

# Control por Retroalimentación de Salida Basado en Pasividad para un Motor sin Escobillas de Corriente Directa

Cuauhtémoc Guerrero\* Victor Santibañez\*\*  
Juan Carlos Fabián\*\*\* Javier Ollervides\*\*

\* Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México D.F. C.P.  
09790, México, (e-mail: [cuauhtemoc.guerrero@uacm.edu.mx](mailto:cuauhtemoc.guerrero@uacm.edu.mx)).

\*\* Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La  
Laguna, Blvd. Revolución y Calzada Cuauhtémoc, Torreón, Coahuila,  
C.P. 27000, México, (e-mail: [vsantiba@itlalaguna.edu.mx](mailto:vsantiba@itlalaguna.edu.mx),  
[jollervi@itlalaguna.edu.mx](mailto:jollervi@itlalaguna.edu.mx)).

\*\*\* Universidad Nacional Autónoma de México UNAM, Ciudad  
Universitaria, Ciudad de México, México, (e-mail:  
[ingjuancarlos@comunidad.unam.mx](mailto:ingjuancarlos@comunidad.unam.mx)).

---

**Resumen:** En este trabajo se presenta una estrategia de control de seguimiento de velocidad utilizando la metodología de pasividad para un motor síncrono de imán permanente con devanados trapezoidales, el cual es conocido como motor sin escobilla de corriente directa (BLDC por sus siglas en inglés), considerando para su diseño sólo la medición de señales de corrientes de los devanados de estator y la posición angular del rotor.

*Keywords:* BLDC, Control Basado en Pasividad, distribución trapezoidal, motor síncrono.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La utilización de sistemas de control de movimiento con velocidad ajustable en distintos ámbitos ha ido en crecimiento en los últimos años, sobre todo por el incremento del uso de computadoras y sistemas electrónicos que usan dispositivos semiconductores y circuitos integrados, lo que está llevando a considerar en muchas aplicaciones motores no clásicos como lo son los motores *brushless* o a pasos. Las razones principales para considerar sistemas de control de motores a velocidad ajustable en lugar de motores a velocidad fija (Miller, 1989) son: a) ahorro de energía; b) control de velocidad o posición; c) mejora de transitorios para evitar el estrés eléctrico y mecánico causado por el arranque directo de alimentación a la línea de suministro.

De acuerdo a la clasificación que hace (Miller, 1989) respecto a los motores que se consideran sin escobillas, se puede mencionar al motor de inducción en su versión jaula de ardilla, el motor síncrono de imán permanente, el motor de reluctancia conmutada y el motor a pasos. Se puede hablar de motores clásicos, como los de corriente directa con campo devanado, los síncronos de corriente alterna o los de inducción, en el sentido que producen pares de fuerza instantáneos constantes con poco rizo, pueden funcionar con suministros de alimentación puros (sinusoidales o de corriente directa) y pueden arrancar sin controladores electrónicos. Considerando estos criterios, hay tipos de motores que no cumplen con estos, principalmente no pueden ser alimentados directamente de la línea de suministro y por lo tanto requieren de controladores electrónicos; en este tipo caen los motores de reluctancia conmutada, a pasos y síncronos de imán permanente con distribución trapezoidal.

Los motores síncronos de imán permanente, tanto los de distribución trapezoidal como los de distribución sinusoidal, tienen ventajas sobre otros tipos de motores. Quizás la más sobresaliente, respecto a los de corriente directa, es su bajo mantenimiento debido a que no contiene conmutador mecánico. Además tienen una alta densidad de potencia, lo que los hace ideales para aplicaciones de alto par respecto a su bajo peso. Si se les compara con la máquina de inducción, los motores síncronos tienen baja inercia, permitiendo respuestas dinámicas rápidas a comandos de referencias, asimismo, son más eficientes debido a que las pérdidas en el rotor son casi cero por la presencia de los imanes permanentes (Rodriguez and Emadi, 2007). La mayor desventaja de los motores de imán permanente es su alto costo y el grado de complejidad relativamente grande por el requerimiento del convertidor de electrónica de potencia para poderlos manejar (Sathyan et al., 2009).

Para los motores síncronos de imán permanente con distribución sinusoidal se han propuesto muchos controladores realizando una transformación de marco de referencia, sobre todo en el conocido como *dq*. Para los de distribución trapezoidal, no es factible realizar una transformación del marco de referencia, por lo que las técnicas que más se han utilizado para este tipo de máquinas es control de corriente por histéresis así como modulación de ancho de pulso (*PWM* por sus siglas en inglés) en conjunto con teoría de control continua. En otros casos, se utiliza control de retroalimentación de estados para lograr un control más preciso del motor BLDC (Rodriguez and Emadi, 2007). En muchas otras aplicaciones, para establecer un controlador con buena regulación de velocidad/par es suficiente el uso

de un control PI de corriente y compensador de velocidad (Chiasson, 2005)-(Krishnan, 2010).

Cabe mencionar que las máquinas conocidas como Motores sin Escobillas de Corriente Directa (*Brushless DC o BLDC motor*) son en realidad máquinas síncronas de imán permanente donde los campos magnéticos son distribuidos uniformemente (*Trapezoidal Back-Emf PM Synchronous Motor*) en el entrehierro, en lugar de estar distribuidos en forma sinusoidal. De hecho con el motor funcionando a una velocidad constante resulta que la fuerza contra-electromotriz (back emf) tiene una forma trapezoidal en el tiempo y a veces se les llama motor de fuerza contra-electromotriz trapezoidal (Chiasson, 2005). La terminología usada como "*Brushless DC motor* o BLDC" para este tipo de máquina es debido a que generalmente el motor está combinado con un decodificador (encoder) óptico, con medidores de corriente, sensores de efecto Hall para conmutación de corriente y un amplificador retroalimentado tal manera que el comportamiento del motor es como un motor de corriente directa en estado estacionario. En las últimas décadas los motores sin escobillas de corriente directa se han estado utilizando ampliamente en el ambiente industrial así como en el del transporte ya que presentan un alto desempeño y confiabilidad.

Una de las técnicas de control que más se ha implementado del motor *BLDC* es el presentado en (Chiasson, 2005), en el cual básicamente utiliza lazos PI de alta ganancia para forzar que las corrientes de estator sigan a corrientes de referencia y con esto sólo realizar el diseño de un control PID de la dinámica mecánica considerando que el par de carga es constante para asegurar que hay seguimiento de posición y velocidad angular. Hay otras propuestas de control así como identificación de parámetros utilizando lógica difusa (Abramov et al., 2014) o control sensorless como el presentado en (Concari and Troni, 2010) en donde utiliza un algoritmo basado en mediciones diferenciales de fuerzas contraelectromotrices para realizar un alto desempeño dinámico a bajas velocidades de operación.

En este trabajo se presenta un controlador de seguimiento de velocidad aprovechando las propiedades que tiene el modelo del motor *BLDC* utilizando la metodología propuesta, tanto en (Ortega et al., 1995) (en la cual aprovechan las propiedades de pasividad que presenta el modelo de un motor de inducción para diseñar un controlador de seguimiento de velocidad), así como en (Guerrero et al., 2009) (en donde se propone un controlador basado en pasividad *sensorless* para un motor de inducción); de este último se utiliza su metodología para diseñar un observador de velocidad ya que ésta no se tiene disponible en forma directa.

## 2. MODELO MATEMÁTICO DEL MOTOR SIN ESCOBILLAS DE CORRIENTE DIRECTA

El diagrama esquemático del motor síncrono de imán permanente con fuerza contra-electromotriz trapezoidal con tres devanados distribuidos uniformemente sobre la superficie del estator se muestra en la Figura 1.

Debido a esta distribución uniforme en los devanados se tiene que los campos magnéticos son uniformemente distribuidos (en lugar de ser distribuidos sinusoidalmente)

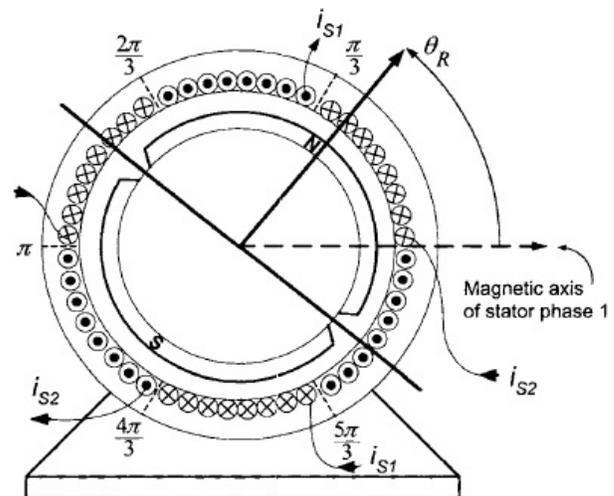


Figura 1. Construcción de una máquina de imán permanente de fuerza contra-electromotriz trapezoidal. Adaptada de (Chiasson, 2005)

por lo que las ecuaciones que describen el funcionamiento de dicho motor resultan (el modelo presentado aquí es deducido en (Chiasson, 2005), básicamente es el mismo que está reportado en (Krishnan, 2010) haciendo ciertas consideraciones en la matriz de inductancias) en forma compacta como:

$$L \frac{d}{dt} i_s = E_p E_R(\theta) \omega - R_s i_s + v_s \quad (1)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega = - \underbrace{\tau_p E_R^T(\theta) i_s}_{\tau_e} - B \omega - \tau_L \quad (2)$$

las matrices  $L$  y  $R_s$  así como el vector  $E_R$  se definen como

$$L = \begin{bmatrix} L_s & -M & -M \\ -M & L_s & -M \\ -M & -M & L_s \end{bmatrix} \quad R_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad E_R = \begin{bmatrix} E(\theta) \\ E(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ E(\theta - \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

La ecuación (1) es obtenida para los voltajes en los devanados del estator al aplicar leyes que rigen naturaleza eléctrica y magnética. Se asume que el rotor tiene un diseño de superficie montada (*surface-mounted*), el cual es el caso en general para los motores *BLDC* reales, esto trae como consecuencia que no haya salientes de tal manera que las inductancias propias son independientes del rotor (Al-Mashakbeh, 2009), por lo que  $L_s$  es la inductancia propia de los devanados del estator mientras que  $M$  es la inductancia de dispersión que se refleja en los devanados de una fase respecto a otra fase. Se asume también que se tiene un sistema trifásico balanceado, todas las resistencias de fase del estator son  $r_s$  mientras que el vector de voltajes de alimentación a los devanados de estator son  $v_s = [v_{s1} \ v_{s2} \ v_{s3}]^T$  y el vector de corrientes de estator  $i_s = [i_{s1} \ i_{s2} \ i_{s3}]^T$ . La ecuación (2) representa a la ecuación de los equilibrios de fuerzas rotacionales considerando la influencia del campo magnético del imán permanente, donde  $J$  es el momento de inercia,  $B$  es la fricción viscosa de la flecha del rotor,  $\tau_L$  es el par de carga y  $\omega$  representa la velocidad angular de la flecha del rotor.

Cabe mencionar que en operación a velocidad constante el modelo dado por (1)-(2) es muy similar al modelo del motor de corriente directa.

Debido a que la distribución de flujo en el motor *brushless* de imán permanente es trapezoidal no es posible realizar una transformación en un marco de referencia  $dq$  como el que se desarrolla para el motor síncrono de imán permanente (Krishnan, 2010), por lo que es recomendable obtener un modelo matemático en términos de variables de las fases de alimentación. Los parámetros  $E_p$  como  $\tau_p$  son constantes que relaciona la densidad del campo del imán permanente con la relación de vueltas de los devanados y longitudes del estator, las cuales se les conoce como constantes de fuerza contraelectromotriz (*back-emf*) o de par (*torque*), por lo que se considera que estas dos constantes son iguales, i.e.  $E_p = \tau_p$ . Los términos  $E(\theta + \alpha_s)$  del vector  $E_R$  son valores que relacionan en forma trapezoidal la posición angular del rotor y los ejes magnéticos de los devanados del estator con un ángulo  $\alpha_s$  los cuales tienen un marco de referencia  $abc$  desplazados  $\frac{2}{3}\pi$  entre si. El valor que toma cada término es

$$\begin{aligned} E_1(\theta) &= E(\theta) \\ E_2(\theta) &= E\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ E_3(\theta) &= E\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

y tomando como referencia solo a  $E_1$  dependiendo de la posición angular se tiene

$$E_1(\theta) = E(\theta) = \begin{cases} \frac{6\theta}{\pi}, & -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ 1, & \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \\ -\frac{6(\theta-\pi)}{\pi}, & \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6} \\ -1, & \frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Se puede observar de (1) que el valor máximo de la fuerza contra-electromotriz es el producto  $E_p\omega$  y los valores que dependen de la posición angular  $E(\theta + \alpha_s)$  tiene un valor entre 1 y -1, i.e.  $-1 \leq E(\theta + \alpha_s) \leq 1$ .

Las ecuaciones (1)-(2), considerando que  $E_p = \tau_p$  se pueden reescribir como

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{R}x + \mathcal{C}(\theta)x = Q \quad (3)$$

en donde  $x = [i_s \ \omega]^T$ ,  $Q = [v_s \ -\tau_L]^T$  y

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & J \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_s & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(\theta) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -E_p E_R(\theta) \\ E_p E_R^T(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

Por cuestiones físicas, todos los parámetros del motor *BLDC* son positivos (eléctricos y mecánicos). Se puede observar de (3) que la matriz  $\mathcal{D}$  contiene a los parámetros de los elementos almacenadores de energía (inductancias y momento de inercia), la matriz  $\mathcal{R}$  contiene a los términos que relacionan a los elementos disipadores de energía y que la matriz  $\mathcal{C}$  contiene a términos de fuerza contraelectromotriz por la influencia del imán permanente. El determinante de la matriz  $\mathcal{D}$  es  $J(L_s + M)^2(L_s - 2M)$  que de acuerdo a la estructura del motor (Chiasson,

2005) se tiene que  $L_s = \frac{7}{3}M$  por lo que resulta que el determinante es positivo, esto implica que  $\mathcal{D}$  es definida positiva. Se ve en forma directa que la matriz  $\mathcal{R}$  es definida positiva. La matriz  $\mathcal{C}(\theta)$  es antisimétrica y se puede comprobar al realizar la operación  $x^T \mathcal{C}(\theta)x = 0$ , por lo que se puede decir que esta no produce trabajo. El segundo término de (2) es el par electromagnético de origen eléctrico, por lo que se puede escribir como  $\tau_e = \tau_p E_R^T i_s$ .

Se tiene que las fuerzas externas (entradas) del sistema son los voltajes aplicados al estator  $v_s$  y el par de carga  $\tau_L$  de tal forma que se puede definir el vector de entradas como

$$u = \begin{bmatrix} v_s \\ -\tau_L \end{bmatrix}$$

y como salidas las corrientes de estator  $i_s$  y la velocidad angular  $\omega$  para tener un vector de salidas como

$$y = \begin{bmatrix} i_s \\ \omega \end{bmatrix}$$

Considerando una función de energía de almacenamiento definida positiva como

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \mathcal{D}x$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (3) es

$$\dot{V}(x) = x^T \mathcal{D}\dot{x} + \frac{1}{2}x^T \dot{\mathcal{D}}x$$

sustituyendo  $\dot{x}$  de (3) considerando el hecho de que  $\dot{\mathcal{D}} = 0$  y la antisimetría de  $\mathcal{C}(\theta)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (Q - \mathcal{C}(\theta)x - Rx) \\ &= i_s^T v_s - \omega \tau_L - x^T Rx \end{aligned}$$

integrando de 0 a  $t$  se tiene que la ecuación de balance de energía es

$$V(t) - V(0) = \int_0^t (i_s^T v_s - \omega \tau_L) ds - \int_0^t x^T Rx ds$$

de esta expresión se tiene que

$$V(t) - V(0) = \int_0^t y^T u ds - \int_0^t x^T Rx ds$$

por lo que se llega a

$$\underbrace{V(t) - V(0)}_{\text{almacenada}} + \underbrace{\lambda_{\min}\{\mathcal{R}\} \int_0^t \|x\|^2 ds}_{\text{disipada}} \leq \underbrace{\int_0^t y^T u ds}_{\text{suministrada}}$$

donde  $\lambda_{\min}\{\mathcal{R}\} > 0$ . Con esto se prueba que el mapeo  $[v_s^T \ -\tau_L]^T \rightarrow [i_s^T \ \omega]^T$  es pasivo.

### 3. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se presenta el resultado principal de este trabajo, el cual es la propuesta de un control utilizando la

metodología basada en pasividad que resuelve el problema de seguimiento de velocidad considerando sólo la medición de las corrientes de estator y la posición angular del rotor.

### 3.1 Controlador utilizando la metodología basada en pasividad

**Proposición.** Considere el modelo matemático del motor sin escobillas de corriente directa (*BLDC*) dado por (1)-(2) o en forma compacta dado por (3). Suponga que:

- Se dispone de la medición de las señales de las corrientes de los devanados del estator.
- Se dispone de la medición de la señal de la posición angular del rotor.
- Todos los parámetros del modelo del motor *BLDC* son conocidos en forma exacta.
- La velocidad angular deseada del rotor del motor *BLDC*  $\omega_d$  es una función acotada y diferenciable con primera y segunda derivada acotada.
- El par de carga  $\tau_L$  es una función desconocida pero constante.

Sean los voltajes de control de los devanados del estator dados por

$$v_s = L \frac{d}{dt} i_{sd} + R_s i_{sd} - E_p E_R(\theta) \hat{\omega} - K_e e_I \quad (4)$$

donde  $\hat{\omega}$  es la velocidad estimada del rotor y  $\omega_p$  el error entre la velocidad estimada y la velocidad deseada, mientras que las corrientes de estator deseadas  $i_{sd}$  se encuentran mediante la ecuación de estado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{sd} = & \frac{1}{E_p \|E_R(\theta)\|^2} E_R(\theta) \left( -\dot{\tau}_L - \frac{K_m}{J} \tau_L \right. \\ & - \frac{K_m}{J} E_p E_R^T(\theta) i_s - (B + K_m) \dot{\omega}_d \\ & \left. - J \ddot{\omega}_d - \frac{K_m B}{J} \hat{\omega} - E_p \dot{E}_R^T(\theta) i_{sd} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Asimismo, sea el par deseado dado por:

$$\tau_d = -\tau_L - J \frac{d}{dt} \omega_d - B \omega_d - K_m \omega_p + E_p E_R^T(\theta) e_I \quad (6)$$

con  $e_I$  el error de las corrientes de estator, mientras que el observador de velocidad de rotor es definido como

$$\dot{\hat{\omega}} = \frac{1}{J} \left( -E_p E_R^T(\theta) i_s - B \hat{\omega} - \tau_L \right) + \frac{1}{\gamma} E_p E_R^T(\theta) e_I \quad (7)$$

Bajo estas condiciones, si las ganancias  $K_e > 0$ ,

$$K_m = \epsilon_1 \frac{E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2}{(r_s + K_e)} \quad (8)$$

y

$$\gamma = \epsilon_2 \frac{J(r_s + K_e) K_m^2}{2^2 B \left( (B + K_m)(r_s + K_e) - E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2 \right)} \quad (9)$$

con  $\epsilon_1 > 1$  y  $\epsilon_2 > 1$ , el sistema en lazo cerrado logra seguimiento de velocidad global asintótico con todas las variables internas acotadas.

**Observación.** Se utiliza un observador de velocidad angular considerando el hecho que no se tiene disponible esta señal, más bien sólo se dispone de la señal de la posición angular y se evita el uso de un diferenciador para obtener la velocidad.

*Prueba del esquema propuesto* Defínanse los errores de estados como

$$e = x - x_d \quad (10)$$

donde el subíndice  $d$  denotada la señal deseada de la variable en cuestión y cada error es definido como

$$e_I = i_s - i_{sd} \quad (11)$$

$$e_\omega = \omega - \omega_d \quad (12)$$

Sumando y restando estados deseados en (3) se tiene

$$\mathcal{D}\dot{e} + \mathcal{R}e + \mathcal{C}(\theta)e = \Psi$$

donde

$$\Psi = Q - \mathcal{D}\dot{x}_d - \mathcal{R}x_d - \mathcal{C}(\theta)x_d \quad (13)$$

de tal forma que  $\Psi$  es un vector que relaciona las parte eléctricas y mecánicas como  $\Psi = [\Psi_e \ \Psi_m]^T$  de tal forma que para la parte eléctrica se tendría

$$\Psi_e = v_s - L \frac{d}{dt} i_{sd} - R_s i_{sd} + E_p E_R(\theta) \omega_d \quad (14)$$

mientras que para la parte mecánica

$$\Psi_m = -\tau_L - J \frac{d}{dt} \omega_d - B \omega_d - E_p E_R^T(\theta) i_{sd} \quad (15)$$

Asimismo, se define un error de seguimiento de velocidad como

$$\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega} \quad (16)$$

donde  $\hat{\omega}$  es la velocidad angular de rotor estimada. De acuerdo a (12) y se puede definir una nueva variable que relaciona a los errores de velocidad con el valor deseado y estimado de la velocidad

$$\omega_p = \tilde{\omega} - e_\omega = \omega_d - \hat{\omega} \quad (17)$$

El par de fuerza mecánico de origen eléctrico es el primer miembro de lado derecho de la ecuación (2), por lo que comparando con el último término del lado derecho de (15) se considera que este es el par deseado, i.e.

$$\tau_d = E_p E_R^T(\theta) i_{sd}$$

con lo que se propone un par deseado como se muestra en (6).

Sustituyendo (6) en (15) y considerando (17) se tiene

$$\Psi_m = -K_m e_\omega + K_m \tilde{\omega} - E_p E_R^T(\theta) e_I \quad (18)$$

Por otro lado, proponiendo los voltajes de alimentación en los devanados de estator como se muestra en (4) y sustituyendo en (14) y además considerando (17), se llega a

$$\Psi_e = E_p E_R(\theta) \tilde{\omega} - E_p E_R(\theta) e_\omega - K_e e_I \quad (19)$$

Asimismo, proponiendo un estimador de velocidad dado por (7) y considerando la definición del error de estados para la velocidad dada por (16), así como de la ecuación de estado de la parte mecánica del motor *BLDC* se tiene que la derivada del error de seguimiento de velocidad es

$$\dot{\tilde{\omega}} = \dot{\omega} - \dot{\hat{\omega}} \quad (20)$$

Sustituyendo (7) en (20) y considerando (16) se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \left[ -\frac{1}{J} E_p E_R^T(\theta) i_s - \frac{B}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{J} (-E_p E_R^T(\theta) i_s - B\omega - \tau_L) + \frac{1}{\gamma} E_p E_R^T(\theta) e_I \right] \\ \dot{\omega} &= -\frac{B}{J} \tilde{\omega} - \frac{1}{\gamma} E_p E_R^T(\theta) e_I\end{aligned}\quad (21)$$

Por otro lado, se define un error de par como

$$\begin{aligned}\xi &= \tau_e - \tau_d = E_p E_R^T(\theta) i_s - E_p E_R^T(\theta) i_{sd} \\ &= E_p E_R^T(\theta) e_I\end{aligned}\quad (22)$$

Tomando la derivada de  $\xi$  respecto al tiempo se tiene

$$\dot{\xi} = \dot{\tau}_e - \dot{\tau}_d = E_p E_R^T(\theta) \frac{d}{dt} i_s + E_p \dot{E}_R^T(\theta) i_s - \dot{\tau}_d\quad (23)$$

Por lo tanto, se requiere de la derivada del par deseado, el cual si se considera (6) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_d &= -\dot{\tau}_L - J\ddot{\omega}_d - B\dot{\omega}_d - K_m \dot{\omega}_p \\ &\quad + E_p E_R^T(\theta) \dot{e}_I + E_p \dot{E}_R^T(\theta) e_I\end{aligned}\quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (23) se tiene que la derivada del error de par es

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{\tau}_L + J\ddot{\omega}_d + (B + K_m) \dot{\omega}_d - K_m \dot{\omega} \\ &\quad + E_p E_R^T(\theta) \frac{d}{dt} i_{sd} + E_p \dot{E}_R^T(\theta) i_{sd}\end{aligned}$$

Sustituyendo en esta última expresión la velocidad estimada dada por (7) se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{\tau}_L + J\ddot{\omega}_d + (B + K_m) \dot{\omega}_d + \frac{K_m}{J} E_p E_R^T(\theta) i_s \\ &\quad + \frac{K_m B}{J} \dot{\omega} + \frac{K_m}{J} \tau_L - \frac{K_m}{\gamma} E_p E_R^T(\theta) e_I \\ &\quad + E_p E_R^T(\theta) \frac{d}{dt} i_{sd} + E_p \dot{E}_R^T(\theta) i_{sd}\end{aligned}\quad (25)$$

Definiendo las corrientes deseadas de los devanados de estator (5) y sustituyendo en (25) se tiene

$$\dot{\xi} = -\frac{K_m}{\gamma} \xi\quad (26)$$

que si se considera las condiciones de  $K_m$  y  $\gamma$  dadas por (8)-(9) el cociente del lado derecho de (26) es positivo por lo que  $\xi \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, si se define una función definida positiva, en la cual se consideran los errores de las variables involucradas, dada por

$$H_e = \frac{1}{2} e^T \mathcal{D} e + \frac{\gamma B}{2} \tilde{\omega}^2\quad (27)$$

Derivando (27) respecto al tiempo se tiene

$$\dot{H}_e = e^T \mathcal{D} \dot{e} + \gamma \tilde{\omega} \dot{\omega}\quad (28)$$

Sustituyendo en (28) tanto (13) como (21) y teniendo en cuenta la antisimetría de  $\mathcal{C}$  se llega

$$\dot{H}_e = -e^T \mathcal{R} e + e_I^T \Psi_e + e_\omega \Psi_m - \frac{\gamma B}{J} \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega} E_p E_R^T(\theta) e_I$$

Teniendo en cuenta (18), (19) así como (21) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{H}_e &= -e_I^T R_s e_I - B e_\omega^2 - 2e_\omega E_p E_R^T(\theta) e_I - e_I^T K_e e_I \\ &\quad - K_m e_\omega^2 + K_m e_\omega \tilde{\omega} - \frac{\gamma B}{J} \tilde{\omega}^2\end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede reescribir en forma matricial como

$$\dot{H}_e = - \left[ e_I^T \quad e_\omega \quad \tilde{\omega} \right] \underbrace{\begin{bmatrix} (r_s + K_e) I_3 & E_p E_R^T(\theta) & 0 \\ E_p E_R^T(\theta) & B + K_m & -\frac{1}{2} K_m \\ 0 & -\frac{1}{2} K_m & \frac{\gamma B}{J} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} e_I \\ e_\omega \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}\quad (29)$$

Para garantizar que  $\dot{H}_e$  sea definida negativa basta con que la matriz  $Q$  sea definida positiva, con lo que se requiere que los menores principales de  $Q$  sean positivos.

Para los tres primeros principales de la matriz  $Q$  se debe de cumplir que

$$K_e > -r_s$$

Para obtener las condiciones del cuarto menor principal se necesita conocer el determinante de submatriz de  $Q$  que contiene los primeros 4 renglones y columnas definida como  $Q_1$ , i.e.,

$$\det Q_1 = (r_s + K_e)^2 \left( (B + K_m) (r_s + K_e) - E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2 \right)$$

Para que el determinante de  $Q_1$  sea positivo se necesita cumplir la siguiente condición

$$K_m > \frac{E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2}{(r_s + K_e)} - B$$

Para el quinto menor principal se necesita el siguiente determinante de  $Q$  el cual es

$$\det(Q) = \frac{2^2 \gamma B (r_s + K_e)^2 \vartheta - J (r_s + K_e)^3 K_m^2}{2^2 J}$$

donde

$$\vartheta = (B + K_m) (r_s + K_e) - E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2$$

Para que el determinante de  $Q$  sea positivo se requiere cumplir la siguiente condición

$$\gamma > \frac{J (r_s + K_e) K_m^2}{2^2 B \left( (B + K_m) (r_s + K_e) - E_p^2 \|E_R(\theta)\|^2 \right)}$$

**Observación.** Esta propuesta de controlador no es *sensorless*, ya que se necesita la disponibilidad de la señal de la posición del rotor. Queda pendiente relajar esta condición y encontrar una propuesta de controlador *sensorless*.

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El algoritmo del esquema de control propuesto, dado por las ecuaciones (4)-(7) junto con las ganancias expresadas por (8)-(9), se simuló via SIMULINK/MATLAB<sup>®</sup> con un paso de integración fijo de 0.01 ms y el método de integración ode8 (Dormand-Prince), utilizando sólo bloques básicos de SIMULINK con una señal de referencia como

$$\omega_d = 100 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\quad (30)$$

Cabe mencionar que se utilizó esta referencia debido a que esta señal debe ser dos veces diferenciable.

Los parámetros del motor que se utilizaron se presentan en el cuadro 1 y el voltaje máximo (pico) de alimentación es de 200 V así como una corriente máxima de 10 A. Estos datos son obtenidos de (Chiasson, 2005).

Cuadro 1. Parámetros del motor BLDC

Resistencia de estator	$R_s = 7 \Omega$
Inductancia de estator	$L_s = 0.0027 \text{ mH}$
Inductancia mutua	$M = 0.0015 \text{ mH}$
Constante <i>back-emf</i>	$E_p = 0.5128 \text{ N} \cdot \text{m/A}$
Coefficiente de momento de inercia	$J = 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Coefficiente de fricción viscosa	$B = 0.002 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$

Para realizar la simulación se consideró un par de carga constante de 0.5 Nm y las ganancias del controlador con los siguientes valores

$$\begin{aligned} K_e &= 1.5 \\ \epsilon_1 &= 500 \\ \epsilon_2 &= 10000 \end{aligned}$$

En la Figura 2 se muestra la respuesta de velocidad del motor BLDC que presenta con una señal de referencia como se da en (30). La señal de estimación de la velocidad está sobrepuesta a la señal de la velocidad real de la flecha del BLDC.

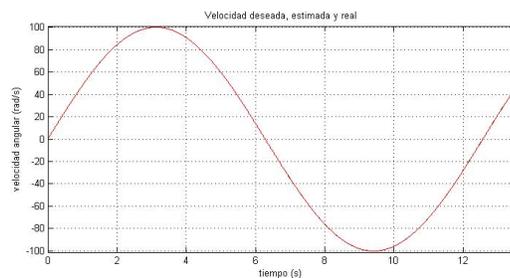


Figura 2. Respuesta de velocidad del BLDC.

Asimismo, en la Figura 3 se muestra los voltajes que se requieren en el estator ante la señal de velocidad de referencia (30) y se puede observar que estos están por abajo de los voltajes máximos del motor con un pico de voltaje de 200 V al inicio del experimento.

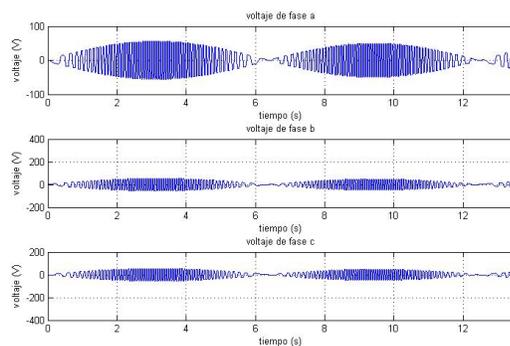


Figura 3. Voltajes de estator del BLDC.

Por último, en la Figura 4 se pueden observar las corrientes de estator con una amplitud muy por debajo de la corriente máxima del BLDC.

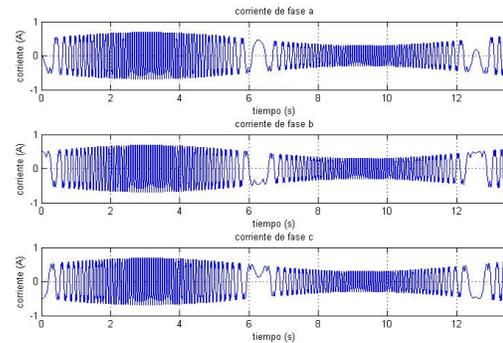


Figura 4. Corrientes de estator del BLDC.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un esquema de control para el motor BLDC utilizando la metodología de pasividad que garantiza seguimiento asintótico de velocidad. Para realizar el diseño del controlador sólo se consideró la medición de corrientes de los devanados de estator así como de la posición angular de la flecha utilizando un observador de velocidad angular.

## AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo es apoyado por los proyectos TecNM y CONACYT 134534 así como el proyecto PI2013-14 de la UACM.

## REFERENCIAS

- Abramov, I.V., Nikitin, Y.R., Abramov, A.I., Sosnovich, E.V., and Božek, P. (2014). Control and diagnostic model of brushless dc motor. *Journal of Electrical Engineering*, 65(5), 277–282.
- Al-Mashakbeh, A.S.O. (2009). Proportional integral and derivative control of brushless dc motor. *European Journal of Scientific Research*, 35(2), 198–203.
- Chiasson, J. (2005). *Modeling and high performance control of electric machines*, volume 26. John Wiley & Sons.
- Concari, C. and Troni, F. (2010). Sensorless control of bldc motors at low speed based on differential bemb measurement. In *2010 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, 1772–1777. IEEE.
- Guerrero, C., Espinosa-Pérez, G., Moreno, J., and Álvarez-Salas, R. (2009). On the globally defined sensorless control of induction motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(2), 117–134.
- Krishnan, R. (2010). *Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives*. CRC press.
- Miller, T.J.E. (1989). *Brushless permanent-magnet and reluctance motor drives*. New York, NY (USA); Oxford University Press.
- Ortega, R., Nicklasson, P.J., and Espinosa-Pérez, G. (1995). On speed control of induction motors. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 5, 3521–3525. IEEE.
- Rodriguez, F. and Emadi, A. (2007). A novel digital control technique for brushless dc motor drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 54(5), 2365–2373.
- Sathyan, A., Milivojevic, N., Lee, Y.J., Krishnamurthy, M., and Emadi, A. (2009). An fpga-based novel digital pwm control scheme for bldc motor drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 56(8), 3040–3049.