

Observador por modos deslizantes para una clase de sistemas mecánicos con perturbaciones^{*}

W. Alejandro Apaza Pérez^{*} Jaime A. Moreno^{**}
Leonid Fridman^{*}

^{*} Depto. de Ingeniería de Control y Robótica. División de Ingeniería
Eléctrica. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de
México, (e-mails: alegosmis@gmail.com, lfridman@unam.mx).

^{**} Depto. de Eléctrica y Computación, Instituto de
Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, (e-mail:
jmorenop@ingen.unam.mx).

Resumen. En este trabajo se considera una clase de sistemas mecánicos de dos grados de libertad con la presencia de la fuerza de Coriolis, perturbaciones, fricciones seca y viscosa. Para esta clase de sistemas se propone un observador de convergencia teóricamente exacta en tiempo finito a los estados verdaderos. El observador propuesto es globalmente convergente y su diseño es independiente de la propiedad entrada-acotada-estado-acotado que podría no tener el sistema. Se utiliza el sistema carro-péndulo para ilustrar los resultados a través de simulaciones.

Palabras claves: observadores por modos deslizantes, sistemas mecánicos, observadores de sistemas no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

En el control de sistemas mecánicos usualmente se requiere la información de las variables: posición y velocidad. Y en general sólo la medición de la posición está disponible, por lo cual es necesario estimar la velocidad. Este artículo está enfocado en el problema de construcción de observadores para una familia de sistemas mecánicos no lineales en la presencia de perturbaciones. Existen varios trabajos que proporcionan observadores con convergencia global y asintótica a los estados verdaderos (Gauthier et al., 1992; Besançon, 2000; Mabrouk et al., 2004; Astolfi et al., 2010) cuando el modelo no lineal, los parámetros y las entradas del sistema mecánico son completamente conocidos. Sin embargo, en la presencia de incertidumbres y/o perturbaciones (por ejemplo: fricción seca, torque desconocido, etc.) el problema de estimar global exactamente el valor de la velocidad es más desafiante y más aún si se requiere una estimación en tiempo finito. Si la perturbación es arbitraria, la teoría de observadores con entrada desconocida (Hautus, 1983; Rocha-Cózatl and Moreno, 2004, 2011) indica que se requiere la condición de grado relativo uno de la salida medible con respecto a la perturbación. Pero los sistemas mecánicos con perturbación tienen grado relativo dos (la posición con respecto a la perturbación). En este trabajo, para estimar la velocidad se asumirá que las perturbaciones son *acotadas*.

Para este propósito, se requiere un algoritmo de estimación discontinua, tal como los observadores por modos deslizantes (Edwards et al., 2002; Barbot et al., 2003; Spurgeon, 2008). Una de sus principales ventajas es que estos observadores proporcionan convergencia teóricamente exacta a los estados verdaderos del sistema, aún en la presencia de perturbaciones acotadas, pero bajo la condición de que el sistema no lineal tenga la propiedad entrada-acotada-estado-acotado (BIBS por sus siglas en inglés). Además, los observadores por modos deslizantes de alto orden (HOSM por sus siglas en inglés) (Fridman et al., 2008; Barbot and Floquet, 2010; Bejarano et al., 2011; Pisano and Usai, 2011; Efimov et al., 2012) aseguran la convergencia en tiempo finito.

En particular, para sistemas mecánicos no lineales con perturbaciones acotadas, los observadores/diferenciadores por modos deslizantes (Levant, 1998; Davila et al., 2005; Xian et al., 2004; Moreno, 2009) requieren que el sistema tenga la propiedad BIBS. Para superar esta restricción en (Apaza-Pérez et al., 2017) se propuso una estrategia que conecta en cascada dos observadores: (i) un observador de Luenberger que asegura que el error de estimación converja a una vecindad acotada de cero; (ii) un diferenciador HOSM que garantiza la convergencia global, teóricamente exacta y en tiempo finito a cero del error de estimación. Sin embargo, esta estrategia de diseño crece dos veces en el orden del observador, y este requiere condiciones restrictivas para el diseño de ganancias. Estas condiciones restrictivas fueron parcialmente superadas para sistemas mecánicos con un grado de libertad Apaza-Pérez et al. (2016).

^{*} Los autores agradecen el apoyo del CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología): 241171 CVU 419644; PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) IN113216 y IN113617; Fondo de Colaboración del II-FI UNAM INGSBAS-100-2015.

Contribución. Consideramos una clase de sistema mecánicos de dos grados de libertad (2DOF por sus siglas en inglés) con la presencia de: términos de Coriolis, fricciones secas y viscosas, incertidumbres/perturbaciones acotadas. Estos sistemas no requieren tener la propiedad BIBS. Para esta clase de sistemas, se propone un observador por modos deslizantes global que estima teóricamente exacta en tiempo finito la velocidad.

El resto del trabajo esta organizado de la siguiente manera. La sección 2 presenta el planteamiento del problema. En la sección 3 se desarrolla el diseño del observador. Los resultados del trabajo se exponen en la sección 4. En la sección 5 se aplica el observador propuesto al sistema carro-péndulo. En la sección 6 se exponen las conclusiones.

A lo largo de este trabajo $\overline{(*)}$ y $\underline{(*)}$ denotarán una cota superior e inferior del término $(*)$, respectivamente.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere los sistemas mecánicos 2DOF con la presencia de perturbaciones, dadas como

$$M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) + H\dot{x} + \Lambda \text{sign}(\dot{x}) = Du + \tilde{\delta}(t, x, \dot{x}), \quad (1)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ es la posición medible, $M(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de inercia, $C(x, \dot{x})\dot{x}$ representa a las fuerzas de Coriolis y centrífugas, las matrices $H, \Lambda, D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, y $\Lambda \text{sign}(\dot{x})$ es una fricción seca, $G(x)$ es la fuerza gravitatoria, $\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})$ contienen a las perturbaciones en sistema, y $u \in \mathbb{R}^2$ es la entrada de control.

Las dificultades que presenta el sistema (1) para las técnicas estándares en el diseño de observadores globales son: i) Para las fuerzas de Coriolis y centrífugas $C(x, \dot{x})\dot{x}$ (estas producen términos cuadráticos en las componentes de la velocidad), los observadores/diferenciadores por modos deslizantes Levant (1998); Davila et al. (2005); Xian et al. (2004) requieren la propiedad BIBS en el sistema. ii) Para la fricción seca $\Lambda \text{sign}(\dot{x})$ (además de ser discontinuo, este suele presentar incertidumbre en su coeficiente) y la perturbación $\tilde{\delta}$ (usualmente acotada y no desvaneciente), los observadores con campo vectorial continuo Besançon (2000); Mabrouk et al. (2004); Rocha-Cózatl and Moreno (2011) sólo garantizan convergencia a una región del origen de la dinámica del error de estimación.

El objetivo es diseñar un observador global con convergencia teóricamente exacta en tiempo finito.

Considere la familia de sistemas (1), el cual adicionalmente satisface las siguientes suposiciones:

P-1 La perturbación $\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})$ es uniformemente acotado, es decir existe una constante $L_{\tilde{\delta}} \geq 0$ tal que $\|\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})\| \leq L_{\tilde{\delta}}$ para todo $(t, x, \dot{x})$.

P-2 La matriz $M(x)$ depende únicamente de la variable x_2 como sigue

$$M(x_2) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}(x_2) \\ m_{12}(x_2) & m_{22}(x_2) \end{bmatrix}.$$

P-3 Existen dos constantes $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ tal que

$$0 < \alpha_1 I \leq M(x_2) \leq \alpha_2 I, \text{ para todo } x_2, \quad (2)$$

es satisfecha, donde I denota a la matriz identidad de tamaño 2×2 .

Para cada sistema Euler-Lagrange de dimensión n , la kj -ésima entrada de $C(x, \dot{x})$ es definida a partir de las entradas de $M(x)$ a través de los símbolos de Christoffel

$$c_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial m_{kj}(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial m_{ki}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{ij}(x)}{\partial x_k} \right) \dot{x}_i. \quad (3)$$

Usando esta relación de los símbolos de Christoffel y la suposición P-2, las fuerzas de Coriolis y centrífugas de la familia (1) es reducido a

$$C(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 0 & m'_{12}(x_2)\dot{x}_2 \\ 0 & \frac{1}{2}m'_{22}(x_2)\dot{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

3.1 Transformación de estados para lidiar con el término de Coriolis

Considere el sistema (1) donde $v := [v_1 \ v_2]^T = Du - G(x)$, $\delta := [\delta_1 \ \delta_2]^T = \tilde{\delta} - \Lambda \text{sign}(\dot{x})$, el cual puede ser expresado como

$$\begin{cases} \dot{z} = z, \\ \dot{z} = M^{-1}(x) [v - C(x, z)z - Hz + \delta(t, x, z)]. \end{cases} \quad (5)$$

A partir de las suposiciones P-2 y P-3 la siguiente transformación de estados

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \int_0^{x_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}} ds \\ x_2 \\ m_{11}z_1 + m_{12}(x_2)z_2 \\ \alpha(x_2)z_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

es un difeomorfismo, donde $\Delta(x_2) = m_{11}m_{22}(x_2) - (m_{12}(x_2))^2$ y $\alpha(x_2) = \sqrt{\frac{\Delta(x_2)}{m_{11}}}$ (Note que $\alpha(x_2) \leq \sqrt{\alpha_2}$

es satisfecha). Esta transformación fue propuesta por Mabrouk et al. (2004) para el caso $H = 0$, $\tilde{\delta} = 0$, $\Lambda = 0$ en (1), donde su observador propuesto pierde efectividad para clase de sistemas (1) considerados en este trabajo.

El sistema transformado obtenido a partir (5) usando (6) es dado como

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{w_1}{m_{11}}, \\ \dot{w}_1 &= -(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}w_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}w_2 + v_1 + \delta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{w_2}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{w}_2 &= \frac{m_{11}[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{21}w_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{22}w_2] + m_{12}(\theta_2)[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}w_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}w_2] + m_{11}\alpha(\theta_2)}{m_{11}\alpha(\theta_2)} \\ &\quad + \frac{m_{11}v_2 - m_{12}(\theta_2)v_1 + m_{11}\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}\alpha(\theta_2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\Upsilon_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m_{12}(\theta_2)}{m_{11}} \\ \frac{1}{\alpha(\theta_2)} & \frac{m_{11}\alpha(\theta_2)}{1} \end{bmatrix}$ y $(H\Upsilon_{\theta_2})_{ij}$ denota la

componente ij de la matriz $H\Upsilon_{\theta_2}$, $(i, j = 1, 2)$. Nótese que en el sistema transformado (7) no hay términos cuadráticos en la variable no medible (w_1, w_2) . Los detalles del sistema transformado se encuentra en el Apéndice A.1.

3.2 Estructura del observador.

El observador propuesto tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \frac{\hat{w}_1}{m_{11}} - \ell k_{o1} \phi_{11}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{w}}_1 &= -(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}\hat{w}_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}\hat{w}_2 + v_1 - \ell^2 k_{o2} \phi_{12}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \frac{\hat{w}_2}{\alpha(\theta_2)} - \frac{\ell l_{o1} \phi_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{\hat{w}}_2 &= \frac{m_{11}[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{21}\hat{w}_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{22}\hat{w}_2]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad - \frac{m_{12}(\theta_2)[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}\hat{w}_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}\hat{w}_2]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad + \frac{m_{11}v_2 - m_{12}(\theta_2)v_1}{m_{11}\alpha(\theta_2)} - \frac{\ell^2 l_{o2} \phi_{22}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \end{aligned} \quad (8a)$$

donde $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$, $e_{\theta_2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2$, las no linealidades

$$\phi_{i1}(\cdot) := \mu_{i1}[\cdot]^{1/2} + \mu_{i2}[\cdot], \quad (8b)$$

$$\phi_{i2}(\cdot) := \frac{\mu_{i1}^2}{2}[\cdot]^0 + \frac{3\mu_{i1}\mu_{i2}}{2}[\cdot]^{1/2} + \mu_{i2}^2[\cdot], \quad \text{para } i = 1, 2,$$

y los estados estimados en coordenadas originales para el sistema (5) están dados por

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon_{\theta_2} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m_{12}(\theta_2)}{m_{11}} \\ 0 & \frac{1}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix}. \quad (8c)$$

El observador (8) es una copia del sistema transformado con términos no lineales de inyección ϕ_{i1} y ϕ_{i2} . Estas inyecciones aparecen aditivamente en el sistema. El término discontinuo $[\cdot]^0$ asegura robustez del observador contra perturbaciones acotadas y los otros términos en las inyecciones aseguran convergencia en tiempo finito a los estados verdaderos.

4. RESULTADOS

Las ganancias a diseñar del observador propuesto son

$$k_{o1}, k_{o2}, l_{o1}, l_{o2}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22} > 0, \quad (8d)$$

las cuales pueden ser obtenidas a partir de la desigualdades matriciales (9) en el siguiente Lema 1.

Lema 1. Para cualesquiera constantes positivas $b, d_{11}, h_{A1}, h_{B1}, \alpha(\theta_2) > 0$, y constantes no negativas $(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}, (H\Upsilon_{\theta_2})_{22}, d_{12}(\theta)(H\Upsilon_{\theta_2})_{12}, \Gamma_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, 4$, existen constantes $\ell \geq 1$; $k_{oi}, \mu_{mi}, l_{oi}, \gamma_j > 0$, y matrices simétricas positivas definidas $P_i > 0$, para $i = 1, 2$, tal que

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 < 0, \quad B_2^T P_2 + P_2 B_2 < 0, \quad (9a)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{P1} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \Pi_{P2} & \star & \star & \star & \star \\ B^T P_1 & 0 & -\gamma_1 \mu_{m2}^2 & \star & \star & \star \\ 0 & B^T P_2 & 0 & -\gamma_2 \mu_{m2}^2 & \star & \star \\ B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3 \mu_{m1}^4 \ell^2 & \star \\ 0 & B^T P_2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_4 \mu_{m1}^4 \ell^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (9b)$$

son satisfechas, donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -k_{o1} & 1 \\ -k_{o2} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -k_{o1} & \frac{1}{d_{11}} \\ -k_{o2} & -\left(\frac{(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}}{\ell \mu_{12}} + b_1\right) \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -l_{o1} & 1 \\ -l_{o2} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} -l_{o1} & 1 \\ -l_{o2} & -\left(\frac{d_{11}(H\Upsilon_{\theta_2})_{22} + d_{12}(\theta)(H\Upsilon_{\theta_2})_{12}}{\ell d_{11} \mu_{22}} + b_1\right) \end{bmatrix}, \\ \Pi_{P1} &= \ell h_{A1} (A_1^T P_1 + P_1 A_1) + \gamma_2 \Gamma_2 B B^T + \gamma_3 \Gamma_3 \tilde{B}^T \tilde{B} + \\ &\quad + \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{B}^T \tilde{B} + \epsilon I, \\ \Pi_{P2} &= \frac{\ell h_{B1}}{\alpha(\theta_2)} (B_1^T P_2 + P_2 B_1) + \gamma_1 \Gamma_1 B B^T + \gamma_3 \Gamma_3 \tilde{B}^T \tilde{B} + \\ &\quad + \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{B}^T \tilde{B} + \epsilon I. \end{aligned}$$

La prueba del Lema 1 está en el Apéndice A.2.

El siguiente teorema es el resultado principal del artículo.

Teorema 2. Suponga que los parámetros (8d) en (8) satisfacen las desigualdades matriciales factibles en (9), entonces el estado de estimación (8c) converge en tiempo finito a la velocidad $\dot{x}$ en (5).

La prueba del Teorema 2 se basa en la convergencia en tiempo finito a cero en la dinámica del error de estimación entre los sistemas (7) y (8a). La dinámica del error de estimación es dado por

$$\begin{cases} \dot{e}_{\theta_1} &= \frac{e_{w_1}}{m_{11}} - \ell k_{o1} \phi_{11}(e_{\theta_1}), \\ \dot{e}_{w_1} &= -(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}e_{w_1} - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}e_{w_2} - \ell^2 k_{o2} \phi_{12}(\theta_1) - \delta_1, \\ \dot{e}_{\theta_2} &= \frac{e_{w_2} - \ell l_{o1} \phi_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{e}_{w_2} &= \frac{m_{11}[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{21}e_{w_1} - (H\Upsilon_{\theta_2})_{22}e_{w_2}]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad - \frac{m_{12}(\theta_2)[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}e_{w_1} - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}e_{w_2}]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad - \frac{m_{11}\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}\alpha(\theta_2)} - \frac{\ell^2 l_{o2} \phi_{22}(e_{\theta_2})}{\alpha_2(\theta_2)}, \end{cases} \quad (10)$$

donde $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$, $e_{w_1} = \hat{w}_1 - w_1$, $e_{\theta_2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2$, $e_{w_2} = \hat{w}_2 - w_2$. La convergencia del error de estimación a cero es obtenida a través de la función de Lyapunov

$$V(e) = \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

obtenida de (9a)-(9b), donde $\zeta = \begin{bmatrix} \ell\phi_{11}(e_{\theta_1}) \\ e_{w_1} \end{bmatrix}$ y $\eta = \begin{bmatrix} \ell\phi_{21}(e_{\theta_2}) \\ e_{w_2} \end{bmatrix}$. Derivando la función de Lyapunov $V(e)$ a lo largo de las trayectorias en (10) se obtiene

$$\dot{V} \leq -\frac{\epsilon\mu_{m1}^2\ell}{2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}V^{1/2}.$$

Note que las trayectorias de la dinámica de error no puede permanecer en el conjunto $S = \{(e_{\theta_1}, e_{\theta_2}, e_{w_1}, e_{w_2}) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} | e_{\theta_1} = e_{\theta_2} = 0\}$. Esto implica que V es una función continuamente decreciente y a través del Teorema de Lyapunov para Inclusiones Diferenciales [Deimling (1992); Prop. 14.1 p. 205] (que no requiere diferenciabilidad de la función de Lyapunov), por lo cual se concluye que el origen $(e_{\theta_1}, e_{\theta_2}, e_{w_1}, e_{w_2}) = 0$ es alcanzado en tiempo finito para cada condición inicial. Se omiten los detalles de la prueba en esta versión por cuestiones de espacio.

5. EJEMPLO: CARRO-PÉNDULO

El observador propuesto será aplicado por simulación al sistema carro péndulo. La Figura 1 muestra el principio funcional del sistema.

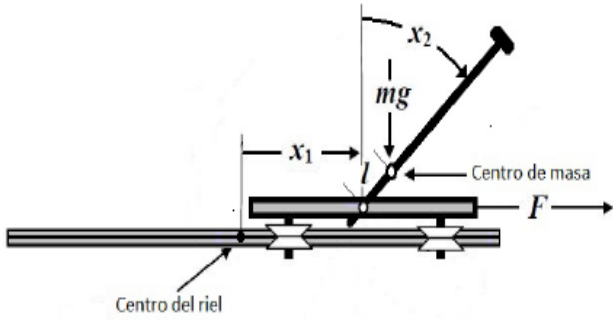


Figura 1. Sistema carro-péndulo

El modelo matemático no lineal del carro-péndulo, considerando el diagrama descrito en la Figura 1, es dado por INTECO (2008) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{a_1(k_1 u - x_4^2 \sin x_2 - k_2 x_3) + (g \sin x_2 - k_3 x_4) \cos x_2}{a_1 a_2 - \cos^2 x_2}, \\ \dot{x}_4 &= \frac{(k_1 u - x_4^2 \sin x_2 - k_2 x_3) \cos x_2 + a_2(g \sin x_2 - k_3 x_4)}{a_1 a_2 - \cos^2 x_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

donde los estados representan: $x_1 \equiv$ posición del carro $[m]$, $x_2 \equiv$ posición angular del péndulo $[rad]$, $x_3 \equiv$ velocidad del carro $[\frac{m}{s}]$, $x_4 \equiv$ velocidad angular del péndulo $[\frac{rad}{s}]$. Por otra parte, u es la entrada de control $[N]$. En la tabla 1, se muestran los parámetros del carro-péndulo dados en el manual INTECO (2008), donde $a_1 := \frac{J_P}{ml} = 0.3545$, $a_2 := \frac{1}{l} = 90.9091$, $k_1 := \frac{p_1}{ml} = 979.9833$, $k_2 := \frac{f_c - p_2}{ml} = 161.3845$, $k_3 := \frac{f_p}{ml} = 0.0146$.

Escribiendo el sistema (11) en la forma (1) se obtiene que $M(x) = \begin{bmatrix} a_2 & -\cos x_2 \\ -\cos x_2 & a_1 \end{bmatrix}$, $C(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_4 \sin x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

	Descripción	Valor
m	Masa equivalente del carro péndulo	0.872 $[Kg]$
l	Distancia del eje de rotación al centro de masa del sistema	0.011 $[m]$
f_c	Coefficiente de fricción dinámica del carro	0.5 $[\frac{N \cdot s}{m}]$
f_p	Coefficiente de fricción rotacional	$6.5 \cdot 10^{-5} [\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}]$
J_p	Momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación	0.00292 $[Kg \cdot m^2]$
g	Aceleración de la gravedad	9.81 $[m/s^2]$
p_1	Razón de la fuerza del control a la señal PWM	9.4 $[N]$
p_2	Razón de la fuerza del control a la velocidad del carro	-0.548 $[N \cdot s/m]$

Tabla 1. Parámetros del carro-péndulo.

$G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \sin x_2 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde $x = (x_1, x_2)^T$ es la posición medida.

Las suposiciones P-1, P-2 y P-3 son satisfechas. Y también

$$\text{se obtienen los siguientes términos } \Upsilon_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & \frac{\cos(\theta_2)}{a_2 \alpha(\theta_2)} \\ 0 & \frac{1}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix},$$

$$H\Upsilon_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{a_2} & \frac{k_2 \cos(\theta_2)}{a_2 \alpha(\theta_2)} \\ 0 & \frac{k_3}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix}, \quad \alpha(\theta_2) = \sqrt{\frac{a_1 a_2 - \cos^2(\theta_2)}{a_2}} = \sqrt{\frac{\Delta(\theta_2)}{a_2}}$$

y la transformación de estados como

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \int_0^{x_2} -\frac{\cos(s)}{a_2} ds \\ x_2 \\ a_2 x_3 - \cos(x_2) x_4 \\ \alpha(x_2) x_4 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Los parámetros utilizados en las desigualdades matriciales

$$\begin{aligned} (9) \text{ son: } \underline{\alpha(\theta_2)} &= \sqrt{\frac{a_1 a_2 - 1}{a_2}}, \quad \overline{(H\Upsilon_{\theta_2})_{12}} = \frac{k_2}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}}, \\ \overline{d_{12}(\theta_2)}, \quad \overline{(H\Upsilon_{\theta_2})_{22}} &= k_3 \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}}, \quad \underline{h_{A1}} = \frac{b_1}{\frac{(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}}{\ell\mu_{12}} + b_1}, \\ \underline{h_{B1}} &= \frac{a_2 b_2 \ell \mu_{22}}{a_2 k_3 \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} + \frac{k_2}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} + a_2 b_2 \ell \mu_{22}}, \quad \Gamma_3 = 4L_{\delta_1}^2, \\ \Gamma_1 &= \left(\frac{k_2}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} \right)^2, \quad \Gamma_2 = \left(\frac{k_3}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} \right)^2, \quad \Gamma_4 = \\ &4 \left(\frac{a_2 L_{\delta_2} + L_{\delta_1}}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Para las simulaciones, considere en (1) a la perturbación como $\tilde{\delta}(t) = (0.5 \sin(t/\pi) - 0.2, 0.4 \cos(\pi t/3) - 0.3)^T$ y $\Delta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$. La entrada de control como $u = 0.5 \cos(x_1 - x_2) + 0.6$ y condiciones iniciales $x_1(0) = -0.1$, $x_2(0) = 0.2$, $x_3(0) = -0.1$, $x_4(0) = -0.1$, $\hat{\theta}_1(0) = 5$, $\hat{\theta}_2(0) = 5$, $\hat{w}_1(0) = 5$, $\hat{w}_2(0) = 5$.

Si $b_1 = 2$, $b_2 = 200$, entonces a partir de (9) se obtiene $P_1 = \begin{bmatrix} 76.7062 & -8.8802 \\ -8.8802 & 1.7438 \end{bmatrix}$; $P_2 = \begin{bmatrix} 45.5100 & -11.7927 \\ -11.7927 & 18.2595 \end{bmatrix}$; $\ell = 1$; $k_{o1} = 0.9594$; $k_{o2} = 5.1402$; $l_{o1} = 1.1713$; $l_{o2} = 3.0827$; $\mu_{m1} = 3$, $\mu_{m2} = 10$; $\mu_{11} = 3$; $\mu_{12} = 300$;

$\mu_{21} = 3$; $\mu_{22} = 10$; $\epsilon = 0.0934$; $\gamma_1 = 0.9297$; $\gamma_2 = 0.8079$; $\gamma_3 = 1.1800$; $\gamma_4 = 0.9828$.

La Fig. 2 ilustra la convergencia en tiempo finito de los estados estimados a los estados verdaderos. La Fig. 3 ilustra el error de estimación de todos los estados, y el control aplicado al sistema.

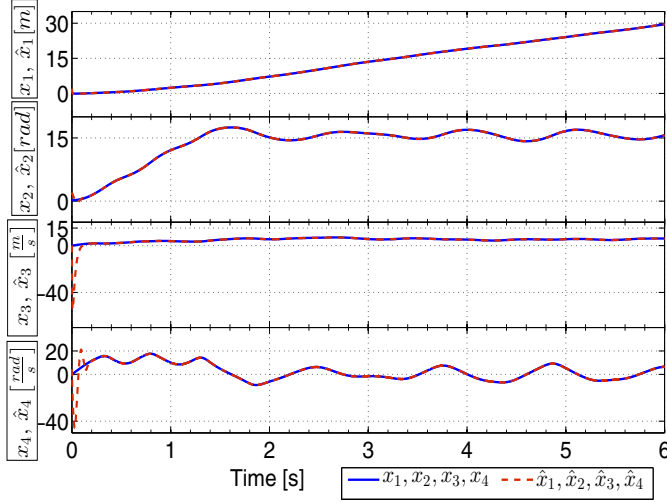


Figura 2. Estados verdaderos y estados estimados.

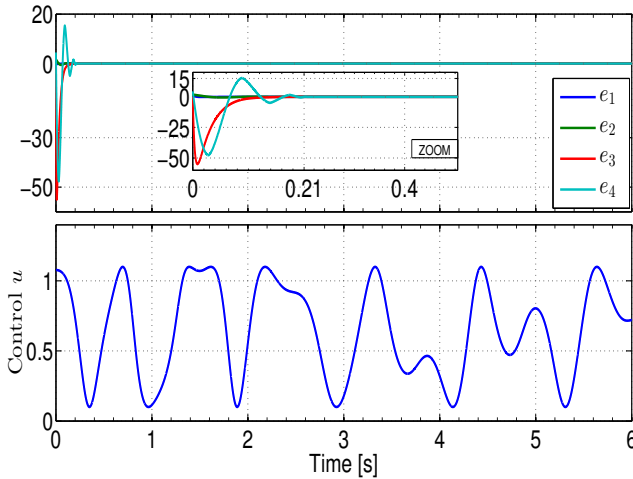


Figura 3. Errores de estimación y la entrada de control.

6. CONCLUSIONES

Se considero una clase de sistemas mecánicos de dos grados de libertad en presencia de: el término de Coriolis, fricciones seca y viscosa, incertidumbres y perturbaciones. Para esta clase de sistemas se propuso un observador global por modos deslizantes con convergencia teóricamente exacta y en tiempo finito, el cual no depende de la propiedad BIBS que pudiera no tener el sistema mecánico. La ganancias de este observador son obtenidas a partir de desigualdades matriciales factibles (9).

REFERENCIAS

Apaza-Pérez, W.A., Fridman, L., and Moreno, J. (2017). Higher order sliding-mode observers with scaled dissi-

- pative stabilisers. *International Journal of Control*. doi: doi.org/10.1080/00207179.2016.1269951.
- Apaza-Pérez, W.A., Moreno, J., and Fridman, L. (2016). Global sliding-mode observers for a class of mechanical systems with disturbances. In *IFAC-PapersOnLine, NOLCOS-2016*, volume 49, 440 – 445. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.205.
- Astolfi, A., Ortega, R., and Venkatraman, A. (2010). A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints. *Automatica*, 46(1), 182–189.
- Barbot, J., Boukhobza, T., and Djemai, M. (2003). Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*, 5, 513–527.
- Barbot, J. and Floquet, T. (2010). Iterative higher order sliding mode observer for nonlinear systems with unknown inputs. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, 17, 1019–1033.
- Bejarano, F., Pisano, A., and Usai, E. (2011). Finite-time converging jump observer for switched linear systems with unknown inputs. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2, 174–188.
- Besançon, G. (2000). Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems. *Automatica*, 36, 1915–1921.
- Davila, J., Fridman, L., and Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Trans. on*, 50, 1785–1789.
- Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Edwards, C., Spurgeon, S.K., and Tan, C.P. (2002). On the development and application of sliding mode observer. In X. Yu and J.X. Xu (eds.), *Variable structure Systems: Towards the 21st Century*, volume 274, 253–282. Springer-Verlag, London, LNCIS edition.
- Efimov, D., Zolghadri, A., Cieslak, J., and Henry, D. (2012). Input estimation via sliding-mode differentiation for early ofc detection. *8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 2, 1143–1148.
- Fridman, L., Shtessel, Y., Edwards, C., and Yan, X. (2008). Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, 399–412.
- Gauthier, J., Hammouri, J., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE Trans. Aut. Cont*, 37, 879–880.
- Hautus, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50, 353–368.
- INTECO (2008). Pendulum-cart system user’s manual.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34, 379–384.
- Mabrouk, M., Mazenc, F., and Vivalda, J.C. (2004). On global observers for some mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(21), 675 – 680. 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control, Oaxaca, Mexico, December 8-10, 2004.
- Moreno, J. (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algo-

- rithm. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 6th Int. Conf. on*, 1–6.
- Pisano, A. and Usai, E. (2011). Sliding mode control: A survey with applications in math. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81, 954–979.
- Rocha-Cózatl, E. and Moreno, J. (2004). Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 615–602.
- Rocha-Cózatl, E. and Moreno, J. (2011). Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21, 1623–1644.
- Spurgeon, S. (2008). Sliding mode observers: a survey. *Int. Journal of Systems Science*, 39 (8), 751–764.
- Xian, B., de Queiroz, M., Dawson, D., and McIntyre, M. (2004). A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems. *Automatica*, 695–700.

Apéndice A. PRUEBAS DE LOS RESULTADOS

A.1 Sistema transformado (7)

Para obtener el sistema transformado (7), considere el difeomorfismo dado en (6) como

$$T(x, z) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x, z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \int_0^{x_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}} ds \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$T_2(x, z) = \begin{bmatrix} m_{11}z_1 + m_{12}(x_2)z_2 \\ \alpha(x_2)z_2 \end{bmatrix}.$$

El siguiente sistema (A.2) se obtiene a partir de la derivada respecto al tiempo en (6) junto al sistema (5)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} z = \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} \Upsilon_{\theta_2} w, \\ \dot{w} &= \left[\frac{\partial T_2(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) C(x, z) \right] z + \\ &\quad + \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) [v - Hz - \psi + \delta], \\ &= \left[\frac{\partial T_2(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) C(x, z) \right] \Upsilon_{\theta_2} z + \\ &\quad + \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) [v - H\Upsilon_{\theta_2} z - \psi + \delta], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{con } \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ y } \Upsilon_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} - \frac{m_{12}(\theta_2)}{m_{11}\alpha(\theta_2)} \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix}.$$

Note que $M^{-1}(x_2) = \frac{1}{\det(M(x_2))} \begin{bmatrix} m_{22}(x_2) & -m_{12}(x_2) \\ -m_{12}(x_2) & m_{11}(x_2) \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{m_{12}(x_2)}{m_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & m'_{12}(x_2)z_2 \\ 0 & \alpha'(x_2)z_2 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}(x_2) \\ 0 & \alpha(x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{12}(x_2)\alpha(x_2)}{\det(M(x_2))} & \frac{m_{11}\alpha(x_2)}{\det(M(x_2))} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{12}(x_2)}{m_{11}\alpha(x_2)} & \frac{m_{11}}{m_{11}\alpha(x_2)} \end{bmatrix}, \text{ donde } \alpha(x_2) = \sqrt{\frac{\det(M(x_2))}{m_{11}}} \text{ y} \\ &\text{su derivada con respecto a } x_2 \text{ es dado por} \\ \alpha'_2(x_2) &= \frac{m_{11}m'_{22}(x_2) - 2m_{12}(x_2)m'_{12}(x_2)}{2\alpha(x_2)m_{11}}. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\frac{\partial T_2(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) C(x, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a partir de la derivada (A.3). Finalmente usando (A.2) se consigue

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \left(\frac{\partial T_1(x)}{\partial x} \Upsilon_{\theta_2} w \right)_{11} = \frac{w_1}{m_{11}}, \\ \dot{w}_1 &= v_1 - (H\Upsilon_{\theta_2} w)_{11} - \psi_1 + \delta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \left(\frac{\partial T_1(x)}{\partial x} \Upsilon_{\theta_2} w \right)_{21} = \frac{w_2}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{w}_2 &= \left(\frac{\partial T_2(x, z)}{\partial z} M^{-1}(x_2) [v - H\Upsilon_{\theta_2} z - \psi + \delta] \right)_{21} \\ &= \frac{m_{11}[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{21}w_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{22}w_2]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad - \frac{m_{12}(\theta_2)[-(H\Upsilon_{\theta_2})_{11}w_1 - (H\Upsilon_{\theta_2})_{12}w_2]}{m_{11}\alpha(\theta_2)} + \\ &\quad + \frac{m_{11}(-\psi_2(x, \Upsilon_{\theta_2} w)) - m_{12}(\theta_2)(-\psi_1(x, \Upsilon_{\theta_2} w))}{m_{11}\alpha(\theta_2)} \\ &\quad + \frac{m_{11}v_2 - m_{12}(\theta_2)v_1 + m_{11}\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}\alpha(\theta_2)}. \end{aligned}$$

A.2 Prueba del Lema 1

La factibilidad de las desigualdades matriciales (9) es probada de la siguiente manera:

i) Fijamos los parámetros $k_{oi}, l_{oi} > 0$, para $i = 1, 2$, con lo que se asegura que A_i y B_i son matrices Hurwitz. ii) Hallando P_1, P_2 a partir de las desigualdades de Lyapunov $\Pi_{P_1} < 0$, $\Pi_{P_2} < 0$ y (9a), donde $\ell = 1$. iii) Por el complemento de Shur la desigualdad (9b) es equivalente a

$$- \begin{bmatrix} \gamma_1 \mu_{m2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \mu_{m2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \mu_{m1}^4 \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \mu_{m1}^4 \ell^2 \end{bmatrix} - F^T \begin{bmatrix} \Pi_{P_1}^{-1} & 0 \\ 0 & \Pi_{P_2}^{-1} \end{bmatrix} F < 0,$$

donde $F = \begin{bmatrix} P_1 B & 0 & P_1 B & 0 \\ 0 & P_2 B & 0 & P_2 B \end{bmatrix}$. iv) Creciendo los parámetros μ_{m1}, μ_{m2} lo suficiente, se asegura la factibilidad de la desigualdad (9b). $\square$