

## Obtención de la Respuesta Impulsiva de un Sistema mediante el Uso de Secuencias Binarias Pseudo-Aleatorias.

Salinas Hernández Andrés. \*  
Jiménez Grajales Ma. Ángela M. \*\*  
Ramírez López Raúl. \*\*\*

*\*Instituto Tecnológico de Querétaro, Línea: Automatización y Sustentabilidad, Querétaro, QRO 76000  
México*

*\*(Tel: 229-266-3156; e-mail: andres.salinas.hdez@gmail.com).*

*\*\* (e-mail: mamjg24@gmail.com).*

*\*\*\* (Tel: 442-247-3719; e-mail: rramirez@mail.itq.edu.mx).*

---

**Abstract:** En la mayoría de los procesos industriales, muchas veces resulta importante caracterizar los comportamientos dinámicos de varios sistemas o equipos; esto con el fin de comprender los parámetros a los que está sometido y su dinámica ante entradas lineales o bajo comportamientos no lineales, casi siempre presentes en la práctica. En este artículo, se describe la identificación de un sistema basado en el uso de secuencias binarias pseudo-aleatorias (SBSA) aplicado a la entrada del mismo, con el fin de realizar una estimación de su respuesta impulsiva; la obtención de la respuesta impulsiva podrá proporcionar la información suficiente para determinar los parámetros del sistema y su comportamiento dinámico.

**Keywords:** System identification, pseudo random sequences, impulse response, linear motors, data acquisition.

---

### 1. INTRODUCCIÓN.

La identificación de procesos se refiere al procedimiento para obtener los parámetros matemáticos a partir de la construcción de un modelo dinámico del sistema analizado. Tomando en cuenta que la mayoría de los procesos reales constituyen una caja negra, en la que se desconoce información del mismo salvo sus entradas y salidas, la identificación parte de la consideración de los mismos y el entorno que lo rodea para determinar un modelo ajustado al comportamiento del proceso o sistema.

A pesar de que existen diferencias considerables entre un proceso real y el modelo dinámico aproximado, existen métodos muy efectivos para aproximar la respuesta de identificación que ayuden al usuario a proponer un resultado válido. Considerando que el sistema en ocasiones es casi imposible de detener, lo cual evita pérdidas económicas a los encargados del mismo, es necesario entonces partir de métodos no dañinos para la respuesta del sistema que ayuden a facilitar la identificación de los parámetros antes mencionados.

#### 1.1 Antecedentes.

Existen diferentes enfoques para la identificación de sistemas, todos ellos utilizando metodologías diversas en base a la medición de las variables de salida y entrada del proceso mientras se mantiene en operación. Se pueden obtener resultados usando la simple observación de las Otra característica observable de las señales aleatorias es que al ser incluidas en el cálculo de la integral de correlación con ella misma, su función es igualada a la delta de Dirac. La

condiciones físicas del sistema, o bien, mediante técnicas recursivas (Gil, et al., 2015).

En el contexto de los sistemas no lineales, para obtener esta información, la identificación se realiza mediante la construcción de un modelo aproximado, para luego realizar la estimación de sus parámetros. Algunos métodos utilizados en estos casos se ejemplifican mediante el uso de redes neuronales, series de Volterra y métodos NARMAX (siglas para modelo no lineal autorregresivo de media móvil con entradas exógenas) (Jin, et al., 2001).

Uno de los enfoques principales utilizados en sistemas lineales es la identificación experimental mediante señales especiales, las cuales cumplen con ciertas características matemáticas que las hacen únicas y efectivas al ser aplicadas en un proceso, no interrumpiendo el funcionamiento adecuado del mismo, pero sí permitiendo el uso de funciones matemáticas que proporcionen la información suficiente para determinar el modelo.

Para efectos de lograr una señal que no interrumpa el funcionamiento del sistema a analizar, una propuesta viable es utilizar señales aleatorias, que son no determinísticas y cada valor es considerado al azar en un tiempo determinado. Estas señales sólo pueden ser caracterizadas de manera estadística. Las señales aleatorias se pueden sobreponer a los valores de una señal de entrada sin que afecte el proceso de identificación (Fairweather & Foster, 2011).

integral de correlación de una señal con ella misma es definida por la ecuación 1.

$$\Phi_{uu}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t-\theta)dt \quad (1)$$

Por su parte, la función de correlación cruzada de 2 funciones, generalmente consideradas  $y(t),u(t)$ , se define en base a la ecuación 2.

$$\Phi_{yu}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)u(t-\theta)dt \quad (2)$$

Se considera que  $y(t)$  y  $u(t)$  son, respectivamente, la salida y la entrada de un sistema lineal (Pardo, 2014). Al realizar la integral de convolución, se puede obtener información de las propiedades dinámicas del sistema analizado. Esto se realiza utilizando la integral de convolución, teniendo a  $g(\tau)$  como la respuesta impulsiva del sistema ante una entrada  $u(t)$ , tal como muestra la ecuación 3:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

Desarrollando la integral, y realizando la inversión del orden de integración de la misma, se puede obtener la ecuación 4, conocida como la ecuación de Wiener-Hopf:

$$\Phi_{yu}(\theta) = \int_0^{\infty} g(\tau)\Phi_{uu}(\theta-\tau)d\tau \quad (4)$$

Considerando ahora que la señal de entrada al sistema es una señal aleatoria, es decir  $\Phi_{uu}(t)=\delta(t)$ , se puede sustituir esto en la ecuación de Wiener-Hopf para obtener la respuesta impulsiva del sistema correspondiente al tiempo  $\theta$  de desplazamiento entre la entrada y la salida, representada por la ecuación 5:

$$\Phi_{yu}(\theta) = \int_0^{\infty} g(\tau)\delta(\theta-\tau)d\tau = g(\theta) \quad (5)$$

Si bien se mencionó que la señal de entrada contiene una señal aleatoria, es importante considerar cuales podrían ser utilizadas para que el cálculo de la respuesta impulsiva sea satisfactorio. Dos de estas señales son: el ruido analógico generado con un espectro de frecuencia mayor que el ancho de banda del sistema y las secuencias binarias pseudo-aleatorias (SBSA).

Las SBSA son un grupo de secuencias que presentan propiedades similares a las del ruido blanco. Estas se distinguen de las señales aleatorias en que muestran una periodicidad; es decir, que se encuentran formadas por una serie periódica de números positivos y negativos (Naszodi, 1979). Las SBSA se codifican mediante secuencias de ceros y unos que satisface la ecuación 6:

$$x(t) = a_m D^m x(t) \oplus a_{m-1} D^{m-1} x(t) \oplus \dots \oplus a_1 D x(t) \quad (6)$$

En donde:

D: Operador de retardo, de manera que:

$$D^m x(t) = x(t-m)$$

(+): Operador de suma módulo 2 con reglas:

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

$x(t)$ : Variable binaria que asume valores 0 o 1.

$a_i$ : Coeficientes binarios que asumen valores 0 o 1.

m: Orden de la secuencia.

Considerada la SBSA, se puede sobreponer sobre una señal de entrada a un sistema de manera que:

$$u(t) = u_n(t) + r(t)$$

Donde  $u_n(t)$  es la señal de operación normal, y  $r(t)$  es la SBSA sobrepuesta. La salida, por tanto, será acorde a la ecuación 7:

$$y(t) = y_u(t) + y_r(t) \quad (7)$$

Donde  $y_u(t)$  y  $y_r(t)$  son las respuestas del sistema correspondientes a la señal de operación normal y la SBSA, respectivamente. Debido a que las señales de respuesta no se pueden distinguir a partir de la medición de  $y(t)$ , se puede realizar la correlación cruzada entre la señal de ruido y la salida completa para así obtener la respuesta impulsiva estimada (Moudgalya, 2006).

## 2. METODOLOGÍA.

### 2.1 Caracterización del sistema.

Para la identificación del sistema, se parte de la obtención de la respuesta en lazo abierto a una señal de escalón. Para ello, se plantea el circuito para el control de un motor de corriente directa con las siguientes características (Tabla 1).

Tabla 1. Características del motor.

Placa de datos del motor	
Modelo	6015S
R.P.M.	2200-2400
Voltaje nominal	12 VCD
Corriente	0.13 A
Carga	Continua
Potencia	1/500 HP (1.56 W)
Máxima temperatura de funcionamiento	40 °C

La obtención de los datos mediante el uso del osciloscopio se observan en la figura 1.

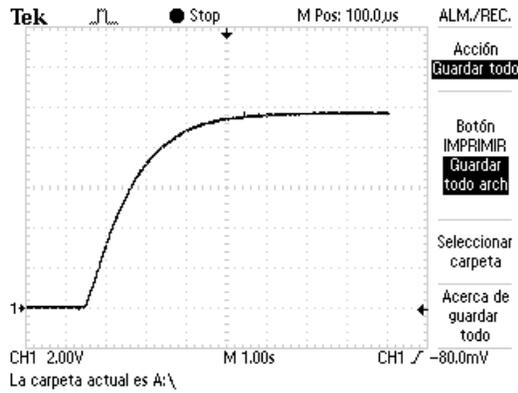


Fig. 1. Señal de respuesta del motor de corriente directa en lazo abierto.

Una vez obtenidos los datos, se procedió a realizar el cálculo del modelo del sistema mediante la herramienta de identificación 'ident' de Matlab©. La presentación de los valores que conforman a la función de transferencia del sistema se observan en la figura 2.

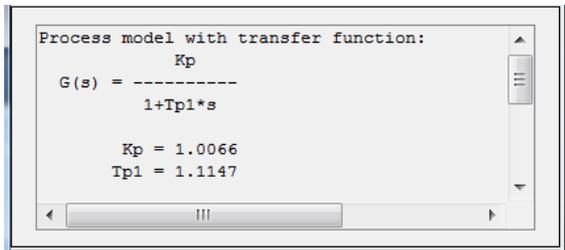


Fig. 2. Obtención de la función de transferencia del sistema.

### 3. SIMULACIÓN.

#### 3.1 Generación de secuencia binaria pseudoaleatoria (SBSA).

Para la generación de la SBSA, se procede generando en una variable un vector con valores aleatorios, el cual parte de 1889 filas en 1 columna. La longitud de este vector corresponde a la longitud de los datos que proporcionó la respuesta en lazo abierto del circuito del motor.

Posteriormente, se reduce en valores medios el conjunto de números aleatorios generados, con el fin de reducir la amplitud de los valores del vector. Debido a que se busca una representación binaria de esta aleatoriedad, se debe establecer una condición de igualdad booleana con respecto a 0. El vector resultante se almacena en un nuevo vector, y el tipo de dato booleano se transforma a un formato doble, tal como muestra la figura 3.

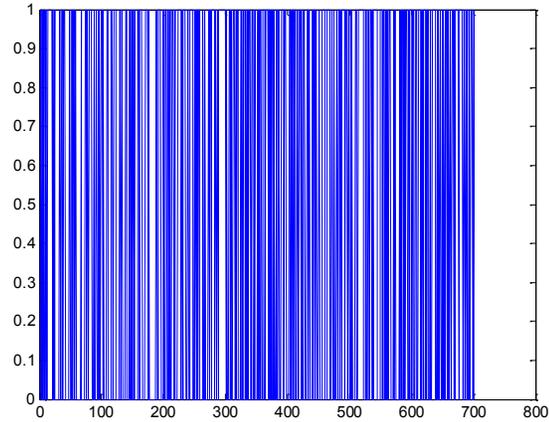


Fig. 3. Secuencia binaria pseudo-aleatoria generada.

Posterior a esto, se procede a acondicionar la SBSA para ser sumada a la señal de entrada de referencia. Para ello, se convierten todos los valores iguales a 0 a una cantidad negativa opuesta al valor binario positivo.

Finalmente, el vector de datos resultante se multiplica por un porcentaje, que corresponde al nivel de perturbación o ruido que se le agregará a la señal de entrada; este es considerado del 5%. Para efectos de operación, la señal de entrada al sistema se considera de 10 VCD; por tanto, el ruido sumado a la señal hará que el voltaje que reciba el motor varíe entre 10.05 y 9.95 VCD. La entrada resultante se observa en la figura 4.

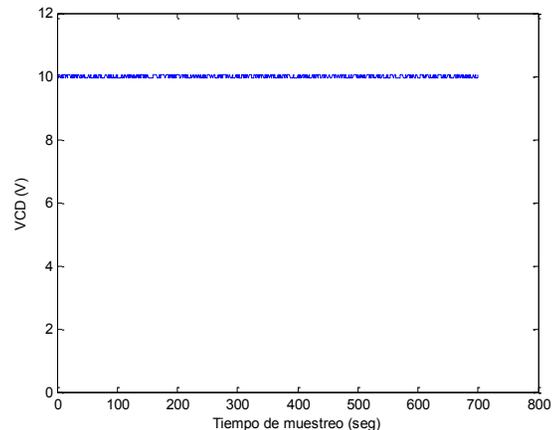


Fig. 4. Señal de entrada con perturbación en base a una SBSA.

#### 3.2 Simulación de respuesta escalón con perturbación.

Una vez generada la SBSA, se procede a simular la respuesta que se obtendría en el sistema al aplicarse una entrada con la perturbación anterior.

En este caso, el comando 'lsim' permite simular la respuesta lineal de la función de transferencia  $g$  con la entrada con

perturbación durante un periodo de tiempo. Cabe resaltar que el vector de tiempo es  $t = (0:0.1:188.8)'$ ;

La respuesta de esta simulación se puede observar en la figura 5.

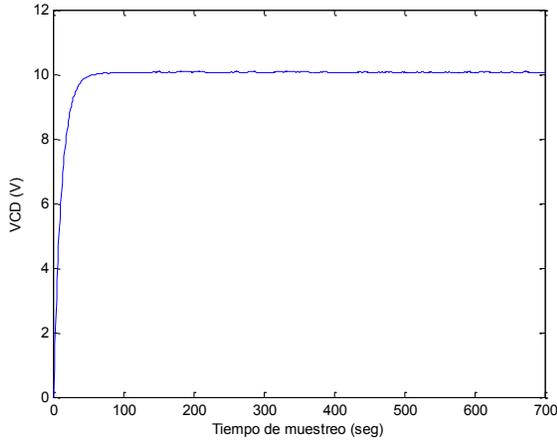


Fig. 5. Respuesta de la simulación del sistema con una entrada sobrepuesta con una SBSA.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN.

##### 4.1 Obtención de la respuesta impulsiva del sistema.

Una vez obtenida la respuesta medida con respecto a la entrada con perturbación, se debe proceder a la correlación de las señales para obtener la respuesta impulsiva del sistema. Para ello, se pueden realizar diferentes procedimientos. Uno de los más confiables es la utilización de la estimación de la respuesta impulsiva del sistema. El procedimiento para su obtención es el siguiente:

Teniendo los datos de la salida y la entrada del sistema, se procede a crear objeto que contiene la información de la señal de entrada, la salida del sistema y el tiempo de muestreo de cada dato.

El objeto de información contiene los valores de la respuesta  $y(t)$ , la entrada con perturbación y el tiempo de muestreo de la simulación de la respuesta del tiempo  $t$ , que en este caso resultó de 0.1 unidades.

Posteriormente, se calcula la respuesta impulsiva del sistema. De la información obtenida, se pudo observar que la estimación de la respuesta impulsiva de los datos contiene un ajuste del 96.45%, lo cual da bastante validez al procedimiento. En la figura 6 se puede ver la gráfica resultante al graficar la respuesta.

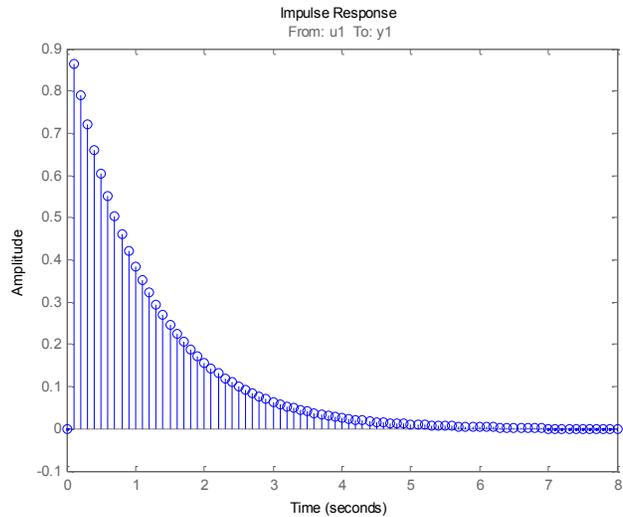


Fig. 6. Estimación de la respuesta impulsiva del sistema.

Dentro del gráfico generado, existe una cantidad de variables e información que lo conforman; sin embargo, la variable 'num' es la más importante, ya que al graficarla, se puede obtener la respuesta impulsiva pero en forma de un vector, tal como lo muestra la figura 7.

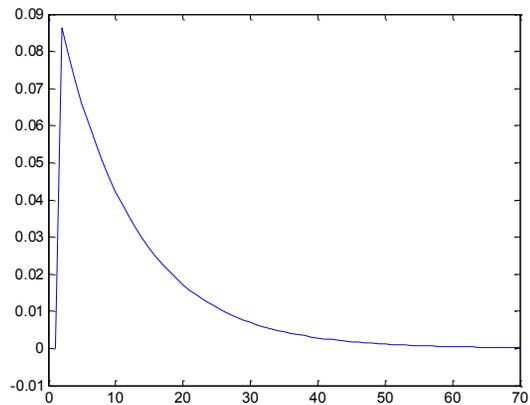


Fig. 7. Gráfica de la variable que representa la respuesta impulsiva del sistema.

La señal obtenida resulta importante, ya que como se mencionó, al convolucionar ésta con cualquier entrada, se podrá obtener información necesaria para estimar la función de transferencia del sistema analizado. El resultado de la convolución se muestra en la figura 8, en donde la entrada fue considerada como una señal escalón de 10 VCD.

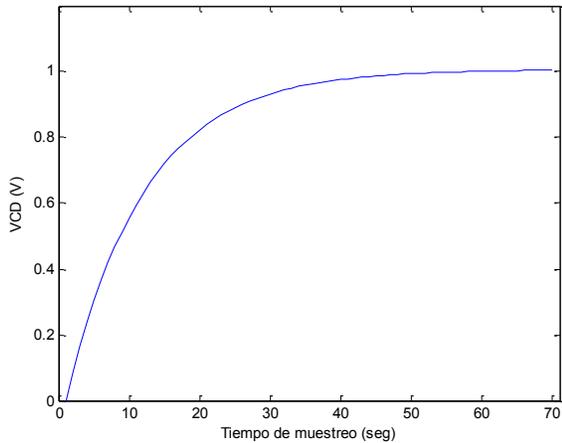


Fig. 8. Convolución de la respuesta impulsiva del sistema con una referencia unitaria.

Mediante esta respuesta, se puede proceder con la identificación como se hizo anteriormente; debido a que la convolución duplica la señal y la invierte en determinado tiempo, es necesario identificar cuál de las dos secciones corresponde a la respuesta escalón. Con base en la experiencia, se consideran los valores previos a la inversión de la señal, y se procede a estimar el modelo.

Realizando el procedimiento anterior, se obtiene la función de transferencia planteada al principio de la simulación, satisfaciendo el objetivo de la identificación. La figura 9 presenta la estimación del modelo de la señal obtenida, mostrando una concordancia del 100%.

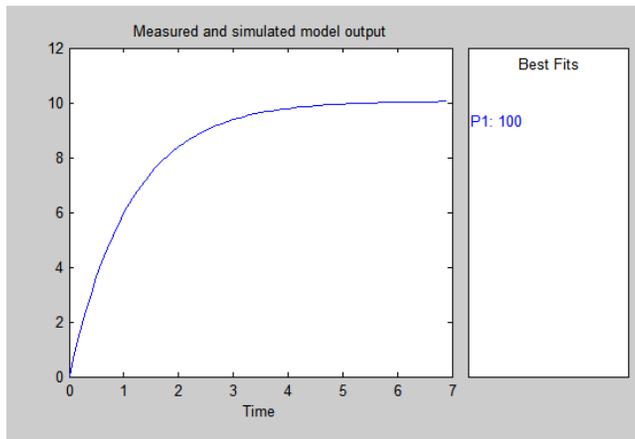


Fig. 9. Estimación del modelo con base en la señal convolucionada.

## 5. CONCLUSIONES.

Al realizar los procedimientos descritos anteriormente, se puede observar las ventajas que presenta esta identificación con métodos analíticos y/o aquellos que utilizan señales diferentes, debido a que la implementación del ruido sobre la señal de entrada del sistema no causó interrupciones importantes al proceso, y permitió una estimación bastante confiable del resultado.

Uno de los principales problemas que se tuvieron durante la elaboración de este reporte fue la implementación de los comandos para la correlación predeterminados por Matlab®, los cuales son métodos directos para calcular la integral de correlación cruzada de 2 funciones. Los resultados obtenidos no concordaban en primera instancia con la señal de respuesta impulsiva, además de que los datos finales reflejaban el doble de la longitud de las funciones de salida y entrada con perturbación.

Se plantea que estos errores, así como la metodología final para la obtención de la respuesta impulsiva podrían requerir una futura investigación y mejora, dado que los datos obtenidos sí permiten obtener una respuesta impulsiva acorde a un sistema de primer orden, como lo es el motor de corriente directa.

Una recomendación surgida de la realización de este análisis, sería la revisión de los comandos para calcular la correlación cruzada de señales en Matlab, teniendo como referencia los resultados obtenidos mediante el método de estimación de la respuesta impulsiva descritos anteriormente.

## REFERENCIAS.

Fairweather, A. J. & Foster, M., 2011. Battery parameter identification with Pseudo Random Binary Sequence excitation (PRBS). *Journal of Power Sources*, 8 Julio, 196(22), p. 9398–9406.

Gil, P., Palma, L., Santos, F. & Cardoso, A., 2015. Recursive subspace system identification for parametric fault detection in nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 31 Agosto, 37(1), pp. 444-455.

Jin, G., Sain, M. K., Pham, K. D. & Ramallo, J. C., 2001. Modeling MR-dampers: a nonlinear blackbox approach. *Arlington, IEEE*, pp. 429-434.

Moudgalya, K. M., 2006. Identification of FIR Process. [En línea] Available at: <http://www.che.iitb.ac.in/faculty/km/cl692/07sep06-3.pdf>

[Último acceso: 8 Junio 2016].

Naszodi, L. J., 1979. On Digital Filtration in Correlation Time-of-Flight Spectrometry. *Nuclear Instruments and Methods*, 1 Abril, 161(1), pp. 137-140.

Pardo, B., 2014. Convolution and Correlation. [En línea] Available at: <http://www.cs.northwestern.edu/~pardo/courses/eecs352/lectures/MPM14-Convolution.pdf>[Último acceso: 8 Junio 2016].

Wiener, N., 1949. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series With Engineering Applications*. Primera ed. Massachusetts: MIT Press Classic.

MATLAB version 8.1.0.604 Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.