

Análisis por teoría de nudos de trayectorias tridimensionales generadas por el extremo final de un robot

D. E. Rivas-Cisneros *

* Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza,
Nuevo León, México, (e-mail: daniel.rivascs@uanl.edu.mx).

Resumen

Desde el punto de vista topológico, las trayectorias en R^3 de un sistema dinámico se pueden analizar y clasificar mediante nudos matemáticos. El presente trabajo analiza las propiedades topológicas de la trayectoria tridimensional que genera la cinemática directa de un robot RRR y de un robot *hop twining*. Calculando el invariante topológico de la trayectoria en R^3 mediante teoría de nudos se encuentra el comportamiento topológico del movimiento del extremo final de un robot RRR y de un robot *hop twining*. El objetivo de los resultados del presente trabajo va encaminado al diseño de robots mediante teoría de nudos.

Keywords:

Teoría de nudos, Invariante topológico, Nudo topológico, Sistemas dinámicos

1. INTRODUCCIÓN

El análisis topológico de trayectorias tridimensionales mediante teoría de nudos es relativamente nuevo, a finales de los años 60 fue cuando se introduce la teoría de nudos al análisis de sistemas dinámicos y en 1976 fue cuando R.F. Williams proporciona los conceptos de teoría de nudos para analizar la complejidad topológica de las trayectorias del atractor de Lorenz [Ghrist (2011)]. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, la teoría de nudos es la rama de la topología que se encarga de estudiar trayectorias tridimensionales anudadas. Esta teoría pretende diferenciar un sistema anudado de otro, esto quiere decir que esta herramienta hace posible saber si dos trayectorias en R^3 tienen la misma estructura topológica. Uno de los pioneros del análisis topológico en robótica ha sido R. Ghrist, en [Ghrist (2010)] trabaja con teoría de trenzas (la cual nace a partir de la teoría de nudos) para el estudio de movimientos de robots. En [Ghrist (2002), Abrams (2002), Katsev (2011), Ghrist (2001), Bhattachayra (2013)] R. Ghrist y colaboradores trabajan con otros métodos topológicos para el estudio de robots.

Usualmente los robots son clasificados por su geometría de diseño [Reyes (2011)], por ejemplo: cilíndrico (RPP), esférico (RRP), cartesiano (PPP) y articulado (RRR). Actualmente hay robots que hacen tareas específicas donde tienen que hacer movimientos de gran complejidad. Hay robots que hacen cirugías médicas donde realizan nudos para suturar [Kang (2002), Ohnishi (2005), Mayer (2006), Yue (2007), Chow (2013), Watanabe (2014), Gao (2014), Lu (2016), Osa (2017)]. También hay robots donde su tarea es hacer nudos para un proceso específico [Wakamatsu (2004), Takamatsu (2006), He (2013), Kudoh (2015), Wang (2016)].

En los casos mencionados anteriormente, el trabajo final del robot es realizar trayectorias anudadas, por lo tanto, desde el diseño se puede analizar el tipo de trayectoria topológica que puede realizar el robot y así clasificar topológicamente al robot por sus trayectorias tridimensionales que puede generar, o en su defecto diseñar al robot de acuerdo a la trayectoria anuda que se pretenda realizar. El presente trabajo analiza algunas trayectorias tridimensionales del extremo final de un robot RRR y de un robot *hop twining*. El resultado principal de este trabajo es que, dependiendo de los ángulos de las articulaciones del robot, se pueden generar diferentes trayectorias anudadas y el movimiento final del extremo del robot ser clasificado topológicamente de acuerdo a sus trayectorias tridimensionales generadas.

El artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se da una introducción a la teoría de nudos. En la sección 3, se muestra la cinemática directa de los robots RRR y *hop twining*. En la sección 4, se analiza la topología de las trayectorias tridimensionales generadas por la cinemática directa de los robots. Por último, se dan las conclusiones en la sección 5.

2. RESEÑA DE TEORÍA DE NUDOS

2.1 Conceptos fundamentales

La teoría de nudos es la rama de la topología que estudia, entre otras cosas, trayectorias cerradas en R^3 . Un nudo $< K >$ es un embebimiento $f : S^1 \rightarrow R^3$ que no presenta intersecciones en su trayectoria cerrada [Cromwell (2004), Adams (1994)]. Por definición los nudos viven en R^3 , sin embargo para analizar los nudos y realizar operaciones en ellos se utilizan ingenios en R^2 . A esta imagen del nudo en R^2 se le llama *proyección del nudo* [Cromwell (2004), Adams (1994)], esta proyección se representa como:

$$K : R^3 \longrightarrow R^2,$$

$$K(x, y, z) = K(x, y, 0).$$

En la figura 1(a) se representa un nudo en R^3 y en la figura 1(b) la proyección del nudo.

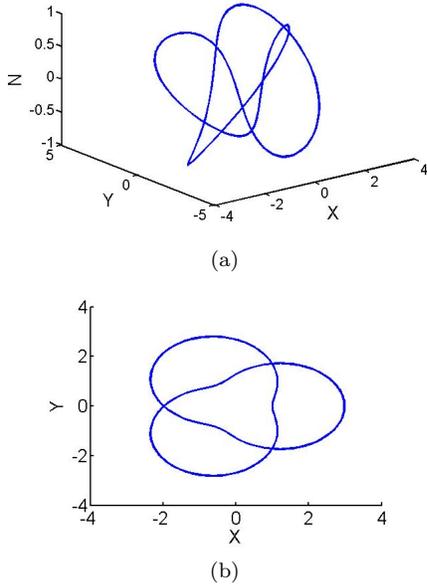


Figura 1. Representación de un nudo trébol. a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

El número de cruces (nc) de un nudo es el mínimo número de cruces que ocurre en todas las posibles proyecciones de un nudo [Cromwell (2004), Adams (1994)]. La proyección de un nudo consiste de vértices $V(K)$ y aristas $E(K)$ [Kauffman (1991)]. En la figura 2 se presenta la proyección del nudo trébol con sus aristas $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y vértices $V(G) = \{1, 2, 3\}$. Cada vértice de la figura 2 se le conoce como un punto de cruce en la proyección del nudo en R^2 . Sea el vértice 1 un punto de cruce en R^2 , el cual en la proyección se intersecan pero no se intersecan en R^3 , ya que en R^3 se tiene los puntos de cruce 1 y $\hat{1}$ los cuales tienen las mismas coordenadas en x y y pero la coordenada en z es diferente; con esta información se sabe que no existe ninguna intersección en R^3 y si es un punto de cruce por arriba o por abajo [Adams (1994)].

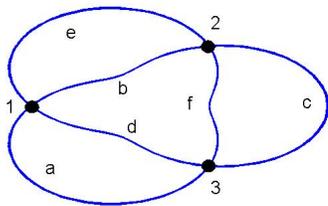


Figura 2. Proyección del nudo trébol con aristas $E(K) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y vértices $V(K) = \{1, 2, 3\}$. El nudo trébol posee 3 puntos de cruce.

Los nudos se catalogan de acuerdo al mínimo número de cruces que tienen en su proyección, el catálogo de nudos esta acomodado por el número de cruces que tiene el

nudo y un subíndice que diferencia a los nudos con el mismo número de cruces [Adams (1994)]. En la figura 3 se muestran los nudos 3_1 (nudo trébol), 4_1 , 5_1 y 7_1 .

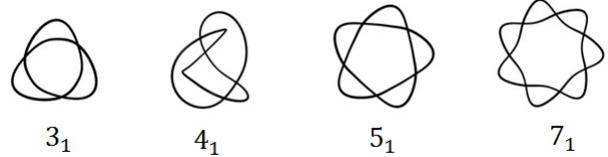


Figura 3. Nudos hasta con 7 puntos de cruce.

2.2 Movimientos de Reidemeister

Los movimientos de Reidemeister ayudan a saber si existe una equivalencia topológica entre dos proyecciones de nudos diferentes. Dos nudos son equivalentes si hay una secuencia finita de movimientos de Reidemeister que nos lleven de una proyección de un nudo a una proyección del otro nudo [Cromwell (2004), Adams (1994)]. Los movimientos de Reidemeister son tres y se conocen como movimiento tipo I (agregar o remover un rizo), tipo II (agregar o remover dos cruces consecutivos por arriba o por abajo) y tipo III (movimiento triangular); en la figura 4 se muestran los tres movimientos de Reidemeister.

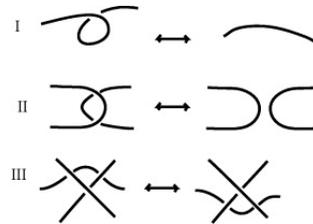


Figura 4. Movimientos de Reidemeister.

En la figura 5 se muestran dos proyecciones de nudos diferentes que son nudos equivalentes entre sí, ya que mediante movimientos de Reidemeister se puede pasar de una proyección a otra.

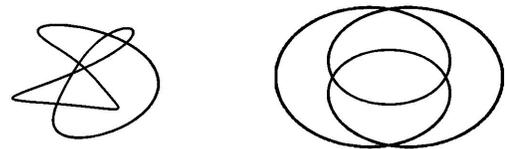


Figura 5. Nudos equivalentes por movimientos de Reidemeister.

2.3 Invariantes polinomiales

Los movimientos de Reidemeister indica los pasos a seguir para saber si dos nudos son equivalentes, pero no determina cuantos movimientos son necesarios para realizarlo. Un avance significativo en esta dirección fue la introducción en 1928 del primer invariante polinomial, el cual fue

Cuadro 1. Polinomio de HOMFLY del nudo 0_1 , 3_1 , 4_1 , 5_1 y 5_2 .

Nudo	Polinomio de HOMFLY
0_1 (nudo trivial)	1
3_1	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$
4_1	$-l^{-2} - 1 - l^2 + m^2$
5_1	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$
5_2	$l^{-6} + l^{-4} - l^{-2} - m^2l^{-4} + m^2l^{-2}$

el polinomio de Alexander. El *polinomio de un nudo* es un invariante que es el mismo para nudos equivalentes [Cromwell (2004), Adams (1994)]. Uno de los problemas fundamentales en teoría de nudos es saber si dos nudos que se visualizan diferentes son equivalentes. Basado en este problema, J.W. Alexander introdujo el primer invariante polinomial de nudos; desde la introducción del primer invariante polinomial una variedad de nuevos invariantes han sido desarrollados, tales como: el polinomio de Jones, el corchete de Kauffman, HOMFLY, entre otros [Cromwell (2004), Adams (1994)]. Dentro de estos polinomios, el de HOMFLY es uno de los ms usados ya que hace posible distinguir si dos nudos son equivalentes o no comparando el polinomio asociado.

A continuación se expone de manera somera el polinomio de HOMFLY, ya que se utilizará posteriormente. El polinomio de HOMFLY de un nudo K , denotado por $P(K)$, es un polinomio de dos variables. Este polinomio se define por la siguiente relación de madeja [Cromwell (2004), Adams (1994)]:

- $P(\bigcirc) = 1 \rightarrow$ donde \bigcirc representa el diagrama del nudo.
- $lP(L_+) - l^{-1}P(L_-) = mP(L_o)$, donde L_+ (cruce por arriba), L_- (cruce por abajo) y L_o (sin cruce) es igual a la relación de madeja que se muestra en la figura 6.

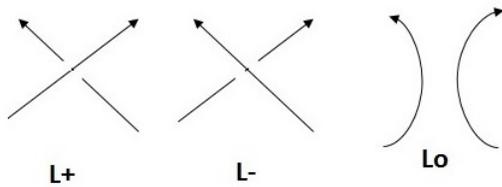


Figura 6. Relación de madeja.

A partir de la proyección de un nudo, el polinomio de HOMFLY se calcula deshaciendo los cruces del nudo con la ayuda de los movimientos de Reidemeister y siguiendo la relación de madeja. En el cuadro 1 se muestra el polinomio de HOMFLY de algunos nudos, los cuales se obtuvieron usando el programa KnotPlot ¹ [Scharein (1991)]. .

¹ Programa creado por Robert G. Scharein para visualizar y crear nudos en 3 dimensiones; y calcular varios tipos de polinomios, entre ellos el de HOMFLY.

2.4 Nudos y sistemas dinámicos

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, un nudo se puede definir como una curva cerrada simple generada por una trayectoria tridimensional. Los nudos pueden ser generados por una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, por el conjunto de tres ecuaciones que representen a un sistema o por el conjunto de tres series de tiempo de un sistema [Ghrist (2011)]. Topológicamente, los nudos generados se pueden representar como una solución global de la trayectoria [Ghrist (2011)]. De acuerdo a la simplicidad o complejidad de la trayectoria tridimensional, R. Ghrist categoriza dos tipos de nudos [Ghrist (1998)]: nudos simples y nudos complicados. A esto también se le puede añadir, que mientras más complicada sea la trayectoria más complicado será identificar los nudos que se generan.

A continuación se presenta el sistema dinámico de Parris y Rassai el cual genera al nudo 3_1 (nudo trébol), el sistema se representa por las siguientes ecuaciones [Díaz (2007)]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -mx_2 + nx_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= mx_1 + nx_2x_3, \\ \dot{x}_3 &= (n/2)(1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned} \quad (1)$$

donde las condiciones iniciales son: $x_1(0) = -2.5, x_2(0) = 2.5, x_3(0) = 0.78$ y los parámetros del sistema son: $m = 2$ y $n = 3$. En la figura 7(a) se muestra la trayectoria tridimensional generada por las soluciones del sistema (1) y en la figura 7(b) se muestra la proyección bidimensional, la cual muestra el nudo 3_1 .

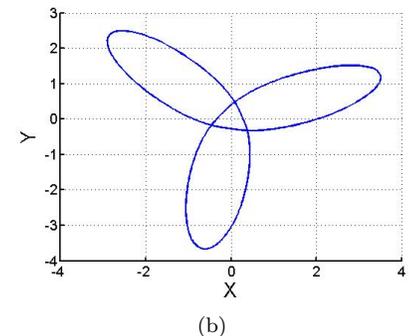
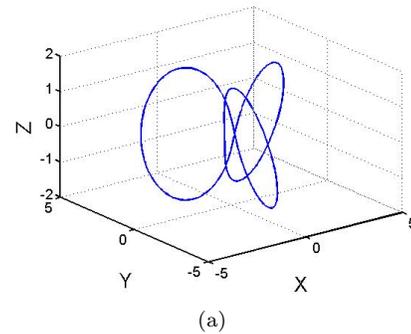


Figura 7. Estructura topológica del nudo 3_1 generado por la solución del sistema (1). a) Trayectoria en R^3 . b) Proyección de la trayectoria en R^2 .

3. CINEMÁTICA DIRECTA DE UN ROBOT RRR Y HOP TWINING

La cinemática estudia la geometría del movimiento de un sistema mecánico, sin considerar las fuerzas que lo producen [Reyes (2011)]. El análisis de la cinemática en robótica ayuda a comprender y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot. La *cinemática directa* es el estudio analítico del movimiento del robot que relaciona las coordenadas articulares $q \in R^n$, donde n representa el número de grados de libertad, con las coordenadas cartesianas $[x, y, z] \in R^3$ así como la orientación del extremo final del robot [Reyes (2011)]. La cinemática directa ayuda a conocer el comportamiento de la trayectoria del extremo final del robot. El *extremo final* es la parte del robot que se utiliza para realizar un trabajo específico [Reyes (2011)].

La cinemática directa de un robot RRR está dada por el conjunto de ecuaciones [Reyes (2011)]:

$$\begin{aligned} x &= \cos(q_1)(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)), \\ y &= \sin(q_1)(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)), \\ z &= l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3). \end{aligned} \quad (2)$$

donde q_1, q_2 y q_3 son las coordenadas articulares, las cuales son representadas como ángulos; y l_1, l_2 y l_3 la longitud de cada articulación.

La cinemática directa de un robot *hop twining* es dada por el conjunto de ecuaciones [He (2013)]:

$$\begin{aligned} x &= R \cos(q_1) \cos(q_2) - \frac{A}{2} \cos(q_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} A \sin(q_1), \\ y &= R \sin(q_1) \cos(q_2) - \frac{A}{2} \sin(q_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} A \cos(q_1), \\ z &= R \sin(q_2) B. \end{aligned} \quad (3)$$

donde q_1, q_2 y q_3 son las coordenadas articulares, las cuales son representadas como ángulos; y A, B y C medidas del robot.

4. RESULTADOS

4.1 Robot RRR

Utilizando el conjunto de ecuaciones (2) y variando los ángulos se simula la trayectoria del extremo final de un robot RRR, donde $l_1 = 1, l_2 = 2$ y $l_3 = 3$. A continuación se presentan los resultados de algunas trayectorias obtenidas al variar los ángulos, el invariante polinomial de la trayectoria se calcula con el programa Knotplot.

caso 1

Para los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 2\pi t$ y $q_3 = 4\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 8. El invariante polinomial encontrado es 1, el cual pertenece al nudo 0_1 también conocido como el nudo trivial. De acuerdo a su invariante, la trayectoria generada es equivalente al círculo.

caso 2

Para los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 4\pi t$ y $q_3 = 4\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 9. El invariante polinomial encontrado es $-l^{-2} - 1 - l^2 + m^2$, el cual pertenece al nudo 4_1 . Esto quiere decir que la trayectoria generada es equivalente al nudo matemático 4_1 .

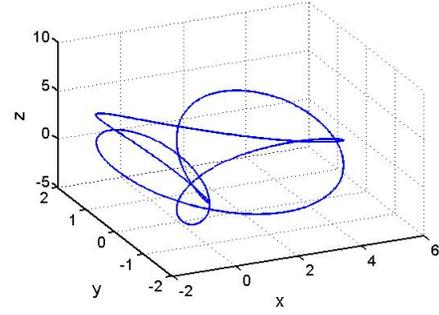


Figura 8. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (2) con los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 2\pi t$ y $q_3 = 4\pi t$.

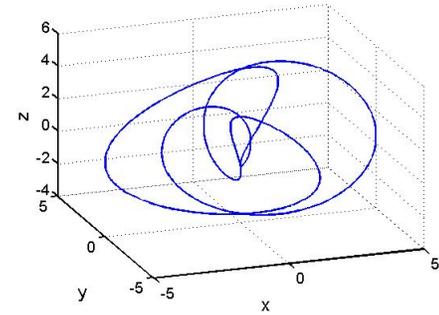


Figura 9. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (2) con los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 4\pi t$ y $q_3 = 4\pi t$.

caso 3

Para los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 4\pi t$ y $q_3 = 6\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 10. El invariante polinomial encontrado es $-l^{-6} - l^{-4} + l^{-2} + 2 + m^2 l^{-4} - m^2 l^{-2}$, el cual pertenece al nudo 9_{46} . Esto significa que la trayectoria generada es equivalente al nudo matemático 9_{46} .

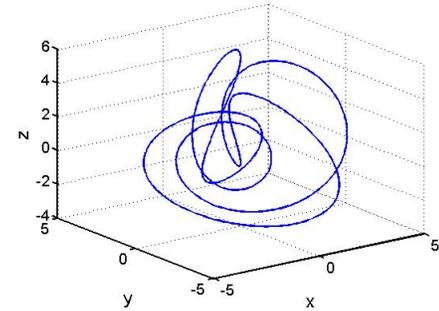


Figura 10. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (2) con los ángulos $q_1 = 2\pi t, q_2 = 4\pi t$ y $q_3 = 6\pi t$.

4.2 Robot hop twining

Utilizando el conjunto de ecuaciones (3) y variando los ángulos se simula la trayectoria del extremo final de un robot, donde $A = 10, B = 19$ y $R = 9$. A continuación se presentan los resultados de algunas trayectorias obtenidas al variar los ángulos.

caso 1

Para los ángulos $q_1 = 20\pi t$ y $q_2 = 30\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 11. El invariante polinomial encontrado es $-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$, el cual pertenece al nudo 3_1 . Por lo que la trayectoria generada es equivalente al nudo matemático 3_1 .

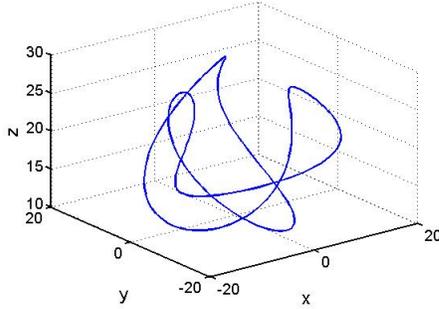


Figura 11. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (3) con los ángulos $q_1 = 20\pi t$ y $q_2 = 30\pi t$.

caso 2

Para los ángulos $q_1 = 30\pi t$ y $q_2 = 20\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 12. El invariante polinomial encontrado es $-l^{-2} - 1 - l^2 + m^2$, el cual pertenece al nudo 4_1 . El resultado es el mismo que el caso 2 del robot RRR, como se puede observar las trayectorias se visualizan distintas pero son topológicamente equivalentes ya que tienen el mismo invariante polinomial. Esto significa que, aunque las trayectorias sean diferentes, las propiedades topológicas son las mismas.

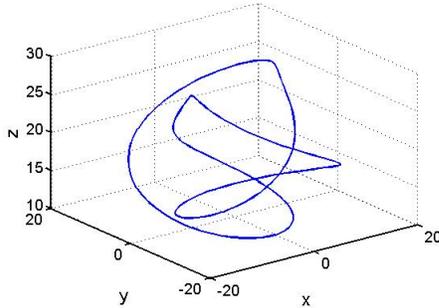


Figura 12. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (3) con los ángulos $q_1 = 30\pi t$ y $q_2 = 20\pi t$.

caso 3

Para los ángulos $q_1 = 50\pi t$ y $q_2 = 20\pi t$ se genera la trayectoria que se muestra en la figura 13. El invariante polinomial encontrado es $2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$, el cual pertenece al nudo matemático 5_1 . Por lo que la trayectoria generada es equivalente al nudo matemático 5_1 .

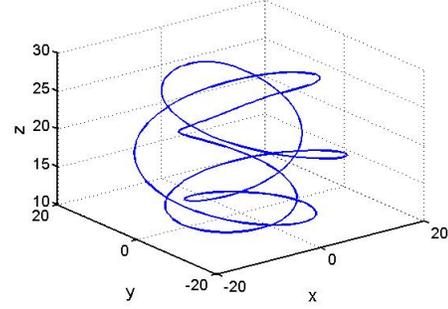


Figura 13. Trayectoria en R^3 generada por el sistema (3) con los ángulos $q_1 = 50\pi t$ y $q_2 = 20\pi t$.

anudadas las cuales fueron generadas al variar los ángulos del modelo cinemático de los robots. Estas trayectorias simuladas se clasificaron de acuerdo al nudo generado por el movimiento del extremo final del robot. Con estos resultados previos, es posible catalogar topológicamente a los robots analizados de acuerdo a las trayectorias anudadas que generan, o entender el comportamiento topológico del movimiento tridimensional del extremo final del robot.

Como trabajo a futuro queda realizar un análisis riguroso mediante teoría de nudos para el diseño de robots y así tener una clasificación topológica a través del comportamiento del movimiento del extremo final del robot.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Dr. Hugo Cabrera Ibarra del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por sus valiosos comentarios realizados a este trabajo.

REFERENCIAS

- R. Ghrist, P.J. Holmes and M.C. Sullivan, Knots and Links in the Three-Dimensional Flows, (*Springer, 2011*).
- R. Ghrist, Configuration spaces, braids, and robotics *Lecture Note Series, Inst. Math. Sci., NUS*, **40(5)**(2002) 1556.
- R. Ghrist and D.E. Koditschek, Safe cooperative robot dynamics on graphs *SIAM J. Cont. & Opt*, **19**(2002) 263.
- A. Abrams and R. Ghrist, Finding topology in a factory: configuration space *Amer. Math. Monthly*, **109**(2002) 140.
- M. Katsev, A. Yershova, B. Tovar, R. Ghrist, and S. LaValle, Mapping and Pursuit-Evasion Strategies For a Simple Wall-Following Robot *IEEE Transactions on Robotics*, **27(1)**(2011) 128.
- R. Ghrist, Configuration spaces of graphs and robotics *Braids, Links, and Mapping Class Groups: the Proceedings of Joan Birman's 70th Birthday*, **24**(2001) 29.
- S. Bhattachayra, R. Ghrist, and V. Kumar, Multi-robot Coverage and Exploration on Riemannian Manifolds with Boundary, *Intl. J. Robotics. Res.*, **33(1)**(2013) 113.
- F. Reyes Cortes, Robótica: Control de Robots Manipuladores, 1st ed. (*Alfaomega, 2011*)
- H. Kang and J.T. Wen, Robotic Knot Tying in Minimally Invasive Surgeries, *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ*,

5. CONCLUSIONES

A partir de la simulación de la cinemática directa de los robots presentados en el trabajo, se encontraron trayectorias

- Intl. Conference on intelligent Robots and Systems*, (2002) 1421.
- K. Ohnishi, H. Miyagawa and R. Kitamura, Development of a Robotic Digit Joint Mechanism for Knot Tying Task, *IEEE International Workshop on Robots and Human Interactive Communication*, (2005) 253.
- H. Mayer, F. Gomez, D. Wierstra, I. Nagy, A. Knoll and J. Schmidhuber, A System for Robotic Heart Surgery that Learns to Tie Knots Using Recurrent Neural Networks, *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ, International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (2006) 543
- L. Yue, Y. Cao, S. Wang and H. Wang, Twisting Knot Tying Method of Suture A Novel Method for Robotic Knot Tying, *IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering*, (2007) 87.
- Der-Lin Chow, W. Newman, Improved Knot-Tying Methods for Autonomous Robot Surgery, *IEEE International Conference on Automation Science*, (2013) 461.
- G. Watanabe, Robotic Surgery, *Springer*, 2014 .
- C. Gao, Robotic Cardiac Surgery, *Springer*, 2014.
- B. Lu, H. K. Chu and L. Cheng, Dynamic Trajectory Planning for Robotic Knot Tying, *Proceedings of The 2016 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics*, (2016).
- T. Osa, N. Sugita and M. Mitsuishi, Online Trajectory Planning and Force Control for Automation of Surgical Tasks, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, (2017).
- H. Wakamatsu, A. Tsumaya, E. Arai and S. Hirai Planning of One-Handed Knotting/Raveling Manipulation of Linear Objects, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (2004) 1719.
- J. Takamatsu, T. Morita, K. Ogawara, H. Kimura and K. Ikeuchi, Representation for Knot-Tying Tasks, *IEEE Transactions on Robotics*,, **22**(2006) 1552.
- L. He, Q. Zhang and H.J. Charvet, A knot-tying end-effector for robotic hop twining, *Biosystems Engineering*, **114**(2013) 344.
- S. Kudoh, T. Gomi, R. Katano, T. Tomizawa and T. Suehiro, In-air Knotting of Rope by a Dual-arm Multi-inger Robot, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, (2015).
- W. Wang and D. Balkcom, Tying knot precisely, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, (2016).
- P.R. Cromwell, Knots and Links, 1st ed. *Cambridge University Press*, 2004
- C.C. Adams, The Knot Book, *W.H Freeman and Company*, 1994 .
- L.H. Kauffman, Knots and physics, *Series on Knots and Everything-Vol.1.*, 1991 .
- R.G. Scharein, Knotplot, <http://www.knotplot.com/>.
- R. Ghrist, *Chaos, Solitons & Fractals* **9**(1998) 583.
- D.A. Díaz, Knotted Dynamical Systems, *PhD thesis, The University of Sheffield*, 2007 .