es decir, el i -ésimo tanque recibe dos flujos, f_{2i-1} y f_{2i} , cada tanque provee dos flujos f_{2i-2} y f_{2i+1} para el i -ésimo y el $i+1$ -ésimo tanque respectivamente, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Lema 16. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_3 & a_{22} & f_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_5 & a_{33} & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & f_7 & \ddots & f_{2n-4} & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & f_{2n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_{2n-1} & -(f_{2n-2} + f_1) \end{pmatrix},$$

Metzler y Hurwitz, donde $a_{ii} = -(f_{2i-2} + f_{2i+1})$, para $i = 2, \dots, n-1$, entonces, con la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{f_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_2 f_4}{f_3 f_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_2 f_4 f_6}{f_3 f_5 f_7} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2 f_4}{f_3 f_5} \dots \frac{f_{2n-2}}{f_{2n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

se tiene que $Q = A^T P + PA$ es definida negativa.

Demostración. Los menores principales Δ_i de la matriz $Q := (A^T P + PA)$ son

$$\Delta_1 = 2f_3 \quad \Delta_2 = 4f_2 f_5, \quad \Delta_3 = 8 \frac{f_2^2}{f_3} f_4 f_7, \dots$$

$$\Delta_i = 2^i \frac{f_2^3}{f_3^2} \frac{f_4^2}{f_5^2} \dots \frac{f_{2i-4}^2}{f_{2i-3}^2} f_{2i-2} f_{2i+1}, \dots$$

$$\Delta_n = 2^n \frac{f_2^{n-1}}{f_3^{n-2}} \frac{f_4^{n-2}}{f_5^{n-3}} \frac{f_6^{n-3}}{f_7^{n-4}} \dots \frac{f_{2n-4}^3}{f_{2n-3}^2} f_{2n-2} f_1,$$

de forma que $\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Concluimos que la matriz simétrica Q es definida negativa.

5. ANTECEDENTES DE CLF-ESTABILIZADORES RESTRINGIDOS

Consideremos el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde la función vector f y g son suaves en R^n , con CVS $U := [-r^-, r^+] \subset R$, $r^- \geq 0$ y $r^+ > 0$. Sin perder generalidad, suponemos que $f(0) = 0$. El conjunto de retroalimentación admisibles es definida por

$$U := \{u : R^n \rightarrow [-r^-, r^+] : u(x) \text{ es continua}\}.$$

Una función $V : R^n \rightarrow R$ es llamada una *función Lyapunov de control CLF* (con respecto al sistema (5) con CVS U) si y sólo si es una función $C^k(R^n)$ ($k \geq 1$) la cual es *definida positiva* ($V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ssi $x \neq 0$) y $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, tal que

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \inf_{u \in U} \{\alpha(x) - \beta(x) \cdot u\} < 0,$$

para toda $x \neq 0$, donde $\alpha(x) := \nabla V(x) \cdot f(x)$ y $\beta(x) := -\nabla V(x) \cdot g(x)$. De la desigualdad anterior, definimos la función de retroalimentación óptimo (mejor tasa de estabilización) $\bar{\omega}(x) \in U$ como la función de R^n a U que satisface:

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \nabla V \cdot (f + g\bar{\omega}) \quad x \neq 0.$$

Existe un único control estabilizante óptimo $\bar{\omega}(x)$ definido por

$$\bar{\omega}(x) = r(\text{sign}\beta(x)), \text{ para } x \text{ tal que } \beta(x) \neq 0,$$

pero no es continuo en el conjunto $\mathcal{N}_\beta = \{x \in R^n : \beta(x) = 0\}$, donde la función $|\beta|r$ es no negativa, con

$$r = \begin{cases} r^+ & \text{si } \beta(x) > 0, \\ r^- & \text{si } \beta(x) \leq 0. \end{cases}$$

Para el diseño de las funciones de control de retroalimentación continua en el origen, Zvi Artstein introduce en (1) el concepto de *propiedad del control pequeño* (SCP).

Definición 17. La función Lyapunov de control tiene la *propiedad del control pequeño* (SCP) con respecto a (5) si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x\| < \delta$, entonces existe un control $u \in U$, con $|u| < \epsilon$, tal que

$$\alpha(x) - \beta(x) \cdot u < 0, \text{ para } x \neq 0.$$

El control continuo y estabilizante lo proponemos de la forma

$$u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x) = \rho(x)r\text{sign}\beta,$$

donde $\rho(x)$ es una función de regularización, tal que satisface la siguiente hipótesis.

Hipótesis H. Supongamos que $\rho : R^n \rightarrow R$ es una función continua tal que

- (i) $\forall x \in R^n, 0 \leq \rho(x) < 1,$
- (ii) $\rho(x) = 0$ *ssi* $x \in \mathcal{N}_b.$

Mediante el siguiente teorema mostramos que las condiciones de la **Hipótesis H** son suficientes para resolver el problema de estabilización con control $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x)$. Con base en la definición: $\mathcal{N}_b := \{x \in R^n : b(x) = 0\}$ y el control de mejor tasa $\bar{\omega}(x) = r\text{sign}b$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 18. Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (5) y el CVS $U = [-r^-, r^+]$, con $r^- \geq 0$ y $r^+ > 0$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{\omega}(x) = r\text{sign}b$ es el control de retroalimentación con mejor tasa y $\rho : R^n \rightarrow [0, 1]$ una función continua que satisface la **Hipótesis H**. Entonces, $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x)$ es continuo y hace que el sistema (5) sea GAS.

La prueba de este teorema está dada en (6).

5.1 Un diseño particular de $\rho(x)$

Para el CVS $U = [-r^-, r^+]$, el control continuo y estabilizante es

$$u_\epsilon(x) = \rho_\epsilon(x)\bar{\omega}(x) = \rho_\epsilon(x)r \text{sign}\beta,$$

o bien

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} r(\text{sign}\beta) \left[1 - \left(1 - \frac{|a| + a}{2|\beta|r} \right) \exp(\tau_\epsilon) \right], & \text{para } |\beta|r > 0, \\ 0, & \text{para } |\beta|r = 0, \end{cases} \quad (3)$$

y $\rho_\epsilon(x)$ es dada por

$$\rho_\epsilon(a, \beta) = 1 - \left(1 - \frac{|a| + a}{2|\beta|r} \right) \exp(\tau_\epsilon),$$

donde $\tau_\epsilon(x)$ es una función no-positiva definida como

$$\tau_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \epsilon|\beta|r, & \text{para } |\beta|r > 0, \\ 0, & \text{para } |\beta|r = 0, \end{cases}$$

con $\lambda(x) = 1 - \frac{|\alpha(x)| + \alpha(x)}{2|\beta|r}$. Si $\epsilon \rightarrow \infty$, la función de control $u_\epsilon(x)$ converge al control estabilizante con mejor tasa $\bar{\omega} = r \text{sign}(\beta)$, y como consecuencia de $0 < \exp(\tau_\epsilon) \leq$

1 para cada $\epsilon > 0$, tenemos la condición restrictiva para el control $0 \leq u_\epsilon(x) \leq r^+$ para toda $x \in R^n$.

El siguiente teorema muestra la estabilización asintótica global (GAS) del sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (4)$$

por medio del control de retroalimentación admisible $u_\epsilon(x)$ dado por (3).

Teorema 19. Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2) y el CVS $U = [-r^-, r^+]$, con $r^- \geq 0$ y $r^+ > 0$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{\omega}(x) = r\text{sign}\beta$ es el control de retroalimentación con mejor tasa y $\rho_\epsilon : R^n \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Entonces, $u_\epsilon(x) = \rho_\epsilon(x)\bar{\omega}(x)$ es continuo y hace que el sistema (2) sea GAS.

La prueba del teorema puede verse en (6); básicamente consiste en probar la continuidad de la función $u_\epsilon(x)$ y probar la desigualdad

$$\dot{V} = a - \beta u_\epsilon < 0 \text{ para } x \neq 0.$$

6. EL ESTABILIZADOR CLF PARA SISTEMAS POSITIVOS

De acuerdo al resultado anterior, describimos la función de control para sistemas lineales positivos, en el entendido que un sistema lineal es un caso particular de sistema afín.

Consideremos el cambio de variable $y(t) = x(t) - \bar{x}$ en la ecuación (4) de forma que

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) + b\bar{u},$$

entonces

$$\dot{y}(t) = A(y(t) + \bar{x}) + b\bar{u},$$

tal que

$$\dot{y} = Ay.$$

Al ser A matriz Metzler y Hurwitz, con valor propio dominante $\mu_0 < 0$, pero con $|\mu_0|$ pequeño, buscaremos diseñar una función continua $u(y) \in [-r_1, r_2]$, con $u(0) = 0$, de forma que las soluciones del sistema

$$\dot{y} = Ay + bu,$$

converjan más rápido a $y = 0$. Una vez diseñado $u(y)$, nos devolvemos en el cambio de variable $y(t) = x(t) - \bar{x}$, de manera que el control $u(x) = u(x(t) - \bar{x})$ estabiliza rápidamente las soluciones $x(t)$ de $\dot{x} = Ax + b(u + \bar{u})$ en el punto de equilibrio $x = \bar{x}$. Donde se cumple que

$$-r_1 \leq u(y) \leq r_2 \Leftrightarrow \bar{u} - r_1 \leq \bar{u} + u(y) \leq \bar{u} + r_2,$$

con $0 \leq \bar{u} - r_1$.

Considerando el sistema afín

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

con la función de Lyapunov $V = x^T P x$, la derivada de V nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (Ax + b\bar{u})^T P x + x^T P (Ax + bu) \\ &= x^T (A^T P + P A) x + (b^T P x + x^T P b) u \\ &= \alpha(x) - \beta(x) u, \end{aligned}$$

donde incluimos las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$. Ya que la matriz A es Hurwitz, tenemos que $\alpha(x) < 0$ para toda $0 \neq x \in R^n$, de forma que se cumple la condición CLF

$$\inf_{u \in U} \{\alpha(x) - \beta(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

Además, se satisface la propiedad SCP porque $\frac{|\alpha| + \alpha}{2|\beta|r} = 0$ para toda $\beta \neq 0$. Considerando esta particularidad en el diseño (3) de $u_\varepsilon(x)$, las funciones $\rho_\varepsilon(x)$ y $\tau_\varepsilon(x)$ se simplifican para quedar como $\rho_\varepsilon(a, \beta) = 1 - \exp(\tau_\varepsilon)$ y

$$\tau_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\varepsilon|\beta|r, & \text{para } |\beta|r > 0, \\ 0, & \text{para } |\beta|r = 0, \end{cases}$$

de manera que el control (3) nos queda como

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(\text{sign}\beta)(1 - \exp(-\varepsilon|\beta|r)), & \text{para } |\beta|r > 0, \\ 0, & \text{para } |\beta|r = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Ahora, considerando los sistemas lineales como un caso particular de sistemas afines, tomemos el sistema lineal (4), donde la matriz A es Metzleriana y Hurwitz, y \bar{u} constante tal que $0 \leq r^- < \bar{u} < r^+$, entonces las soluciones $x(t)$ de (4) son tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

La rapidez de la convergencia anterior depende de los valores propios de la matriz A . Esta rapidez de convergencia puede ser mejorada al sustituir la constante \bar{u} por la función $u_\varepsilon(x) \in [r^-, r^+]$ dada por (5). Enunciamos este resultado en el siguiente

Teorema 20. El sistema de control $\dot{y} = Ay + bu_\varepsilon(y)$, con control continuo $u_\varepsilon(y)$ dada por (5), tiene una estabilización más rápida que el sistema (4).

Demostración. La prueba se basa en la magnitud de la derivada de la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}y^T P y$. Mostraremos que la derivada \dot{V} es menor al aplicar $u_\varepsilon(y)$ que al aplicar el valor constante \bar{u} .

Como vimos antes, mediante el cambio de variable $y(t) = x(t) - \bar{x}$, representamos la ecuación $\dot{x} = Ax + b\bar{u}$ como $\dot{y} = Ay$, de manera que la rapidez de convergencia puede medirse mediante la derivada

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V Ay \\ &= y^T (A^T P + PA) y \\ &= \alpha(y). \end{aligned}$$

En cambio, al aplicar el control $u_\varepsilon(y)$ obtenemos que la rapidez es dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V (Ay + bu_\varepsilon(y)) \\ &= y^T (A^T P + PA) y + (b^T P y + y^T P) u_\varepsilon(y) \end{aligned}$$

o bien denotando la derivada con las funciones escalares $\alpha(y)$ y $\beta(y)$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha(y) - \beta(y) u_\varepsilon(y) \\ &= \alpha(y) - r|\beta(y)|\rho_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

donde es claro que

$$\alpha(y) - r|\beta(y)|\rho_\varepsilon(x) < \alpha(y) < 0 \quad \text{para } r|\beta(y)| \neq 0.$$

Observación 21. El teorema anterior puede ser extendido sin dificultad para mejorar la tasa de estabilización de los sistemas

$$\dot{y} = D(Ax + b\bar{u}),$$

para toda matriz diagonal D con entradas positivas, de manera que el control estabilizante $u_{D\varepsilon}(x)$ depende ahora

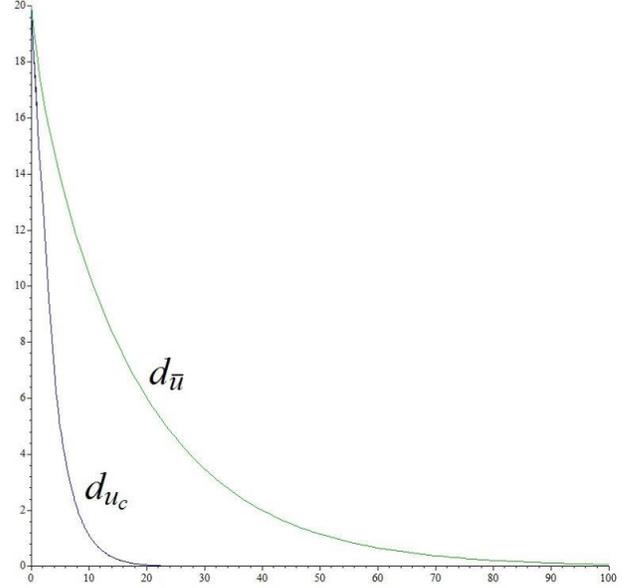


Fig. 1. En esta simulación se tomó la condición inicial $x_0 = (20, 20)^T$, la curva $d_{\bar{u}}(t) = \sum |x_i(t, \bar{u}) - \bar{x}_i|$ donde $x(t, \bar{u})$ es la solución del sistema (6) con $f_1 = f_4 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 2$ y $\bar{x} = (20, 20)^T$, mientras que $d_{u_c} = \sum |x_i(t, u) - \bar{x}_i|$ con u_c dador por (7).

de la función de Lyapunov $V = x^T P_D x$, donde consideramos la matriz diagonal $P_D = D^{-1}P$, definida en la prueba del teorema 9.

6.1 El caso de los dos tanques

Considerando el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2 & f_3 \\ f_2 & -f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (6)$$

Con $A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 \\ f_3 & -f_3 \end{pmatrix}$, donde $f_1 + f_2 = f_3$, entonces A es Hurwitz porque $\det A = f_3(f_3 - f_2) > 0$. Por lo tanto las soluciones $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ son tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

donde el punto de equilibrio $\bar{x} \in R_+^2$, es dado por

$$\bar{x} = - \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 \\ f_3 & -f_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación diseñamos el estabilizador continuo para obtener una mejor tasa de convergencia.

Por el lema 14, consideremos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{f_3} \end{pmatrix},$$

para definir la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} x^T P x = \frac{1}{2} (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{f_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

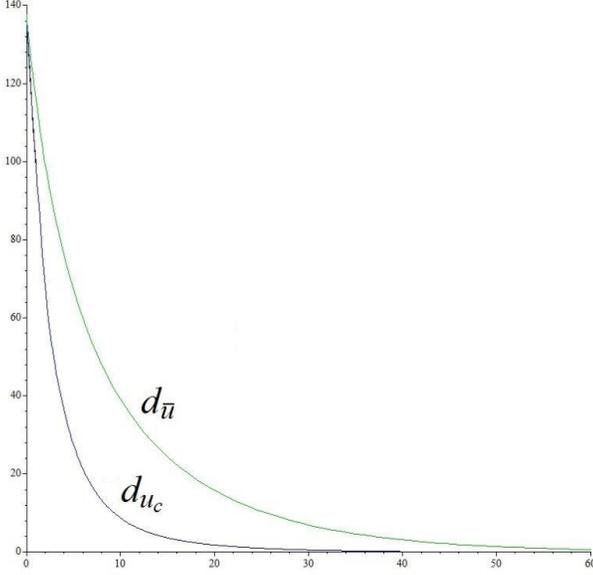


Fig. 2.

$$= \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \frac{f_2}{f_3} x_2^2 \right) > 0 \quad \text{para} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tal que

$$\begin{aligned} -f_3 x_1^2 + 2f_2 x_1 x_2 - f_2 x_2^2 &= f_2 \left(-\frac{f_3}{f_2} x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 \right) \\ &\leq f_2 (-x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2) \\ &= -f_2 (x_1 - x_2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -f_3 x_1^2 + 2f_2 x_1 x_2 - f_2 x_2^2 + x_1 f_1 u \\ &= \alpha(x) + \beta(x) u, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -f_3 x_1^2 + 2f_2 x_1 x_2 - f_2 x_2^2 \\ &\leq -f_2 (x_1 - x_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

y $\beta(x) = x_1 f_1$. Por lo tanto, mediante el control

$$u_\varepsilon(x) = r(\beta(x)) \begin{cases} 1 - \exp(-\varepsilon |\beta| r), & \text{si } |\beta| r > 0, \\ 0, & \text{si } |\beta| r = 0, \end{cases} \quad (7)$$

mejoramos la tasa de estabilización. Esta metodología es aplicada a cada uno de las aplicaciones descritas en la sección 2. Por ejemplo, para el sistema (6), si tomamos los valores

$$f_1 = f_4 = 1, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = 2 \quad \text{y} \quad \bar{x} = (20, 20)^T,$$

la figura 1 nos compara las convergencias con el control constante \bar{u} y el control continuo (7). Finalmente, la figura 2 corresponde a la aplicación del control (5), con los datos

$$\bar{x} = (28.668, 28.668, 28.668, 17.15, 22.044, 43.115, 19.421)^T$$

y

$$b = (0, 0, 0, 0, 0, b_6, 0)^T,$$

donde se comparan las convergencias de las soluciones al punto de equilibrio al aplicar u_ε y $\bar{u} = \frac{3131}{100 b_6}$.

7. CONCLUSIONES

Mostramos un método de estabilización-clf para sistemas positivos lineales mediante funciones de control admisibles (continuas y acotadas). En general, dado un sistema afín (que puede ser lineal), la dificultad práctica para obtener el control estabilizante consiste en encontrar la función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP. Para el caso de sistemas lineales positivos, es suficiente con encontrar una matriz diagonal P , solución de una ecuación de Lyapunov, para definir la función de Lyapunov

$$V = x^T P x.$$

Con tal función podemos usar el resultado publicado en (6) para diseñar el estabilizador admisible.

REFERENCIAS

- [1] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 7, 1163-1173, 1983.
- [2] P. de Leenheer and D. Aeyels. Stability properties of equilibria of classes of cooperative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12), 2001.
- [3] H. Leyva, F.A. Carrillo, G. Quiroz, and R. Femat. Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control. *Journal of Process Control*, 41, 47-55, 2016.
- [4] L. Farina, and S. Rinaldi. Positive Linear Systems, Theory and Applications. *John Wiley*, New York, 2000.
- [5] V.S. Bokharaie, O. Mason and F. Wirth. Stability and positivity of equilibria for subhomogeneous cooperative systems. *Nonlinear Analysis*, 74, 6416-6426. 2011.
- [6] H. Leyva, J. Solis-Daun, and R. Suárez. Global CLF stabilization of systems with control inputs constrained to a hyperbox. *SIAM J. Control Optimization*, 51, 745-766, 2013.
- [7] H. Leyva, J. Solis-Daun. Global CLF stabilization of systems with respect to a hyperbox, allowing the null-control input in its boundary (positive controls). *Proceedings of 53 IEEE Conference on Decision and Control*, 2014.
- [8] A. Enthoven and K. Arrow. A theorem of expectations and the stability of equilibrium. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 288-293, 1956.
- [9] C.T. Chen. Linear Systems Theory and Design. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. *Oxford University Press*, New York, NY, USA 3rd edition, 1999.
- [10] J.T. Sorensen. A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Assess Improved Insulin Therapies for Diabetes. *Ph.D. Thesis*, MIT, USA, 1985.
- [11] Lemos, J.M., Caiado, D.V., Costa, B.A., Paz, L.A., Mendonza, T.F., Rabizo, R., Seabra, M. Robust control of maintenance-phase anesthesia. *IEEE Control Syst.*, Mag. 34 (6), pp. 24-38.
- [12] F.R. Gantmacher. The theory of Matrices. *Chelsea Publishing Company*, New York, N.Y., 1959.
- [13] H. Leyva, G. Quiroz, F.A. Carrillo and R. Femat. Rapid insulin stabilization via slidingmodes control for T1DM therapy. *Proceedings of the Mexican Conference of Automatic Control*, 2013.