

Modelo matemático para el vuelo de un ornitóptero

D. Treviño-Sánchez * J.F. Guerrero-Castellanos *
V.R. González-Díaz *

* *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias
de la Electrónica, 18 Sur y Avenida San Claudio, Ciudad
Universitaria, Puebla, Pue. México, CP 7200 (e-mail:
daniel.trevino@alumno.buap.mx).*

Abstract: Este trabajo presenta el modelo matemático de un ornitóptero y las fuerzas que actúan en él para lograr el vuelo, especialmente se menciona el impacto del movimiento de la cola, la cual tiene dos grados de libertad para la generación de los torques que permitirán el control de postura y rumbo del vehículo.

Keywords: Drones, Micro vehículo aéreo no tripulados, Ornitóptero, Vehículo aéreo autónomo, Robot aéreo, UAV.

1. INTRODUCCIÓN

En las décadas de los ochentas y noventas el campo de la robótica móvil mostró un gran progreso y los esfuerzos se concentraron principalmente en la aplicación de robots móviles terrestres y en el desarrollo de los algoritmos necesarios para el control, estabilización y seguimiento de trayectorias (C.Canudas de Wit et al., 1997). Sin embargo, los vehículos terrestres presentan inherentes restricciones para el acceso a localizaciones deseadas, esto debido a las características del terreno y a la presencia de obstáculos imposibles de evitar. En estos casos los vehículos aéreos no tripulados representan una solución natural para aproximarse al punto deseado, recopilar información e incluso llevar a cabo una acción. A excepción del ámbito aeronáutico, se suele utilizar el término “Robot Aéreo” entendiéndolo como tal a un sistema físico capaz de desplazarse de manera autónoma o semiautónoma por el aire para realizar diferentes misiones. En este documento, se utilizará el término “ornitóptero” (con alas de pájaro, por las raíces etimológicas de la palabra), “robot aéreo” o “vehículo aéreo autónomo” de manera indistinta.

La utilización de vehículos aéreos no tripulados no es una novedad histórica. Desde los papalotes, los globos aerostáticos, las bombas aéreas usadas en varios conflictos bélicos, hasta las aeronaves automatizadas, han sido el producto de años de innovaciones y esfuerzos tecnológicos. Sin embargo, en la última década, con los Vehículos Aéreos Autónomos UAV (Unmanned Aerial Vehicle, por sus siglas en inglés), un nuevo capítulo se abre en las áreas de aeronáutica, robótica, teoría de control e ingeniería de control. Ya no son solamente máquinas controladas a distancia, sino verdaderos sistemas autónomos capaces de evolucionar en un medio ambiente y adaptarse a él. La evolución de los UAV también llamados “Drones” (Falso abejorro, por el zumbido que producen) es una evolución

lógica, resultado del progreso tecnológico de los microprocesadores, la construcción de sensores, los actuadores y los dispositivos de almacenamiento de energía.

La evolución lógica de estos dispositivos inevitablemente la lleva a diseños naturales inspirados en aves e insectos. Aunque estos desarrollos se ha intensificado debido al interés en aplicaciones militares, las aplicaciones civiles como la vigilancia o la ayuda inmediata durante una emergencia han motivado su investigación en universidades y en centros de investigación gubernamentales de todo el mundo (J.F.Guerrero-Castellanos, 2008).

El desarrollo de la robótica aérea envuelve muchos problemas que van desde los estrictamente técnicos hasta los totalmente legales y que han permitido el desarrollo de diferentes líneas de investigación. Una de estas líneas en pleno desarrollo es el control y estabilización de UAVs. Las restricciones de peso, el poder de procesamiento de los sistemas digitales empotrados, la transmisión de información, el consumo de energía y la no linealidad de estos sistemas acoplado con la dificultad de identificación de parámetros, hacen de esta línea de investigación un verdadero desafío.

Trabajos basados en ornitópteros además de contribuir al desarrollo de la región, ayuda a posicionar a México y Latinoamérica en materia de robótica, control y sistemas aéreos. Si se observa la clasificación de artículos científicos del Banco Mundial de 2013 (BancoMundial, 2017), México ocupa el lugar 25 en el mundo y en segundo en América Latina. Aunque ha habido diversas contribuciones mexicanas en el área de dispositivos aéreos, de acuerdo con el congreso superior de investigaciones científicas (CSIC) de la Universidad de Granada en España (SCIImago, 2017),

durante el 2016 estos solo representan el 0.5% a nivel mundial y el 25% en Latinoamérica, en cuanto al control y la optimización, México produjo un número similar en Latinoamérica que fue 22.6%.

En México existen muy pocos artículos publicados de ornitópteros. En uno de ellos, se realizó el análisis cinemático, diseño y construcción de un entomóptero (J.I.Colorado et al., 2013) tomando como fuente de inspiración a la mariposa, aunque la parte del vuelo aún sigue en desarrollo. Recientemente se publicó otro trabajo donde la inspiración es el vuelo de un ave. En él se emplearon dos ángulos de acción en la cola, se desarrolló un control por backstepping para la postura y la altura, y se implementó en un prototipo comercial (J.Zenteno et al., 2016). Por otro lado, aunque sabemos de algunos desarrollos en Chile y Colombia (W.H.Gerber, 2012; A.Guerrero-Revelo, 2016), no existe a la fecha ninguna publicación al respecto.

Los ornitópteros se han estudiado por más tiempo en otros países, donde trabajos como (S.S.Baek et al., 2011), (S.S.Baek and R.S.Fearing, 2010), (C.J.Rose et al., 2017) y (C.J.Rose, 2015) han combinado por una parte el aleteo y por la otra los elementos de control de un avión como son los alerones y la propela para guiar la dirección del ornitóptero. Además existen propuestas como (K.S.Shigeoka, 2007) que desarrolló el modelo matemático de un ornitóptero usando solo un ángulo de acción en la cola, luego simplifica sus cálculos a una dimensión en el eje x y y respectivamente y con una ayuda de una constante proporcional evita el uso de términos no lineales como el seno o el coseno. A continuación usa estas ecuaciones para desarrollar un modelo matemático lineal e invariante en el tiempo del sistema. Finalmente diseña un control PI de velocidad y altura que valida al simularlo en Matlab [®] Simulink [®]. En otros trabajos como (Z.J.Jackowski, 2009), aunque también usan el prototipo comercial, deben emplear una minicomputadora abordo con un poder computacional y de consumo de energía importante. Además de un alto costo, se apoyan directamente de las cámaras y del poder computacional del Optitrack para realizar los cálculos y obtener parámetros como los coeficientes arrastre y elevación, la matriz de inercia, etc. Aunque desarrollan un sistema no lineal, se requiere una alta capacidad de procesamiento para implementarlo.

Es por esto que, el propósito de esta investigación es hacer un modelo matemático no lineal que utilice los dos grados de libertad de la cola de un modelo comercial, simulando su comportamiento en lazo abierto con la herramienta Matlab [®] Simulink [®] para validarlo. Al mantener un modelo no lineal lo suficientemente reducido se podrá usar una plataforma de bajo poder computacional y consumir indirectamente menor cantidad de energía.

Los objetivos específicos de esta propuesta son:

- Mostrar las fuerzas que intervienen en el cuerpo del ornitóptero.
- Mostrar las fuerzas y momentos que actúan sobre la cola del ornitóptero.
- Mostrar el comportamiento del modelo matemático del ornitóptero en lazo abierto.

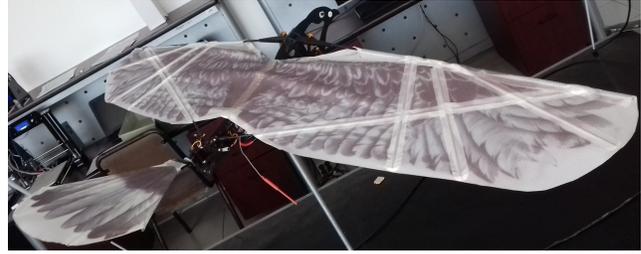


Fig. 1. El ornitóptero Spybird Eagle de HobbyKing

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma. Primero se muestra el panorama general del modelado matemático del vehículo. Posteriormente en la sección 2 se muestra el desarrollo, el cual está dividido en dos partes, las fuerzas y elementos relacionados con el cuerpo y sus alas, y las fuerzas y momentos que actúan en la cola del ornitóptero. En la sección 3 se describe el comportamiento obtenido en lazo abierto del robot aéreo. Finalmente en la sección 4 se mencionan las conclusiones y se sugieren algunos estudios futuros. (D.E.Alexander and S.Vogel, 2004; D.Campolo et al., 2009; R.Dudley, 2002).

1.1 Panorama general

Para la obtención del modelo matemático del ornitóptero, es necesario definir las fuerzas actuando tanto en el cuerpo como en la cola, definir los torques o momentos que pueden producirse al actuar la cola, así como las variables de control, específicamente los ángulos de la cola, entre otras posibles variables, dependiendo del diseño del ornitóptero. Como se puede ver en la Figura 1 el ornitóptero empleado fue el Spybird Eagle de HobbyKing, el cual utiliza la cola como superficie de control con dos grados de libertad. Dicha superficie es manipulada a través de dos ángulos perpendiculares δ_e que se refiere a la inclinación de la cola y a δ_r que se refiere al timón de la cola, y entre ambos dirigen al vehículo. Adicionalmente, se puede modular la velocidad del motor y por lo tanto la velocidad o frecuencia del aleteo para controlar la velocidad de desplazamiento. Nótese que en este modelo no es posible variar la amplitud del aleteo o tener un movimiento independiente de cada ala.

1.2 Definición de Cuaternión

Antes de iniciar con el modelo es necesario definir algunos recursos que se usarán como el cuaternión q , el cual se define como (M.D.Shuster, 1997)

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \hat{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} \in H \quad (1)$$

con $H = \{q \mid q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1, q = (q_0 \ \vec{q}^T)^T, q_0 \in \mathbb{R}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3\}$, donde $\vec{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$ es la parte vectorial y q_0 la parte escalar del cuaternión. En aplicaciones de control de orientación, el cuaternión unitario representa la rotación desde un sistema de coordenadas inercial $N(x_n, y_n, z_n)$, localizado en algún punto del espacio, al sistema de coordenadas $B(x_b, y_b, z_b)$ localizadas en el centro de masa del cuerpo rígido.

Denotando con $\vec{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ el vector de velocidad angular del marco de referencia en el cuerpo B relativo al marco inercial N , la ecuación cinemática está dada por

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \quad (2)$$

donde

$$\Xi(q) = \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_3 q_0 + [\vec{q}^\times] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La matriz de rotación $R(q) \in SO(3)$, representa la rotación del sistema de referencia B al N , correspondiente al cuaternión q se calcula por

$$R(q) = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I_3 + 2(\vec{q}\vec{q}^T - q_0[\vec{q}^\times]), \quad (4)$$

donde I_3 es la matriz identidad y $[\vec{q}^\times]$ es el tensor antisimétrico asociado con el vector axial \vec{q} dado por

$$[\vec{q}^\times] = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

El error de orientación mide la diferencia entre dos orientaciones. Si q define el cuaternión de orientación actual y q_d es el cuaternión de referencia o la orientación deseada, entonces el cuaternión de error que representa el error entre ambas está dada por:

$$q_e = q \otimes q_d^{-1} \quad (6)$$

donde \otimes denota la multiplicación entre cuaterniones y q^{-1} es la rotación complementaria del cuaternión q el cual es el cuaternión conjugado, i.e. $q^{-1} = (q_0 \vec{q}^T)^T$

Aunque una de las representaciones de la orientación más utilizadas en aeronáutica son los ángulos de Cardán (alabeo, cabeceo y guiñada: ϕ, θ, ψ), estos presentan singularidades que limitan su uso, por lo que los cuaterniones resultan una mejor opción, así la matriz de rotación en términos de cuaterniones que es la que lleva del marco de referencia B al N es la siguiente.

$$R_{nb}(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

A pesar de que la postura y rumbo de B con respecto a N se parametriza con cuaterniones debido a sus ventajas numéricas, para fines de visualización se usarán los ángulos de Euler ya que son más intuitivos.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL ORNITÓPTERO

Una representación esquemática de los vehículos aéreos se muestra en la Figura 2, aquí se pueden apreciar el marco de referencia inercial $N(x_n, y_n, z_n)$, el marco de referencia fijo al cuerpo $B(x_b, y_b, z_b)$, las fuerzas F_L y F_T en la dirección de z_b y x_b respectivamente, que realizarán la función de control de traslación y la cola los torques Γ_1, Γ_2 y Γ_3 alrededor de los ejes principales del cuerpo para hacer posible el control de orientación. Finalmente, el vector de peso $m\vec{g}$.

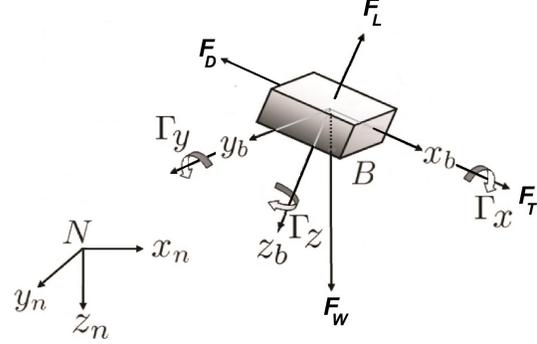


Fig. 2. Configuración esquemática de los sistemas de referencia inercial N y del cuerpo B , así como de las fuerzas (F) y los torques (Γ) que actúan en el vehículo aéreo.

La dinámica de movimiento de los sistemas UAV se obtienen por el formalismo Newton-Euler y la cinemática de la orientación utilizando el formalismo de cuaterniones. El modelo completo del sistema es dado por

$$\Sigma_T \begin{cases} \dot{\vec{p}} = \vec{v}, \\ m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - R_{nb}(q) \begin{pmatrix} F_T \\ 0 \\ F_L \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\Sigma_O \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega}, \\ \dot{\vec{\omega}} = J^{-1}(-\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{(1,2,3)}), \end{cases} \quad (9)$$

donde \vec{p} y \vec{v} son los vectores de posición y velocidad lineales, m es la masa del vehículo, \vec{g} la aceleración de caída libre, $R_{nb}(q)$ es la matriz de rotación, en términos de cuaterniones, que expresa al vector de fuerzas en el sistema de referencia inercial N y está dada en (7). La notación q y $\vec{\omega}$ representan al cuaternión y la velocidad angular respectivamente, J es la matriz de inercia del vehículo. F_L es la fuerza en la dirección z_b y F_T es la fuerza en x_b , en este caso forman el control de traslación. $\Gamma_{(1,2,3)}$ son los torques de control de orientación. Estos últimos, F_L y T_T representan las entradas de control del sistema.

2.1 Planteamiento del problema

(7) En esta primera fase del trabajo el problema consiste en elaborar el modelo matemático del sistema ornitóptero que incluya los dos tipos de movimiento que tiene la cola para controlar la dirección del vehículo y validarlo en “lazo abierto”.

2.2 Suma de fuerzas en el cuerpo

Inicialmente es necesario conocer las cuatro fuerzas fundamentales que afectan el vuelo de cualquier vehículo son: elevación, propulsión, arrastre y peso. En este modelo asumimos que todas las fuerzas actúan en el centro de gravedad del ornitóptero, así cuando estas están en equilibrio, el vehículo mantiene en un vuelo estacionario.

La ecuación (10) es conocida como la ecuación de Bernoulli modificada y está relacionada con el flujo y presión del aire, tanto para producirlo como para atravesarlo con

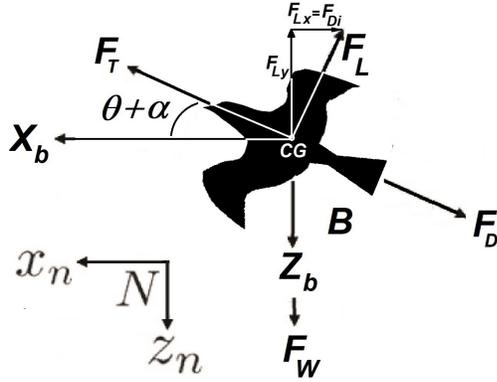


Fig. 3. Fuerza de ascenso y sus componentes, como la fuerza de arrastre por inducción, dependientes del ángulo de cabeceo (θ) y de ataque (α).

la superficie o cara de algún objeto. Esta ecuación se compone de la densidad del aire ρ , la velocidad del vehículo V , el área relativa a la acción del flujo y de un coeficiente determinado por la forma del objeto y por el ángulo de ataque α mostrado en la Figura 3. Dicha ecuación es aplicable a las fuerzas de arrastre (F_D), ascenso o elevación (F_L) y propulsión o impulso (F_T), donde solamente se modifican el área aplicable (S) y el coeficiente correspondiente (C).

$$F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C \quad (10)$$

La fuerza de arrastre está formada al menos por cuatro componentes o cuatro clases de arrastres. La fuerza F_{Df} es la fricción producto del roce de la superficie del vehículo, principalmente de las alas y cola. La fuerza de arrastre por presión F_{Dp} , que se debe al choque que produce un objeto al atravesar un fluido. La fuerza de arrastre F_{Dm} que se debe al efecto supersónico, aunque en esta aplicación es nula.

$$F_D = F_{Df} + F_{Dp} + F_{Dm} \quad (11)$$

La fuerza de arrastre por inducción o parásita F_{Di} es relativa a los ángulos de cabeceo θ y de ataque α , además de la fuerza de elevación pues es su componente en el eje de desplazamiento, como se muestra en la Figura 3.

$$F_{Di} = F_L \text{ sen } \theta \quad (12)$$

En el caso de la fuerza de arrastre parásita, el área S que se emplea para la ecuación (10) es la que se proyecta de frente, es decir, directamente contra el flujo del aire. Por otro lado, en el caso de la fuerza de arrastre por fricción se incluye las dos caras de todas las superficies sumadas (alas, cola y cuerpo).

Una vez teniendo las fuerzas involucradas como se muestra en la Figura 4, se puede realizar la suma de ellas según cada eje en el marco de referencia del cuerpo colocándolas en un vector de fuerzas, como se muestra a continuación.

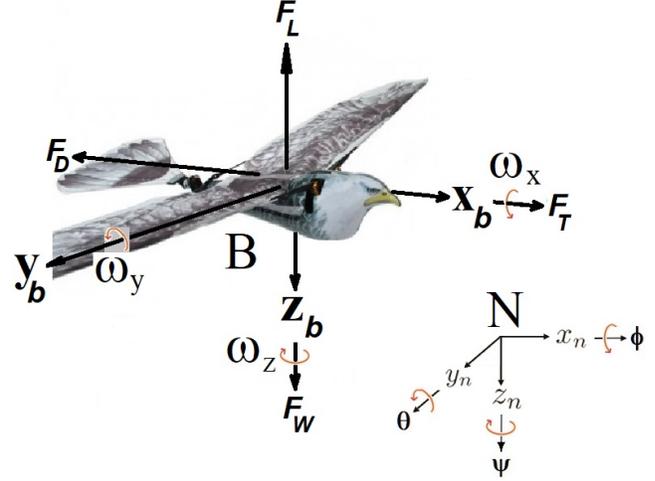


Fig. 4. La rotación se da en el marco de referencia inercial N indicada por los ángulos ϕ en el eje x (alabeo), θ en el eje y (cabeceo) y ψ en el eje z (guiñada). G indica las velocidades angulares sobre cada eje en el marco de referencia del cuerpo B .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_T - F_D \\ 0 \\ F_L - F_W \end{pmatrix} \quad (13)$$

La ecuación (13) es el caso particular cuando los marcos de referencia inercial N y del cuerpo B coinciden, por lo que para tener las ecuaciones generales es necesario multiplicar el vector de fuerzas del sistema de referencia del cuerpo B por la matriz de rotación $R_{nb}(q)$, la cual se muestra en la ecuación (7), para convertirlo al sistema de referencia inercial N .

$$\Sigma F = R_{nb}(q) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad (14)$$

Nótese que la fuerza de gravedad ya se encuentra en el marco de referencia inercial N , por lo que no es necesario multiplicarla por la matriz $R_{nb}(q)$.

2.3 Suma de fuerzas y momentos en la cola

Los torques que actúan sobre el vehículo se crean cuando alguno de los ángulos de la cola no es cero, es decir, las fuerzas que actúan en la cola dejan de estar en equilibrio. Lo anterior junto con la distancia (\vec{r}) entre el centro de gravedad de la cola (CG_t) y el centro de gravedad del vehículo (CG) funciona como palanca creando los torques o momentos de inercia (M_x , M_y y M_z) que hacen girar al vehículo. Estos producen una aceleración angular (α_x , α_y y α_z) que a su vez produce una velocidad (ω_x , ω_y y ω_z) y un desplazamiento angular (ϕ , θ y ψ).

Similar al caso lineal, la velocidad y el desplazamiento angular se mantienen hasta que se produzca una diferencia de torques en sentido contrario y por lo tanto una aceleración que evite que el vehículo siga rotando. En el caso de la cola se considera que el centro de presión aerodinámica, que es el punto donde actúan todas las fuerzas, es el centro de gravedad de la cola.

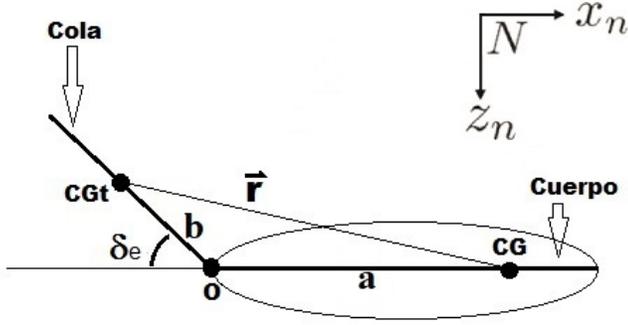


Fig. 5. El vector r se puede obtener trigonométricamente

La única superficie de control para establecer el rumbo del vehículo creando torques para producir una rotación es la cola. Esta cuenta con dos actuadores para modificar los ángulos δ_e que sube y baja sobre el eje y' que es paralelo al eje y pero a una distancia a y δ_r que gira sobre el eje x a manera de timón igualmente en el punto O . Ahora bien, para producir los torques además de definir las fuerzas que actúan en el centro de gravedad de la cola, es necesario definir el vector \vec{r} que tiene componentes en los tres ejes (r_x, r_y, r_z) y que incluye la distancia a antes mencionada y la distancia entre el punto O y el centro de gravedad de la cola (CGt) b según se ve en la Figura 5, además del efecto que producen los ángulos δ_e y δ_r .

El vector \vec{r} se puede determinar resolviendo el diagrama de la Figura 5 tomando la siguiente forma:

$$\vec{r}(r_x, r_y, r_z) = \begin{pmatrix} a + b \cos \delta_e \\ b \sin \delta_e \sin \delta_r \\ b \sin \delta_e \cos \delta_r \end{pmatrix} \quad (15)$$

Inicialmente se considera que la cola está en equilibrio con el resto del vehículo cuando $\delta_e = 0^\circ$ y $\delta_r = 0^\circ$, pero si esta se mueve, es decir, cuando alguno de sus ángulos de cambia de posición, las fuerzas que están actuando en el ornitóptero se desbalancean y esas diferencias actúan tomando como fulcro al centro de gravedad del vehículo y produciendo una rotación.

Se debe tomar en cuenta que la cola tiene un marco de referencia T y el cuerpo B , por lo que es necesario multiplicar el vector de las fuerzas de la cola por una matriz de rotación (R_{bt}) que convierta de un marco de referencia a otro. En el caso de la cola del ornitóptero solo se tienen dos ángulos δ_e y δ_r , por lo que dicha matriz de rotación solo se formará a partir de dos matrices de rotación sencillas.

El primer ángulo es δ_r que gira sobre el eje x'_t y no sobre x_b , es decir que gira sobre sí misma, sin embargo, la estructura de la cola donde se realiza la rotación en δ_e tiene una inclinación fija en 30° por lo que al girar sobre este eje describe un cono con un ángulo de apertura de 30° , como se ve en la Figura 6. El ángulo δ_e no modifica el ángulo de apertura del cono, sino que solamente lo inclina en el eje y'_t . El eje y'_t siempre es paralelo al eje y_b del cuerpo y la distancia e inclinación entre ambos ejes no cambia, si embargo, cada vez que hay un giro en el eje y_b , el eje z'_t cambia de orientación con respecto al eje z_b y dejan de ser paralelos. De esta manera al haber un cambio de

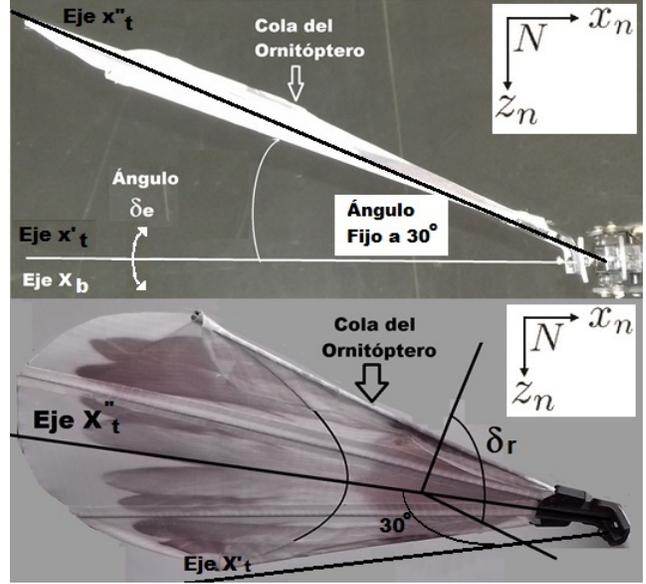


Fig. 6. La cola del ornitóptero cuenta con dos movimientos para controlar al vehículo en base a los torques que se generan. El primero depende del ángulo de elevación (δ_e) y el segundo del ángulo del timón (δ_r)

ejes y de orientación en los mismos, se requiere una matriz de rotación que lo describa. Ya que el ornitóptero que se empleó en este estudio tiene dos grados de libertad en la cola, con ellos se puede lograr direccionar el vehículo y también de ellos se obtiene la siguiente matriz de rotación.

$$R_{bt}(\delta_r, \delta_e) = \begin{pmatrix} \cos(\delta_e) & 0 & -\sin(\delta_e) \\ \sin(\delta_e)\sin(\delta_r) & \cos(\delta_r) & \cos(\delta_e)\sin(\delta_r) \\ \sin(\delta_e)\cos(\delta_r) & -\sin(\delta_r) & \cos(\delta_e)\cos(\delta_r) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Por su parte, la cola no produce una fuerza de propulsión pues no aletea ni genera ningún otro tipo de impulso, de la misma manera, su forma plana no causa ninguna diferencia de presión cuando atraviesa el aire y por lo tanto no hay una fuerza de elevación. Al no haber fuerza de ascenso (F_L) sus componentes F_{Lx} y F_{Ly} son nulas. Nótese que la componente en x de F_L es la fuerza de arrastre inducida F_{Di} , y aunque esta fuerza es cero, otras fuerzas de arrastre siempre están presentes (por presión F_{Dp} y por fricción F_{Df}). Las fuerzas que se consideran en la cola del ornitóptero son F_B que es la fuerza del cuerpo al jalar la cola (esta fuerza no actúa en el centro de gravedad de la cola, sino en el punto de articulación O que está alineado con el centro de gravedad del vehículo, por lo que no produce ningún torque), el peso de la cola $F_{Wt} = m_t g$, el arrastre por fricción F_{Dft} y el arrastre por presión F_{Dpt} . El arrastre por fricción depende de la forma y área de la cola (S_t), así como con la velocidad del ornitóptero y su ángulo de ataque (α), mientras que el arrastre por presión depende del área frontal. Por lo anterior las ecuaciones de dichas fuerzas tienen también la forma de la ecuación (10). Por otro lado, F_{Dft} y F_{Dpt} se pueden representar en una sola fuerza de arrastre F_{Dt} , mientras que el efecto de la fuerza de arrastre supersónica F_{Dmt} no existe en la cola.

$$F_{Dt} = F_{Dpt} + F_{Dft} + F_{Dmt} \rightarrow 0 \quad (17)$$

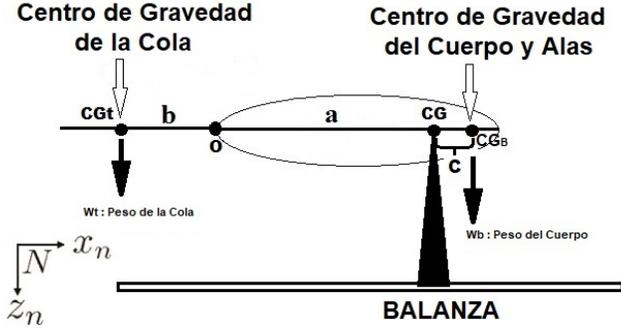


Fig. 7. El peso de la cola y el del cuerpo se encuentran en equilibrio.

Considerando que el ornitóptero se encuentra en equilibrio cuando $\delta_e = 0$, por lo que únicamente se produce un torque cuando la cola cambia de ángulo creando una diferencia entre los torques. Esta diferencia puede ser vista como una diferencia de fuerzas en el diagrama del cuerpo libre si se considera que ambas fuerzas actúan en el mismo punto.

$$\Delta F_W \neq 0 \implies M_{Wt} < M_{Wb} \quad (18)$$

Así la suma de fuerzas en la cola se puede describir en un vector de fuerzas.

$$\vec{F}_t = \begin{pmatrix} F_{xt} \\ F_{yt} \\ F_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_B - F_{Dt} \\ 0 \\ \Delta F_W \end{pmatrix} \quad (19)$$

Es importante mencionar que la fuerza del cuerpo F_B que jala a la cola ya está en el marco de referencia del cuerpo y la fuerza del peso de la cola F_{Wt} está en el marco de referencia inercial, por tanto no necesitan multiplicarse por la matriz de rotación R_{bt} para cambiar del marco de referencia de la cola T al del cuerpo B . Al multiplicar las demás fuerzas que actúan en la cola por la matriz de rotación R_{bt} se obtiene lo siguiente.

$$\Sigma F_t = \begin{pmatrix} -F_{Dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{bt} \begin{pmatrix} F_{xt} \\ F_{yt} \\ F_{zt} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Al separar la suma de fuerzas en cada uno de sus ejes, se obtiene lo siguiente.

$$\Sigma F_{xt} = F_B - F_{Dt} \text{sen}(\delta_e) \quad (21)$$

$$\Sigma F_{yt} = F_{Dt} \text{sen}(\delta_e) \text{sen}(\delta_r) \quad (22)$$

$$\Sigma F_{zt} = \Delta F_W - F_{Dt} \text{sen}(\delta_e) \text{cos}(\delta_r) \quad (23)$$

Sin embargo, para separar la fuerza del peso de la cola hay que considerar su contraparte del peso del cuerpo, ya que cuando el ángulo de elevación (δ_e) es cero, ambas fuerzas se encuentran en equilibrio como en una balanza y no producen ningún tipo de torque como se muestra en la Figura 7.

Si el torque total producido por ambos pesos es cero, entonces se pueden igualar ambos torques para producir una ecuación simplificada

$$\Sigma M_W = M_{Wt} - M_{Wb} = 0 \quad (24)$$

$$m_t g (a + b) = m_b g c \quad (25)$$

Donde a , b y c son las distancias con las que se crea el brazo de palanca para producir los momentos de cada peso. Por otro lado, al cambiar el ángulo de elevación (δ_e) se pierde el equilibrio de fuerzas y se produce un torque.

$$M_{Wt} = m_t g (a + b) \text{cos}(\delta_e) - m_b g c \quad (26)$$

De esta forma si se sustituye la ecuación (25) en (26) se obtiene

$$M_{Wt} = m_t g (a + b) \text{cos}(\delta_e) - m_t g (a + b) \quad (27)$$

$$M_{Wt} = m_t g (a + b) (\text{cos}(\delta_e) - 1) \quad (28)$$

Las fuerzas que actúan sobre la cola del vehículo, se encuentran a una distancia \vec{r} del centro de gravedad del ornitóptero, la cual funciona como una palanca para producir un torque en los tres ejes. Dicho momento de inercia \vec{M} está compuesto por elementos en los tres ejes M_x , M_y y M_z . Note que la fuerza F_B no produce ningún torque y por ello no se considera en la ecuación de momentos angulares. Por otro lado, el peso de la cola no genera ningún torque ya que está en equilibrio con el peso del cuerpo cuando el ángulo δ_e es 0. Cuando la cola se mueve se rompe el equilibrio y el torque resultante es la diferencia de ambos pesos multiplicados por el brazo de palanca \vec{r} .

$$\vec{M}(M_x, M_y, M_z) = \vec{r} \times (R_{TB} \vec{F}_t) - W_b \quad (29)$$

Donde W_b es una constante cuyo valor es: $m_b g c$.

Un último elemento, pero igualmente importante es la matriz de inercia I del ornitóptero, ya que esta contiene información de la masa, forma y simetría del vehículo y se usará en cálculos futuros. Por falta de espacio solo se explicará brevemente como se obtuvo dicha matriz, sin embargo se hará un trabajo detallado al respecto en una publicación posterior. Para formar la matriz de inercia, primero se consideró que el ornitóptero es simétrico en los planos XZ y XY, así según el teorema de los planos de simetría, todos los productos de inercia son iguales a cero. Como siguiente paso se aproximó el cuerpo a un ovoide, las alas y la cola a su vez se dividieron en veinte secciones geométricas, para luego determinar la inercia de cada elemento sobre su centro de masa. Una vez que se tienen todas las inercias individuales, estas se suman usando el teorema de los ejes paralelos, así se obtuvieron los componentes de inercia del vehículo para cada eje principal, mismos que completan la diagonal de la matriz.

$$J = \begin{pmatrix} 7.432 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 6.065 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 14.625 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \text{Kg } m^2 \quad (30)$$

De esta manera las ecuaciones cinemática y dinámica para la translación y la rotación que se usarán respectivamente

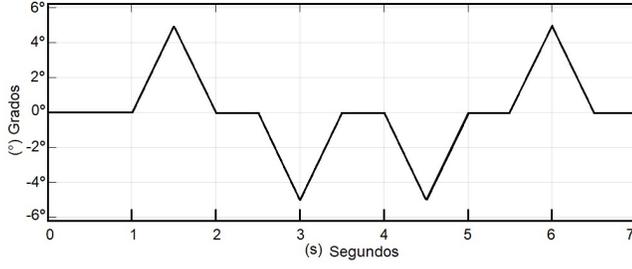


Fig. 8. La señal de entrada para δ_e y δ_r tiene forma triangular y utiliza dos pares de estímulos, nótese que el segundo es el inverso del primero.

son las ecuaciones (8) y (9) mismas que se emplean para un cuerpo rígido.

3. RESULTADOS

Símb.	Nombre	Valor
a	Longitud entre la articulación O de la cola y el CG del vehículo	0.18 m
AR	Relación de aspecto del ornitóptero	6.2684
AR_t	Relación de aspecto de la cola	1.7212
b	Longitud entre la articulación O de la cola y el CG_t de la cola	0.1519 m
b_t	Longitud del ancho de la cola	0.25 m
b_w	Envergadura de las alas	1.1 m
c_{df}	Coefficiente de arrastre por fricción	0.001
c_{dfb}	Coefficiente de arrastre por fricción del cuerpo	0.04
c_{di}	Coefficiente de arrastre inducido	$c_{df} + \frac{c_l^2}{\pi AR}$
c_{dp}	Coefficiente de arrastre por presión	$1.28 \sin(\delta_e - \alpha)$
c_l	Coefficiente de ascenso ($c_{l0} = 0$)	$2\pi(\delta_e - \alpha)$
c_t	Coefficiente de impulso	$c_{df} + \frac{c_l^2}{\pi AR}$
g	Aceleración de la gravedad	$9.81 m/s^2$
g_t	Grosor de la cola	0.002 m
h_t	Longitud del alto de la cola	0.24 m
MAC	Cuerda media aerodinámica	$0.1727 m (\frac{S_w}{b_w})$
m_t	Masa de la cola	0.012 Kg
m_b	Masa del cuerpo	0.347 Kg
m_w	Masa de las alas	0.075 Kg
ρ	Densidad del aire a 2,160 m y 23°C	$1.226 Kg/m^3$
S_t	Área de la cola	$0.0363 m^2$
S_{ft}	Área de frente de la cola	$0.0005 m^2$
S_w	Área total de las alas	$0.19 m^2$
W_t	Peso de la cola	$0.012 Kg m/s^2$
W_b	Peso del cuerpo	$0.347 Kg m/s^2$
W_w	Peso de las alas	$0.075 Kg m/s^2$

Table 1. Constantes del modelo del sistema

Una vez que se realizó el modelado del sistema, se realizan algunas pruebas para validar su comportamiento. Primero se coloca al sistema en lazo abierto, y luego se fija la velocidad en 5 m/s y el ángulo de ataque (α) en 0° . Una vez hecho lo anterior se puede alimentar las entradas de control, en este caso δ_e y δ_r . La señal empleada para estimular al sistema tiene forma triangular, y el primer par de impulsos es para ver la respuesta del sistema, mientras que el segundo par es para ver si el sistema regresa a su estado inicial (Figura 8). De esta forma observamos que la respuesta de las aceleraciones angulares del sistema siguen a los torques de entrada con una ligera curvatura, como se aprecia en la Figura 9.

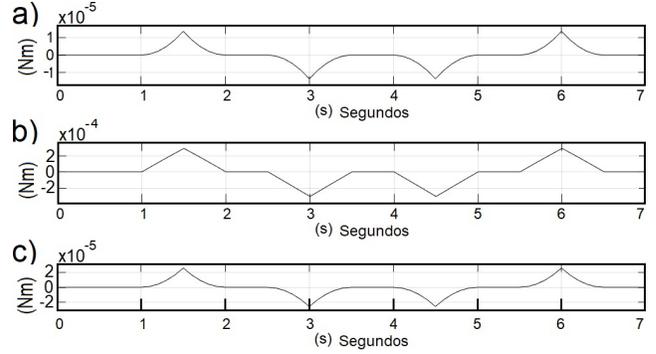


Fig. 9. a) Torque producto del par de estímulos triangulares en el eje X, b) en el eje Y y c) en el eje Z.

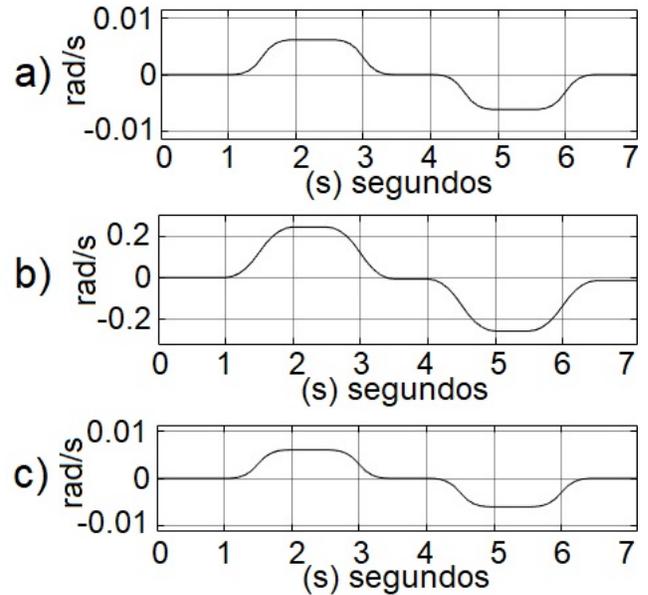


Fig. 10. a) La velocidad angular en el eje X, b) en el eje Y y c) en el eje Z.

En los resultados de las velocidades angulares mostrados en la Figura 10 se ve un aumento durante el primer estímulo igual que el torque, luego se estabiliza en un valor cuando el estímulo se detiene, posteriormente cuando el estímulo cambia de dirección el valor decrece hasta estabilizarse otra vez cerca de cero. En el segundo estímulo el comportamiento es similar, pero en sentido opuesto, sin embargo, hay un pequeño componente que no se hace cero, como se aprecia en la ecuación (28), sin importar si el ángulo δ_e es positivo o negativo el torque resultante siempre será en el mismo sentido, por lo que en lugar de compensarse en el segundo estímulo este pequeño componente continúa sumando hasta que la desviación producida desestabiliza al vehículo por completo. Esto se puede corregir, ajustando el centro de gravedad del vehículo en estado estacionario con un ángulo δ_e positivo, para que al mover la cola su peso pueda producir torques tanto positivos como negativos y así usarlos para compensar sus efectos y poder encontrar la estabilidad.

En cuanto a la posición angular mostrada en la Figura 11 el comportamiento es muy similar al de las velocidades,

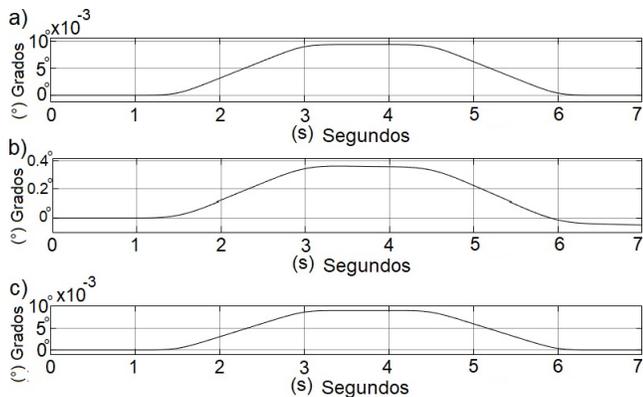


Fig. 11. a) La posición angular en el eje X cambia y regresa a su condición inicial, b) en el eje Y sin embargo, existe una ligera desviación que sigue en aumento y c) en el eje Z la posición angular regresa a su condición inicial.

donde la desviación en el eje Y no solo continúa, sino que es mayor.

4. CONCLUSIÓN

En este trabajo se desarrolló un análisis de las fuerzas que actúan para lograr el vuelo de un ornitóptero con un especial énfasis en el desarrollo del movimiento de la cola donde se generan los torques o momentos angulares de inercia que permitirán controlar la postura del vehículo. Con estos elementos y las características específicas del ornitóptero SpyBird Eagle de HobbyKing se elaboró un modelo matemático no lineal, con el cual se realizaron diversas simulaciones en lazo abierto con el software MatLab [®] Simulink [®].

En la siguiente etapa de este proyecto se realizará un control no lineal para la postura y rumbo del ornitóptero, basado en la teoría de Lyapunov. Este deberá estabilizar la posición de coordenadas (0, 0, 0) del vehículo aéreo tipo ornitóptero y mantenerlo en esa posición aún bajo la acción de perturbaciones del medio ambiente. Para ello se empleará el modelo obtenido representándolo en función de las cuatro variables de entrada, para que estas a su vez produzcan los torques deseados (γ) en los tres ejes dimensionales.

$$f(\delta_e, \delta_r, \alpha, V) = \Gamma \in R^3 \implies \Gamma = [\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z] \quad (31)$$

Obteniendo dichos torques deseados se podrá completar el arreglo de las ecuaciones (8) y (9) en lazo cerrado, y así después de simularlo se podrá obtener finalmente el control deseado.

Este modelo puede tener aplicaciones importantes en prototipos mecánicos desarrollados en México, haciendo las modificaciones pertinentes producto de las diferencias de diseños, así como en aplicaciones de software como los simuladores o video juegos.

REFERENCES

C.J. Rose, P. Mahmoudieh, R.S. Fearing (2017). Modeling and Control of an Ornithopter for Diving. University of California, Berkeley.

J. Zenteno, J. Davila, R. Lozano (2016). Attitude and altitude control on board of an ornithopter. 2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS).

T. Du and A. Schulz (2016). Computational multicopter design. ACM Transactions on Graphic.

C.J. Rose (2015). Modeling and Control of an Ornithopter for NonEquilibrium Maneuvers. PhD Thesis, Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley.

J.I. Colorado-Cervantes., H.I. Medellín-Castillo (2013) Análisis cinemático, diseño y construcción de un primer prototipo de robot autónomo volador. Congreso Internacional SOMIM.

S.S. Baek, F.L. García, R.S. Fearing (2011). Flight control for target seeking by 13 gram ornithopter. University of California.

S.S. Baek and R.S. Fearing (2010). Flight forces and altitude regulation of 12 gram i-bird. University of California.

J. Grauer and J. Hubbard Jr. (2010). Modeling of Ornithopter Flight Dynamics for State Estimation and Control. 2010 American Control Conference, Baltimore, MD, USA.

Jackowski, Z. (2009). Design and construction of an autonomous ornithopter. BS Thesis, Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

D. Campolo, G. Barbera, L. Schenato, L. Pi, X. Deng and E. Guglielmelli (2009). Attitude stabilization of a biologically inspired robotic housefly via dynamic multimodal attitude estimation. Advanced Robotics.

J.F. Guerrero-Castellanos (2008). Estimation de l'attitude et commande bornée en attitude d'un corps rigide: application e un mini helicoptere e quatre rotors. Ph.D. Thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

K.S. Shigeoka (2007). Velocity and altitude control of an ornithopter micro aerial vehicle. MS. Thesis, Electrical Engineering, University of Utha.

D.E. Alexander and S. Vogel (2004). Nature's Flyers: Birds, Insects, and the Biomechanics of Flight Book, Johns Hopkins University Press.

R. Dudley (2002). The Biomechanics of Insect Flight: Form, Function, Evolution. Princeton University Press.

C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (1997). Theory of Robot Control. Springer-Verlag.

M.D. Shuster (1993). A survey of attitude representations. Journal of the astronautical sciences.

SCIImago (2017). La producción científica de América Latina en el escenario mundial en 2016 [OnLine]. SJR: SCIImago Journal and Country Rank. Disponible en: <http://www.scimagojr.com>

Grupo de gestión de datos sobre el desarrollo (2017). Clasificación mundial de artículos científicos del 2013 [OnLine]. Grupo Banco Mundial Disponible: <https://datos.bancomundial.org>

A. Guerrero-Revelo (2016). Diseñan ornitóptero [Online]. Colombia: Universidad Nacional, 2016. Disponible: <https://www.youtube.com/watch?v=dj2KKGRge3c>

W.H. Gerber (2012). ¿Cómo vuelan las aves? [Online]. Chile: Universidad Austral, 2012. Disponible: <https://www.youtube.com/watch?v=XsLkCSbuBHU>