

Identificación paramétrica de un edificio empleando instrumentación reducida y filtros integrales lineales

Antonio Concha ^{*,*} Luis Alvarez-Icaza ^{**}

^{*} Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad de Colima, Coquimatlán Colima 28400, México (e-mail: aconcha@uocol.mx)

^{**} Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán D.F. 04510, México (e-mail: alvar@pumas.iingen.unam.mx)

Resumen: Se presenta un método que identifica el modelo completo de un edificio de cortante excitado sísmicamente usando instrumentación reducida. Este método permite estimar las relaciones rigidez/masa y amortiguamiento/masa, a través de mediciones de aceleración en algunos pisos instrumentados y del terreno. Las aceleraciones de los pisos no instrumentados se reconstruyen por medio de un interpolante de trazador cúbico que usa las aceleraciones medidas. También, se propone una parametrización que considera amortiguamiento Rayleigh para el edificio y que emplea filtros integrales lineales (FIL), los cuales atenúan el ruido de medición y eliminan las perturbaciones constantes de las aceleraciones medidas y reconstruidas. La ventaja de emplear esta parametrización es que los parámetros que se estiman con ella son la mitad de los parámetros que se estiman mediante una parametrización propuesta recientemente en la literatura que también usa FIL. Simulaciones numéricas en un edificio de cinco pisos confirman la efectividad del método propuesto.

Keywords: Instrumentación reducida, interpolante de trazador cúbico, edificio de cortante, mediciones de aceleración, filtros integrales lineales.

1. INTRODUCCIÓN

Las mediciones de aceleración de los pisos de un edificio, cuando éste se somete a fuerzas externas como sismos, pueden ser empleadas para la identificación del modelo de la estructura o para detectar daños en ella. La gran mayoría de los edificios instrumentados lo están sólo en algunos pisos debido principalmente al costo que implica la adquisición de datos de aceleración de todos los pisos. La identificación paramétrica de estructuras civiles usando instrumentación reducida ha atraído la atención de un gran número de investigadores alrededor del mundo durante las últimas cuatro décadas. Vicario et al. (2015) presentan el método de identificación OKID (Observer/Kalman filter identification, en inglés), el cual determina los parámetros de Markov de un observador de Kalman con la finalidad obtener el modelo de un edificio con instrumentación reducida. Este método requiere de una transformación de tiempo continuo a tiempo discreto; sin embargo, el muestreo rápido de los datos provoca que los polos del modelo en tiempo discreto se concentren alrededor de $z = 1$, lo cual puede generar problemas por mal acondicionamiento numérico. Ghosh et al. (2007) emplean el filtro de Kalman extendido para estimar los parámetros del modelo de un edificio, así como las posiciones y velocidades de los pisos no instrumentados. Para el diseño del filtro de Kalman se linealiza una ecuación de estado no lineal obtenida al considerar los parámetros de la estructura como estados. No obstante, algunos polos del modelo en tiempo continuo

linealizado podrían encontrarse sobre el eje imaginario, y por consiguiente, algunos parámetros o estados estimados no estarían acotados. Por otra parte, Hegde y Sinha (2008) estiman los parámetros modales de un edificio excitado mediante un sismo, acoplado torsionalmente, e instrumentado en sólo algunos pisos; los autores emplean un interpolante de trazador cúbico para estimar la respuesta en los pisos no instrumentados, y también usan un método de identificación paramétrica fuera de línea basado en la Técnica de Excitación Natural Next (Natural Excitation Technique, en inglés) y en el ERA (Eigen Realization Algorithm, en inglés).

En este manuscrito se presenta una técnica que identifica el modelo de cortante de un edificio con instrumentación reducida y que es excitado sísmicamente. Se propone una parametrización con las siguientes características: 1) supone que el edificio tiene amortiguamiento Rayleigh; 2) contiene un vector cuyos componentes son todas las relaciones rigidez/masa del edificio, las cuales se identifican por medio del método de Mínimos Cuadrados; 3) utiliza las mediciones de aceleración del terreno y de los pisos instrumentados, así como de las aceleraciones de los pisos no instrumentados, las cuales son estimadas por medio de un interpolante de trazador cúbico que emplea dichas mediciones; y 4) emplea Filtros Integrales Lineales (FIL) que atenúan ruido de medición y eliminan las perturbaciones constantes de las aceleraciones medidas y reconstruidas. Los FIL fueron empleados en (Concha et al., 2014) para la identificación de estructuras instrumentadas en todos los pisos. La técnica propuesta en este artículo extiende el uso

* Autor corresponsal

de los FIL para la estimación del modelo de estructuras civiles usando las mediciones de los pisos instrumentados, así como las aceleraciones estimadas de los pisos no instrumentados. Además, al considerar amortiguamiento Rayleigh para la estructura, el número de parámetros que se identifican con la parametrización propuesta es la mitad que el número de parámetros que se estiman en (Concha et al., 2014). Por otro lado, en comparación con las técnicas en (Vicario et al., 2015; Hegde y Sinha, 2008), el método propuesto se puede implementar en línea y puede eliminar las perturbaciones constantes tanto de las aceleraciones medidas como de las reconstruidas.

El interpolante de trazador cúbico desarrollado sigue las ideas expuestas en Limongelli (2005), no requiere del conocimiento de las formas modales de la estructura, y puede reconstruir en línea las aceleraciones de los pisos no instrumentados. Los métodos en Law et al. (2011); He et al. (2012); Wan et al. (2014) también pueden estimar las señales de aceleración de los pisos no instrumentados, pero a diferencia del interpolante de trazador cúbico, el diseño de estos métodos es más laborioso, operan fuera de línea, y necesitan del conocimiento de los parámetros de la estructura, los cuales usualmente son desconocidos.

2. MODELO DE UN EDIFICIO DE CORTANTE

El comportamiento de un edificio de cortante de n pisos que se mueve en un plano se puede describir por medio del siguiente modelo lineal invariante en el tiempo (Chopra, 2001):

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{l}\ddot{x}_g(t)) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. La definición de estas matrices es la siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

donde los parámetros k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son los coeficientes laterales de rigidez de la columna entre el i -ésimo piso y el $(i - 1)$ -ésimo piso. Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T, & \dot{\mathbf{x}}(t) &= [\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)]^T \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= [\ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t)]^T, & \mathbf{1} &= [1, 1, \dots, 1]^T \end{aligned} \quad (2)$$

Se define además el vector

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{l}\ddot{x}_g(t) = [\ddot{x}_{a_1}(t), \dots, \ddot{x}_{a_n}(t)]^T \quad (3)$$

Los componentes $x_i(t)$, $\dot{x}_i(t)$ y $\ddot{x}_i(t)$ son respectivamente el desplazamiento, velocidad y aceleración del i -ésimo piso, los cuales son medidos con respecto a la base. Además, la señal $\ddot{x}_{a_i}(t)$ representa la aceleración absoluta del i -ésimo piso; finalmente, $\ddot{x}_g(t)$ es la aceleración absoluta del terreno inducida por el sismo.

El amortiguamiento \mathbf{C} del edificio (1) será representado por una matriz de amortiguamiento Rayleigh dada por:

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (4)$$

Los términos a_0 y a_1 son constantes, los cuales se calculan por medio de la siguiente ecuación (Chopra, 2001):

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde ζ_v y ω_v , $v = i, j$ son el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural del v -ésimo modo de la estructura.

Comentario Los parámetros a_0 y a_1 en (5) se determinan suponiendo el conocimiento de ω_i y ω_j y de ζ_i y ζ_j . Las frecuencias naturales ω_i y ω_j se pueden extraer por medio del espectro de Fourier de las respuestas del edificio obtenidas debido a ruido ambiental o sismos. Además, ζ_i y ζ_j pueden tomar los valores recomendados de amortiguamiento para edificios, los cuales son mostrados en la Tabla 11.2.1 de Chopra (2001).

3. PARAMETRIZACIÓN

Sustituyendo (4) en (1) permite escribir el modelo del edificio como:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{l}\ddot{x}_g(t) + a_0\dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{a}_0\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}(t)]\boldsymbol{\theta} \quad (6) \\ \boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} & \cdots & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix}^T = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \cdots \theta_{2n-1}]^T \\ \mathbf{u}(t) &= - \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1(t) - x_2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2(t) - x_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n(t) - x_{n-1}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}(t)$ es la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{u}(t)$.

Filtrando la parametrización (6) por medio de Filtros Integrales Lineales (FIL) y suponiendo que las mediciones de aceleración están contaminadas por ruido de medición y por perturbaciones constantes se obtiene la expresión (8), la cual se deduce siguiendo un procedimiento similar al descrito en (Concha et al., 2014).

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\theta} + I_5[\mathbf{r}(t)] + I_5[\boldsymbol{\lambda}(t)] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(t) &= \frac{1}{\delta^3} I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j \ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}\mathbf{m}}(t - j\delta) \right\} \\ &+ \frac{a_0}{\delta^2} I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}(t - j\delta) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(t) &= \frac{a_1}{\delta^2} I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}(t - j\delta) \right\} \\ &+ \frac{1}{\delta} I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}(t - j\delta) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$I_\alpha\{\rho(t)\} = \frac{\varrho}{\delta^\alpha} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{\alpha-1}-\delta}^{\tau_{\alpha-1}} \rho(\tau_\alpha) d\tau_\alpha \cdots d\tau_1 \quad (11)$$

donde ϱ y δ son constantes positivas, α es el número de integraciones sobre intervalos de tiempo finito de ρ . El período de integración δ se define como

$$\delta = hT_s$$

$h > 0$ se denomina factor de longitud y T_s es el período de muestreo de ρ . Además,

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}\mathbf{m}}(t) = [\ddot{x}_{a_{1m}}(t), \dots, \ddot{x}_{a_{nm}}(t)]^T \quad (12)$$

demuestra que entre mayor sea el número de pisos instrumentados mejor es la exactitud de las aceleraciones reconstruidas de los pisos no instrumentados. Además, en dicha referencia se demuestra que el interpolador de trazador cúbico proporciona buenos estimados de las aceleraciones de los pisos no instrumentados si el edificio se encuentra instrumentado de manera uniforme o aproximadamente uniforme a lo largo de su altura.

Tabla 1. Condiciones frontera.

Frontera	Aceleración absoluta $\ddot{x}_a(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)$
$h = 0$	$\ddot{x}_a(0, t) = \ddot{x}_g(t)$ $\dot{x}'_a(0, t) = 0$
$h = H$	$\ddot{x}''_a(H, t) = 0$ $\dot{x}'_a(H, t) = 0$

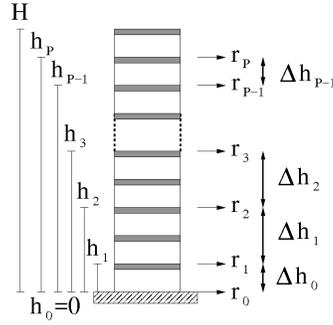


Figura 1. Edificio con altura H instrumentado en el terreno y en P pisos.

4. ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA DEL MODELO DEL EDIFICIO

Para estimar el vector de parámetros θ en (18) se emplea el algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC), el cual está dado por (Söderström y Stoica, 1989):

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=\gamma}^N \hat{\phi}^T(k) \hat{\phi}(k) \right]^{-1} \sum_{k=\gamma}^N \hat{\phi}^T(k) \hat{\chi}(k) \quad (20)$$

donde γ está definido en (18); además, N es el número de muestras de $\hat{\chi}$ y $\hat{\phi}$. El vector θ también se puede estimar recursivamente ya que las aceleraciones de los pisos no instrumentados se pueden calcular en cada período de muestreo como se demuestra en el Apéndice A. La versión en línea o recursiva del MC, denotada como MCR, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \mathbf{L}(k) \epsilon(k) \\ \mathbf{L}(k) &= \mathbf{P}(k-1) \hat{\phi}^T(k) [\beta \mathbf{I}_{n \times n} + \hat{\phi}(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{\phi}^T(k)]^{-1} \\ \mathbf{P}(k) &= [\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{L}(k) \hat{\phi}(k) \mathbf{P}(k-1)] / \beta \\ \epsilon(k) &= \hat{\chi}(k) - \hat{\phi}(k) \hat{\theta}(k) \end{aligned} \quad (21)$$

donde β se llama factor de olvido y es tal que $0 < \beta \leq 1$. Además, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ es la matriz de covarianza, $\mathbf{I}_{n \times n} \in R^{n \times n}$ es la matriz de identidad, y $\epsilon(k)$ es el error de estimación de salida.

5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

El desempeño del algoritmo propuesto se evalúa por medio de la simulación numérica de un edificio de cinco pisos, el cual se encuentra instrumentado en el terreno y en tres pisos, es decir, $P = 3$. El edificio se excita mediante la componente Norte-Sur de la aceleración del sismo El Centro (California, 1940). El interpolante de trazador cúbico se emplea para reconstruir las respuestas de los dos pisos no instrumentados. Toda la programación se realizó usando Matlab/Simulink y un período de muestreo de $T_s = 0.002$ s, así como el método de integración trapezoidal, el cual permite evaluar las integrales de las variables $\hat{\chi}$ y $\hat{\phi}$. El número de muestras es $N = 7500$, las cuales se adquieren durante 15s de simulación. El modelo del edificio simulado tiene los siguientes parámetros:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(10, 10, 10, 10, 10) \text{ (kg)}$$

$$\mathbf{K} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 2.42 & -1.21 & 0 & 0 & 0 \\ -1.21 & 2.42 & -1.21 & 0 & 0 \\ 0 & -1.21 & 2.42 & -1.21 & 0 \\ 0 & 0 & -1.21 & 2.42 & -1.21 \\ 0 & 0 & 0 & -1.21 & 1.21 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

El vector θ obtenido con estas matrices está dado por:

$$\theta = 12.1 \times 10^2 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T, \text{ N/(kg} \cdot \text{m)} \quad (22)$$

Las cinco frecuencias naturales del edificio son $\omega_1 = 9.9$ rad/s (1.57 Hz), $\omega_2 = 28.9$ rad/s (4.59 Hz), $\omega_3 = 45.55$ rad/s (7.25 Hz), $\omega_4 = 58.52$ rad/s (9.31 Hz), y $\omega_5 = 66.75$ rad/s (10.62 Hz). Se considera que el edificio tiene amortiguamiento Rayleigh, donde los primeros dos modos tienen factor de amortiguamiento de 3%, es decir, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.03$. Usando estos valores de ζ_1 y ζ_2 , así como el conocimiento de ω_1 y ω_2 permiten obtener las constantes a_1 y a_2 usando (5). Estas constantes son empleadas para formar las variables $\hat{\chi}$ y $\hat{\phi}$ del regresor, las cuales se calculan sobre una ventana de longitud $\delta = lT_s = 0.05$ s, donde $l = 25$. Además, ρ es igual a δ .

La medición de aceleración cada piso instrumentado y del terreno se contamina con una perturbación constante con magnitud de 10% el valor de la desviación estándar de dicha medición. Además, se agregan ruidos Gaussianos a las mediciones de aceleración, los cuales tienen media cero y sus varianzas se ajustan para obtener una relación ruido/señal de 10%.

Para determinar la efectividad del interpolante de trazador cúbico en la reconstrucción de la respuesta del w -ésimo piso no instrumentado se emplea la siguiente función e_w similar a una definida en Limongelli (2005):

$$e_w = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^N [\ddot{x}_{a_w}(k) - (\hat{\ddot{x}}_{a_w}(k) - \iota)]^2}{\sum_{k=0}^N \ddot{x}_{a_w}^2(k)}} \quad (23)$$

donde \ddot{x}_{a_w} y $\hat{\ddot{x}}_{a_w}$ son la aceleración real y estimada del w -ésimo piso, respectivamente; además, ι es la media aritmética de la señal $\hat{\ddot{x}}_{a_w}$. Debido a que dos pisos del edificio simulado no se encuentran instrumentados, se calculan dos funciones e_w denotadas como e_{w1} y e_{w2} . También, se obtiene la media $e_M = (e_{w1} + e_{w2})/2$ y se considera que entre menor sea e_M , mejor es el desempeño del interpolante de trazador cúbico.

Sea $\tilde{\omega}_i$ el error de identificación en porcentaje (%) para la i -ésima frecuencia naturales estimada $\hat{\omega}_i$. El siguiente índice de desempeño $E_{\tilde{\omega}}$ mide la calidad del modelo identificado al tomar en cuenta todos los errores de identificación $\tilde{\omega}_i$:

$$E_{\tilde{\omega}} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \tilde{\omega}_i^2}, \quad \tilde{\omega}_i (\%) = \frac{|\hat{\omega}_i - \omega_i|}{\omega_i} \times 100 \quad (24)$$

Se considera que entre menor sea el valor de E , mejor es la calidad del modelo.

Para determinar la relación entre la distribución de los pisos instrumentados y la exactitud del interpolante de trazador cúbico, la Tabla 2 presenta los valores de e_M para todas las configuraciones (\mathcal{C}) posibles de tres pisos instrumentados y del terreno. Además, la Tabla 2 presenta la calidad del modelo $E_{\tilde{\omega}}$ obtenido con cada configuración. Resultados similares a los mostrados en la Tabla 2 se obtienen con períodos de muestreo de 10 ms y de 20 ms.

Tabla 2. Combinaciones de tres pisos instrumentados, y valores e_M y $E_{\tilde{\omega}}$.

\mathcal{C}	Pisos instrumentados	Pisos no instrumentados	e_M	$E_{\tilde{\omega}}$
1	0 3 4 5	1 2	0.405	10.28
2	0 2 4 5	1 3	0.260	7.60
3	0 2 3 5	1 4	0.239	6.30
4	0 2 3 4	1 5	0.257	28.43
5	0 1 4 5	2 3	0.209	15.61
6	0 1 3 5	2 4	0.160	5.11
7	0 1 3 4	2 5	0.177	24.92
8	0 1 2 5	3 4	0.169	10.00
9	0 1 2 4	3 5	0.183	58.83
10	0 1 2 3	4 5	0.332	67.63

De la Tabla 2 se puede observar que con las configuraciones 2, 3 y 6 se tiene la mejor calidad del modelo estimado. Estas configuraciones tienen una instrumentación aproximadamente uniforme a lo largo del edificio. El valor mínimo de e_M y de $E_{\tilde{\omega}}$ se obtiene con la distribución 6, es decir, ésta configuración es la óptima. Nótese que la mayoría de las configuraciones que no tienen una distribución uniforme como $\mathcal{C} = 4, 5, 7, 9, 10$ producen altos valores de $E_{\tilde{\omega}}$, aunque algunas de éstas pueden producir valores pequeños de e_M .

Por otro lado, la Tabla 3 presenta el vector estimado $\hat{\theta}$ obtenido con las configuraciones 2, 3, 6 y 8 usando el MC fuera de línea en (20). Además, la Tabla 4 presenta las frecuencias naturales estimadas en dichas configuraciones.

La Fig. 2 presenta la aceleración estimada \hat{x}_{a_4} correspondiente a la configuración 6. Se observa que \hat{x}_{a_4} es muy cercana a la aceleración real \ddot{x}_{a_4} . Por otra parte, la Fig. 3 muestra los componentes $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, 9$ del vector estimado $\hat{\theta}$ por el MCR en (21). Este vector se calculó a partir de la muestra $k = 125$, ya que las perturbaciones constantes son eliminadas por los FIL a partir de este instante de muestreo.

6. CONCLUSIONES

Se propuso un método que combina una parametrización basada en FIL, el mínimos cuadrados, y un interpolante

Tabla 3. Vector estimado $\hat{\theta}$.

\mathcal{C}	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$	$\hat{\theta}_6$	$\hat{\theta}_7$	$\hat{\theta}_8$	$\hat{\theta}_9$
2	1.96	1.17	0.86	0.97	1.07	1.14	0.91	0.81	1.21
3	2.00	1.23	0.83	0.91	1.28	1.45	1.49	1.23	1.04
6	1.27	1.21	1.07	1.24	1.26	1.45	1.59	1.25	1.01
8	1.21	1.21	1.19	1.50	1.48	1.50	1.72	1.32	0.95

Tabla 4. Frecuencias naturales estimadas.

\mathcal{C}	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_5$
2	9.59	29.19	44.95	56.54	62.88
3	10.26	28.81	46.87	60.72	68.12
6	9.66	28.95	45.51	59.05	69.69

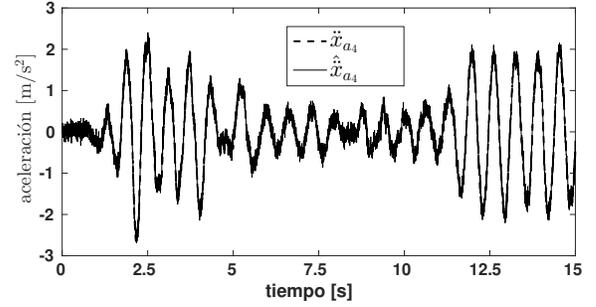


Figura 2. Comparación entre \ddot{x}_{a_4} y \hat{x}_{a_4} .

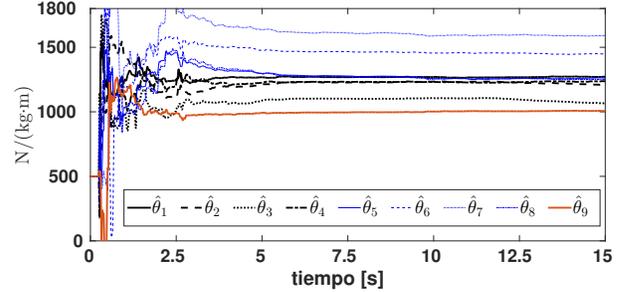


Figura 3. Componentes $\hat{\theta}_k$, $k = 1, 2, \dots, 9$ de $\hat{\theta}$.

de trazador cúbico para la identificación del modelo de un edificio de cortante excitado sísmicamente, y que se encuentra instrumentado en sólo algunos pisos. Mediante simulaciones numéricas se pudo determinar que la calidad del modelo estimado por el método propuesto es buena si el edificio se encuentra instrumentado de manera uniforme. Si el edificio no se encuentra instrumentado uniformemente no se garantiza un modelo estimado con buena calidad. El desempeño observado por el método propuesto motiva la realización de futuras pruebas experimentales.

Apéndice A. INTERPOLANTE DE TRAZADOR CÚBICO

Sea un edificio con altura H instrumentado en su base y en P pisos, el cual se subdivide en P subintervalos tal como se muestra en la Fig. 1, donde cada subintervalo está delimitado por dos pisos instrumentados. La aceleración absoluta a una altura h del edificio localizada en el p -ésimo subintervalo, se estima mediante la función polinomial cúbica en (19) presentada a continuación, donde por

simplicidad se ha omitido el argumento t de la señal $\hat{\ddot{x}}_a(h, t)$ y de los parámetros $a_p(t)$, $b_p(t)$, $c_p(t)$, $a_p(t)$:

$$\hat{\ddot{x}}_a(h) = a_p + b_p(h - h_p) + d_p(h - h_p)^2 + e_p(h - h_p)^3 \quad (\text{A.1})$$

con $h \in [h_p, h_{p+1}]$ y $p = 0, 1, 2, \dots, P - 1$.

Los coeficientes a_p , b_p , d_p y e_p se determinan suponiendo que los P polinomios cúbicos en (A.1) tienen primera y segunda derivadas continuas con respecto a la variable espacial h en todo el intervalo. Estas suposiciones permiten obtener las siguientes ecuaciones (Burden y Faires, 2002):

$$\Delta h_p = h_{p+1} - h_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, P - 1 \quad (\text{A.2})$$

$$a_p = r_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, P \quad (\text{A.3})$$

$$\quad \quad \quad (\text{A.4})$$

$$b_p = \frac{1}{\Delta h_p}(a_{p+1} - a_p) - \frac{\Delta h_p}{3}(2d_p + d_{p+1}), \quad (\text{A.5})$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, P - 1 \quad (\text{A.6})$$

$$\quad \quad \quad (\text{A.7})$$

$$e_p = \frac{d_{p+1} - d_p}{3\Delta h_p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, P - 1 \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} &\Delta h_{p-1}d_{p-1} + 2(\Delta h_{p-1} + \Delta h_p)d_p + \Delta h_p d_{p+1} \\ &= \frac{3}{\Delta h_p}(r_{p+1} - r_p) - \frac{3}{\Delta h_{p-1}}(r_p - r_{p-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$p = 1, 2, \dots, P - 1$$

El sistema de ecuaciones en (A.9) contiene como incógnitas a los coeficientes $\{d_p\}_{p=0}^P$, ya que están disponibles las mediciones de aceleración $\{r_p\}_{p=0}^P$ y las distancias entre dos pisos instrumentados $\{\Delta h_p\}_{p=0}^{P-1}$. Primeramente se determinan $\{d_p\}_{p=0}^P$, y posteriormente se calculan las constantes $\{b_p\}_{p=0}^{P-1}$ y $\{e_p\}_{p=0}^{P-1}$ usando las ecuaciones (A.5) y (A.8), respectivamente. Nótese que el sistema de ecuaciones (A.9) tiene $P - 1$ ecuaciones y $P + 1$ incógnitas. Para resolver este conjunto de ecuaciones se emplean dos ecuaciones más, las cuales se deducen por medio de las condiciones frontera $\hat{\ddot{x}}'_a(0)$ y $\hat{\ddot{x}}''_a(H)$ de la aceleración en el edificio. Tomando en cuenta estas dos condiciones se obtiene

$$\hat{\ddot{x}}'_a(0) = b_0, \quad \hat{\ddot{x}}''_a(H) = 2d_P \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo $\hat{\ddot{x}}'_a(0) = 0$ y $\hat{\ddot{x}}''_a(H) = 0$, dadas en la Tabla 1, en (19) resulta

$$b_0 = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$d_P = 0 \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando $b_0 = 0$ en (A.5) y usando (A.3) produce

$$\frac{1}{\Delta h_0}(r_1 - r_0) - \frac{\Delta h_0}{3}(2d_0 + d_1) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Las expresiones (A.9), (A.12) y (A.13) se pueden escribir en forma matricial como sigue:

$$\mathbf{SD} = \mathbf{V} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2\Delta h_0 & \Delta h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta h_0 & 2(\Delta h_0 + \Delta h_1) & \Delta h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta h_1 & 2(\Delta h_1 + \Delta h_2) & \Delta h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\Delta h_0}(r_1 - r_0) \\ \frac{3}{\Delta h_1}(r_2 - r_1) - \frac{3}{\Delta h_0}(r_1 - r_0) \\ \frac{3}{\Delta h_2}(r_3 - r_2) - \frac{3}{\Delta h_1}(r_2 - r_1) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

La matriz \mathbf{S} es constante, conocida, y dominante en sentido diagonal. Por lo tanto, su inversa \mathbf{S}^{-1} existe. Premultiplicando ambos lados de (A.14) por \mathbf{S}^{-1} resulta:

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{V} \quad (\text{A.17})$$

Una vez obtenido \mathbf{D} se calculan $\{b_p\}_{p=0}^{P-1}$ y $\{e_p\}_{p=0}^{P-1}$ usando (A.5) y (A.8). Finalmente, se sustituyen los coeficientes a_p , b_p , d_p y e_p , $p = 0, 1, 2, \dots, P - 1$ en (A.1) para determinar los P polinomios cúbicos del interpolante de trazador cúbico. Note que las ecuaciones (A.1), (A.5), (A.8) y (A.17) permiten estimar las aceleraciones de los pisos no instrumentados tanto en línea como fuera de línea.

REFERENCIAS

- Burden, R.L. y Faires, J.D. (2002). *Análisis numérico*. Thomson Learning.
- Chopra, A.K. (2001). *Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Concha, A., Alvarez-Icaza, L., y Garrido, R. (2014). Observador adaptable para edificios basado en proyección paramétrica. En *XVI Congreso Latinoamericano de Control de Automático*, 36–41.
- Ghosh, S.J., Roy, D., y Manohar, C. (2007). New forms of extended kalman filter via transversal linearization and applications to structural system identification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49), 5063–5083.
- He, J., Guan, X., y Liu, Y. (2012). Structural response reconstruction based on empirical mode decomposition in time domain. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 28, 348–366.
- Hegde, G. y Sinha, R. (2008). Method of modal identification of torsionally-coupled buildings using earthquake responses. En *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, 1–8.
- Law, S., Li, J., y Ding, Y. (2011). Structural response reconstruction with transmissibility concept in frequency domain. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3), 952–968.
- Limongelli, M. (2005). Performance evaluation of instrumented buildings. *ISET Journal of earthquake technology*, 42(2-3), 47–61.
- Söderström, T. y Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall, New York.
- Vicario, F., Phan, M.Q., Betti, R., y Longman, R.W. (2015). Output-only observer/kalman filter identification (o3kid). *Structural Control and Health Monitoring*, 22(5), 847–872.
- Wan, Z., Li, S., Huang, Q., y Wang, T. (2014). Structural response reconstruction based on the modal superposition method in the presence of closely spaced modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 42(1), 14–30.