

# Identificación de parámetros de un ducto con tomas laterales<sup>\*</sup>

Raúl Cayetano<sup>\*</sup> Cristina Verde<sup>\*</sup> Rolando Carrera<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
México, CDMX, (e-mail: rcarrera@unam.mx)*

---

Resumen: La estimación del coeficiente de fricción de un ducto es una tarea importantes debido a que los algoritmos de localización de fugas se encuentran basados en el modelo matemático del sistema que depende de dicho parámetro. Se propone una solución novedosa para el problema de estimación del coeficiente de fricción en tiempo real empleando técnicas de identificación de parámetros y considerando puntos de extracción en cualquier posición del ducto. En este trabajo se valida este parámetro en condiciones de una toma lateral en el ducto piloto que se encuentra en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Se usa un modelo discreto de parámetros concentrados para la identificación. La metodología es validada mediante simulación y datos experimentales.

Palabras Clave: Identificación paramétrica, ductos, modelos matemáticos, equivalentes discretos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El empleo de ductos o tuberías como medio de transporte de fluidos ha sido de vital importancia para muchos países, tan sólo en México Pemex (2012) reporta que existen más de 14,000 km de ductos para transporte de productos derivados del petróleo; es por esto que fallas en estos sistemas deben ser identificadas a la brevedad. Para ello se han desarrollado diferentes métodos LDI<sup>1</sup> para la detección y localización de fugas en ductos, métodos, en su mayoría, basados en modelos analíticos del sistema, por lo que aquellos parámetros físicos asociados al fenómeno deben conocerse de manera precisa, como han reportado, entre otros, Siebert (1981) y Torres et al. (2014).

El problema de la estimación del coeficiente de fricción en ductos ha sido ampliamente investigado, de tal manera que en el campo de ingeniería hidráulica se han propuesto diferentes modelos. En Bergant et al. (2010), se analizan dos modelos de fricción no estacionaria, el modelo de Zielke y el de Brunone, en los cuales la fricción es representada como la suma de un término cuasi-estacionario  $f_q$  y un término no estacionario  $f_u$ . En Billmann y Isermann (1987) y Kowalczyk y Gunawickrama (2004) se propone hacer una identificación en línea con mínimos cuadrados. En otros trabajos se han aplicado diferentes ecuaciones estáticas como la reportada en Carrera y Verde (2001), en donde se estima el coeficiente de fricción empleando mediciones de presión y flujo en los extremos del ducto. Por otra parte, la ecuación propuesta por Swamee-Jain, que es función del flujo a través del ducto, el número de Reynolds y otros parámetros físicos, ha sido empleada en el trabajo de Navarro et al. (2011), pero no se han encontrado condiciones que permitan ver los efectos de

dicho coeficiente cuando se tienen tomas laterales. En Dulhoste et al. (2011) se evalúan diferentes modelos de fricción para tuberías, entre los cuales resalta un modelo no estacionario que involucra variaciones del flujo en espacio y tiempo; sin embargo la complejidad del modelo no estacionario no representa una mejora en la localización de fugas.

Un aspecto importante de los modelos desarrollados para detección de fugas es que asumen tuberías con perfiles topográficos horizontales, obtenidos mediante una transformación del ducto (veáse Saldarriaga (2003)). Otro aspecto es el de la longitud equivalente, el método empírico usado es el empleo de hojas de datos que indican la longitud equivalente de un ducto para los diferentes tipos de accesorios, Viejo (1972). En Navarro et al. (2011) se propone la estimación de la longitud mediante un observador de Kalman; sin embargo, la aplicación de este método requiere del conocimiento del coeficiente de fricción que es resuelto con la aplicación de la ecuación de Swamee-Jain, la cual es función del diámetro, rugosidad, flujo, y del número de Reynolds, el inconveniente de este procedimiento es que el parámetro de rugosidad es difícil de estimar y cambia con el envejecimiento de los ductos.

Cuando se considera solamente un coeficiente de fricción en todo el ducto y se dispone solamente de mediciones de flujo y presión en los extremos del ducto, la estimación del coeficiente genera un error cuando el ducto presenta un ramal, sea fuga o punto de toma, dado que los flujos aguas abajo y arriba con respecto a la extracción son distintos. Este fenómeno provoca errores en la detección de fugas sobre todo cuando los flujos extraídos son considerables. Sin embargo poco se conoce sobre los límites admisibles para usar un solo coeficiente de fricción en todo el ducto. Los hechos anteriores motivaron el desarrollo de este

<sup>\*</sup> Proyecto IT100716 apoyado por DGAPA-UNAM, CONACYT

<sup>1</sup> De sus siglas en inglés, *Leak Detection and Isolation*

trabajo, en el que se presenta un algoritmo recursivo para estimar los coeficientes de fricción usando técnicas de identificación propuestas por Ljung (1999) e Isermann (2011). Se toma en cuenta que la operación normal de un ducto contempla la presencia de una extracción en un punto arbitrario, pero conocido.

### 1.1 Descripción de la planta piloto

En el Instituto de Ingeniería se construyó un ducto piloto para probar algoritmos de diagnóstico de fugas, ver Fig. 1, tiene diversos tipos de válvulas para emular fugas, como se describe en Carrera y Verde (2010). El ducto consta de los siguientes elementos: tanque de almacenamiento con capacidad de  $10 \text{ m}^3$ , bomba hidráulica de 7.5 HP, tubería de hierro de  $0.1016 \text{ m}$  de diámetro y longitud de  $167.72 \text{ m}$  en serpentín sobre un plano vertical, tres servoválvulas, sensores de flujo y presión en los extremos del ducto y un sensor de flujo ubicado en la válvula de fuga, seis puntos de medición de presión intermedios, módulo de adquisición de datos BK 9000 de Beckhoff con conexión ethernet, inversor Mitsubishi para el control del motor que impulsa a la bomba hidráulica, PC portátil con software *LabVIEW* de *National Instruments* que se comunica con el módulo Beckhoff vía ethernet. El sistema permite muestrear los datos con un periodo mínimo de  $1 \text{ ms}$ .



Figura 1. Vista lateral de del ducto piloto

En la Figura 2 se muestra el diagrama esquemático del ducto. Se tiene a la entrada y a la salida del serpentín dos carretes con instrumentos de medición (presión y flujo). Estos dos puntos constituyen el inicio y fin del ducto que se monitorea. Además, las puntos  $Hei$  corresponden a puntos de medición de presión usados en la caracterización del modelo. También se tienen seis válvulas intermedias donde se pueden provocar extracciones cuyas localizaciones se muestran en la Tabla 1.

## 2. MODELO DINÁMICO

Chaudhry (2014) propone el modelo asumiendo volumen de control en un ducto con pendiente variable, área

Válvula	Posición [m]
$v - 1$	11.5
$v - 2$	43.3
$v - 3$	67.3
$v - 4$	98.9
$v - 5$	122.9
$v - 6$	154.5

Tabla 1. Ubicación de válvulas

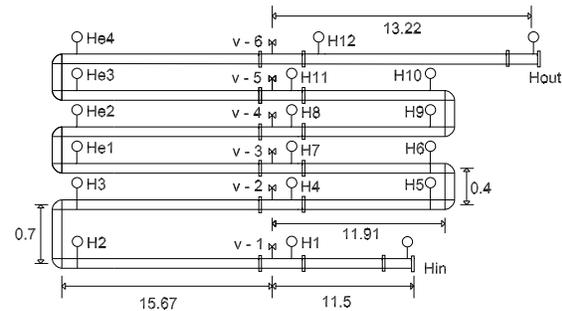


Figura 2. Diagrama del ducto piloto

transversal constante, densidad del fluido constante y cambios convectivos en la velocidad despreciables, las ecuaciones de momento y continuidad que describen la dinámica del fluido al interior de una sección de ducto son las siguientes

$$0 = \frac{\partial Q_i(z, t)}{\partial t} + gA \frac{\partial H_i(z, t)}{\partial z_i} + \mu_i Q_i(z, t) |Q_i(z, t)| + gA \sin \beta \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial H_i(z, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA} \frac{\partial Q_i(z, t)}{\partial z_i} \quad (2)$$

en donde el subíndice  $i$  es la  $i$ -ésima sección de ducto,  $A$  es el área de la sección transversal en  $\text{m}^2$ ,  $g$  la constante de aceleración gravitacional en  $\text{m/s}^2$ ,  $b$  la velocidad de la onda de presión en  $\text{m/s}$ ,  $Q_i(z, t)$  el flujo volumétrico en  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_i(z, t)$  la cabeza de presión en  $\text{mca}$  (metros de columna de agua),  $\beta$  es el ángulo de inclinación en  $\text{rad}$ ,  $z$  la coordenada espacial en  $\text{m}$ ,  $t$  la coordenada temporal en  $\text{s}$  y  $\mu_i = f_i/2DA$  en  $1/\text{m}^3$ , siendo  $f_i$  el coeficiente de fricción y  $D$  es el diámetro del ducto en  $\text{m}$ .

Debido a que este trabajo considera tuberías que contienen tomas laterales, es necesario modelar dicha extracción (Carrera et al. (2015)), para ello se considera la Figura 3.

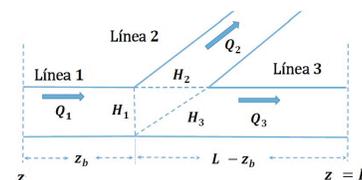


Figura 3. Ducto con toma lateral  $Q_2$

El flujo de extracción  $Q_2$  puede modelarse de acuerdo a

$$Q_2 = Q_{ext}(z_{ext}, t) = \delta(z - z_{ext}) Q_{ext}(t) \quad (3)$$

con  $Q_1 = Q_2 + Q_3$  y  $\delta$  denota la función de Kronecker aplicada en la posición  $z_b = z_{ext}$ ; además, si se asume que el área y el parámetro asociado a la fricción  $\mu_i$  son

constantes en los tramos antes y después de la toma lateral, entonces la cabeza de presión, ver Saldarriaga (2003), es

$$H_i(z) = \frac{P_i(z)}{\rho g} \quad (4)$$

puede escribirse en términos de una carga piezométrica  $\tilde{H}(z)$

$$\tilde{H}_i(z) = H_i(z) + h_i(z) \quad (5)$$

en donde  $h(z)$  es la altura del ducto con base a un nivel de referencia. De esta manera se tiene el ángulo  $\beta = 0$  en la ecuación de momento (2) y por lo tanto para un ducto horizontal con extracción se tiene

$$\frac{\partial Q_i(z, t)}{\partial t} + \bar{\alpha}_{1i} \frac{\partial \tilde{H}_i(z, t)}{\partial z} + \mu_i Q_i(z, t) |Q_i(z, t)| = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_i(z, t)}{\partial t} + \bar{\alpha}_{2i} \frac{\partial Q_i(z, t)}{\partial z} + \bar{\alpha}_{2i} Q_{ext}(z_{ext}, t) = 0 \quad (7)$$

en donde  $\bar{\alpha}_{1i} = gA$  y  $\bar{\alpha}_{2i} = b^2/gA$  para  $i = 1, 3$ .

### 2.1 Modelo discreto

Para obtener un modelo dinámico de dimensión finita a partir de las ecuaciones (6) y (7), se emplean las siguientes aproximaciones

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{d,k} = \frac{x_d^{k+1} - x_d^k}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{d,k} = \frac{x_{d+1}^{k+1} - x_{d-1}^{k+1} + x_{d+1}^k - x_{d-1}^k}{4\Delta z} \quad (9)$$

donde (9) es una diferencia finita centrada, ver (Kowalek-zuk y Gunawickrama, 2004),  $k$  el de tiempo discreto,  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo entre muestras ( $t = k\Delta t$ ),  $d$  es el subíndice de longitud discreta y  $\Delta z$  es la distancia entre estados ( $z = d\Delta z$ ). En la Figura 4 se ilustra la discretización espacial de la sección  $i$ , en donde  $N_i$  es un entero e indica el número de segmentos en que se divide la sección. Las condiciones de frontera son la presión y flujo en los extremos

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{0i}^k &= \tilde{H}_{in_i}^k & \tilde{h}_{N_i}^k &= \tilde{H}_{out_i}^k \\ q_{0i}^k &= Q_{in_i}^k & q_{N_i}^k &= Q_{out_i}^k \end{aligned}$$

en donde el subíndice *in* indica entrada y *out* salida.

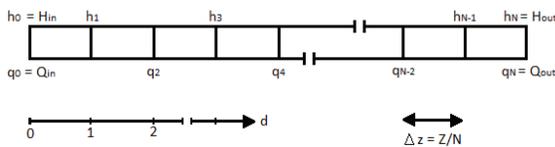


Figura 4. Discretización espacial de una sección  $i$

Sustituyendo las aproximaciones (8) y (9) en las ecuaciones diferenciales parciales (6) y (7) para cada tramo  $i$  con  $Q_{ext} = 0$ , se obtiene el par de ecuaciones en diferencias no lineales

$$0 = (q_d^{k+1} - q_d^k) + \alpha_{1i}(\tilde{h}_{d+1}^k - \tilde{h}_{d-1}^k + \tilde{h}_{d+1}^{k-1} - \tilde{h}_{d-1}^{k-1}) + \mu_i q_d^k |q_d^k| \quad (10)$$

$$0 = (\tilde{h}_d^{k+1} - \tilde{h}_d^k) + \alpha_{2i}(q_{d+1}^k - q_{d-1}^k + q_{d+1}^{k-1} - q_{d-1}^{k-1}) \quad (11)$$

en donde  $\alpha_{1i} = gAT_m/2\Delta z_i$ ,  $\alpha_{2i} = b^2T_m/2gA\Delta z_i$  con  $T_m = \Delta t$ . Para los extremos de la sección ( $d = 0_i$  y  $d = N_i$ ) se emplea una diferencia finita hacia adelante y hacia atrás respectivamente. Por tanto (10) y (11) pueden escribirse en forma de un representación de estados no lineal

$$Ax_i(k+1) = Sx_i(k) + Wu_i(k+1) + Eu_i(k) + 2\mu_i T_m F f_i(x_i(k)) \quad (12)$$

con  $N_i$  tramos, en donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{2i} & 1 & \alpha_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha_{1i} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \alpha_{1i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha_{2i} & 1 & \alpha_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{1i} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{1i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2i} & 1 & -\alpha_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{1i} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -\alpha_{1i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{2i} & 1 & -\alpha_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{1i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = E = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{1i} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El vector de estado está formado por

$$\begin{aligned} x_i(k) &= [q_{0i}^k \ \tilde{h}_{1i}^k \ q_{2i}^k \ \cdots \ q_{N_i-2}^k \ \tilde{h}_{N_i-1}^k \ q_{N_i}^k]^T \\ &\in \mathfrak{R}^{N_i+1}, \end{aligned}$$

el vector de entradas por

$$u_i(k) = [\tilde{h}_{0i}^k \ \tilde{h}_{N_i}^k]^T = [\tilde{H}_{in_i}^k \ \tilde{H}_{out_i}^k]^T$$

y el campo vectorial asociado al término no lineal

$$\begin{aligned} f_i(x_i(k)) &= [x_{1i}^k |x_{1i}^k| \ 0 \ x_{3i}^k |x_{3i}^k| \ \cdots \ 0 \\ &\quad x_{N_i-1}^k |x_{N_i-1}^k| \ 0 \ x_{N_i+1}^k |x_{N_i+1}^k|]^T \in \mathfrak{R}^{N_i+1} \end{aligned}$$

incluye todas las no linealidades asociadas a los gastos.

Considerando solamente dos secciones ( $i \in \{0, 1\}$ ) interconectadas con parámetros  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  de fricción distintos y con el mismo número de divisiones ( $N_1 = N_2 = N$ ), se tiene en el punto de interconexión

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{out_{i-1}} &= \tilde{H}'_{in_i} \\ Q_{out_{i-1}} &= Q'_{in_i} \end{aligned}$$

y por lo tanto el modelo global de las secciones interconectadas se reduce a

$$\bar{A}x'(k+1) = \bar{S}x'(k) + \bar{W}u'(k+1) + \bar{E}u_e'(k) + \Lambda(x'(k)) \begin{bmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (14)$$

en donde el vector de estado es

$$x'(k) = [q_0^k \ \tilde{h}_1^k \ q_2^k \ \dots \ q_{N-2}^k \ \tilde{h}_{N-1}^k \ q_N^k \ \tilde{h}_N^k \ q_{N+1}^k \ \dots \ q_{2N-2}^k \ \tilde{h}_{2N-1}^k \ q_{2N}^k]^T \in \mathfrak{R}^{2N+1} \quad (15)$$

el vector de entrada

$$u'(k) = [\tilde{h}_0^k \ \tilde{h}_{2N}^k]^T = [\tilde{H}_{in}^k \ \tilde{H}_{out}^k]^T$$

Con base en (13)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{(N+1) \times N} \\ 0_{N \times N} & A_2 \end{bmatrix} \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0_{(N+1) \times N} \\ 0_{N \times N} & S_2 \end{bmatrix}$$

$$W = \bar{W} = E = \bar{E}$$

en donde  $0_{N \times N}$  es la matriz nula de dimensión  $N \times N$  y finalmente  $\Lambda(x(k)) = -2T_m F f_i(x(k))$  resultando

$$\Lambda(x(k)) = -2T_m \begin{bmatrix} f_1(x(k)) & \bar{0}_{N+1} \\ \bar{0}_N & f_2(x(k)) \end{bmatrix}$$

con  $\bar{0}$  un vector nulo.

Por otro lado, si se supone que existe una toma lateral en el punto donde se interconectan las secciones, el modelo (14) con vector de entrada

$$u_e'(k) = [u_{e1}^k \ u_{e2}^k \ u_{e3}^k]^T = [\tilde{H}_{in}^k \ \tilde{H}_{out}^k \ Q_{ext}^k]^T$$

sigue describiendo el comportamiento del fluido y la única matriz que debe modificarse es la asociada a las entradas resultando

$$\bar{E}_e = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{E} & -\alpha_{2i} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

Por lo tanto el modelo global de dos secciones interconectadas con un ramal entre ellas se reduce a

$$\bar{A}x'(k+1) = \bar{S}x'(k) + \bar{W}u_e'(k+1) + \bar{E}_e u_e'(k) + \Lambda(x'(k)) \begin{bmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (16)$$

con el último término no lineal asociado con el vector de parámetros de fricción  $[\mu \ \bar{\mu}]^T$  desconocidos.

Cabe mencionar que es la primera vez que se emplea este modelo discreto en espacio de estados con coeficientes de fricción distintos con fines de identificación de parámetros.

### 3. IDENTIFICACIÓN DE LA FRICCIÓN

De acuerdo con Ljung (1999), el modelo de un sistema cuyos parámetros se desean identificar se debe llevar a la forma

$$h(k) = \phi(k)\theta + \eta(k) \quad (17)$$

en donde  $h(k)$  es el vector de mediciones,  $\phi(k)$  es la matriz de regresión formado por variables internas del sistema,  $\eta(k)$  es un vector conocido y  $\theta$  es el vector de parámetros constantes y desconocidos.

Así, asumiendo que la matriz  $\bar{A}$  tiene inversa, el modelo (16) se puede escribir como

$$x'(k+1) = \bar{A}^{-1}\bar{S}x'(k) + \bar{A}^{-1}\bar{W}u_e'(k+1) + \bar{A}^{-1}\bar{E}_e u_e'(k) + \bar{A}^{-1}\Lambda(x'(k)) \begin{bmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (18)$$

y por tanto (18) toma la forma de (17) si se define

$$h(k) = x'(k+1)$$

$$\phi(k) = \bar{A}^{-1}\Lambda(x(k))$$

$$\theta = [\mu \ \bar{\mu}]^T$$

$$\eta(k) = \bar{A}^{-1}\bar{S}x'(k) + \bar{A}^{-1}\bar{W}u_e'(k+1) + \bar{A}^{-1}\bar{E}_e u_e'(k) \quad (19)$$

y se considera todo el estado  $x'$  medible.

#### 3.1 Modelo regresor con estado medido

Considerando  $N = N_1 = N_2 = 1$ ,  $\Delta z = z_{ext}$  y que el estado

$$x'^{k+1} = [x_1'^{k+1} \ x_2'^{k+1} \ x_3'^{k+1}]^T$$

es medible, las relaciones de equivalencia (19) toman la forma

$$h(k) = x'(k+1) \quad (20)$$

y las matrices respectivas se reducen a

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{10} & 0 \\ -\alpha_{21} & 1 & \alpha_{21} \\ 0 & -\alpha_{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{10} & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & -\alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{11} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_e = \bar{W} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{21} \\ 0 & -\alpha_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi(k) = -\frac{T}{a_1} \begin{bmatrix} a_2 x_1'^2(k) & \alpha_{10} \alpha_{21} x_3'^2(k) \\ \alpha_{21} x_1'^2(k) & -\alpha_{21} x_3'^2(k) \\ \alpha_{11} \alpha_{21} x_1'^2(k) & a_3 x_3'^2(k) \end{bmatrix} \quad (21)$$

en donde  $a_1 = 1 + \alpha_{10}\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{21}$ ,  $a_2 = 1 + \alpha_{11}\alpha_{21}$ ,  $a_3 = 1 + \alpha_{10}\alpha_{21}$ , y el vector  $\eta(k)$

$$\eta(k) = \frac{1}{a_1} \begin{bmatrix} a_4 x_1'^k - 2\alpha_{10} x_2'^k + 2a_5 x_3'^k + a_6 (u_{e1}^{k+1} + u_{e1}^k) \\ 2\alpha_{21} x_1'^k + a_8 x_2'^k - 2\alpha_{21} x_3'^k + a_5 (u_{e1}^{k+1} + u_{e1}^k) \\ 2a_9 x_1'^k + 2\alpha_{11} x_2'^k + a_{10} x_3'^k + a_7 (u_{e1}^{k+1} + u_{e1}^k) \\ -a_7 (u_{e2}^{k+1} + u_{e2}^k) + a_5 (u_{e3}^{k+1} + u_{e3}^k) \\ +a_9 (u_{e2}^{k+1} + u_{e2}^k) - \alpha_{21} (u_{e3}^{k+1} + u_{e3}^k) \\ -a_{11} (u_{e2}^{k+1} + u_{e2}^k) - a_9 (u_{e3}^{k+1} + u_{e3}^k) \end{bmatrix} \quad (22)$$

con constantes  $a_4 = 1 - \alpha_{10}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{11}$ ,  $a_7 = \alpha_{10}\alpha_{21}\alpha_{11}$ ,  $a_{10} = 1 + \alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{21}\alpha_{11}$ ,  $a_6 = \alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_{21}\alpha_{11}$ ,  $a_5 = \alpha_{10}\alpha_{21}$ ,  $a_8 = 1 - \alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{21}\alpha_{11}$ ,  $a_{11} = \alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{21}\alpha_{11}$  y  $a_9 = \alpha_{21}\alpha_{11}$

Este modelo es sensible a la posición del punto de extracción  $z_{ext}$ , dado que

$$\alpha_{10} = gAT/2z_{ext},$$

$$\alpha_{11} = gAT/2(L - z_{ext})$$

y

$$\alpha_{21} = b^2 T/2gA(L - z_{ext}).$$

Además, el vector  $\eta(k)$  depende de todo el vector de entradas  $u_e'(k)$ , por lo que el flujo de extracción  $u_{e3}'$  debe ser conocido.

### 3.2 Algoritmo de identificación

Considere el error de medición

$$\epsilon(t) = \tilde{h}(t) - h(t) \quad (23)$$

donde  $\tilde{h}(t)$  es el estimado de  $h(t)$ . De acuerdo con Ioannou y Sun (1996), sustituyendo la versión continua de (17) en la ecuación de error (23) se obtiene

$$\epsilon(t) = \phi(t)\theta^* + \eta(t) - \phi(t)\theta(t) - \eta(t) \quad (24)$$

en donde  $\theta^*$  es el vector de parámetros verdaderos y  $\theta(t)$  es el estimado de  $\theta^*$  en el instante  $t$ . Definiendo el error paramétrico como  $\tilde{\theta}(t) = \theta^* - \theta(t)$ , el error de medición  $\epsilon$  se reduce a

$$\epsilon(t) = \phi(t)\tilde{\theta}(t) \quad (25)$$

Así, considerando la función de costo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \epsilon^T(t) \epsilon(t) \quad (26)$$

y empleando el método de gradiente se obtiene el modelo dinámico del vector de parámetros

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma \nabla J(\theta(t)) \quad (27)$$

en donde  $\Gamma$  es una matriz diagonal de diseño que se ajusta de acuerdo a la velocidad de convergencia deseada, y  $\nabla J(\theta(t)) = -\epsilon(t)\phi(t)$  corresponde al gradiente de  $J$  respecto a vector de parámetros  $\theta$ . Así, el método de gradiente permite escribir la ley de identificación

$$\dot{\theta}(t) = \Gamma \epsilon(t) \phi(t), \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (28)$$

Este algoritmo de identificación puede ser discretizado mediante una diferencia finita hacia atrás obteniéndose

$$\theta(k) = \theta(k-1) - T_m \Gamma \epsilon(k) \phi(k) \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (29)$$

Para garantizar la convergencia del algoritmo de identificación dado por (29) es necesario satisfacer la condición de excitación persistente, ver Ljung (1999), para lo cual se agrega ruido blanco a la excitación del sistema.

### 3.3 Identificación en condiciones nominales

Para validar el algoritmo se considera el punto de extracción en  $z_{ext} = LE/3$  asumiendo el punto de operación constante y  $LE$  la longitud del ducto, ver Cayetano (2016). Los elementos de la matriz diagonal  $\Gamma$  del algoritmo de identificación han sido ajustado en los valores  $\gamma_1 = 1 \times 10^5$  y  $\gamma_2 = 1 \times 10^6$ . Los parámetros nominales de la planta piloto usados en el modelo simulado son:  $D = 0.10$  m,  $A = 0.0081$  m<sup>2</sup>,  $LE = 263.84$  m,  $b = 1250$  m/s,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $T_m = 100$  ms, y los coeficientes de fricción en el caso nominal sin extracción son  $\mu = 14.32$  1/m<sup>3</sup> y  $\bar{\mu} = 14.32$  1/m<sup>3</sup>. En este experimento se cuenta con sensores de flujo y presión en los extremos del ducto y en el punto de extracción.

Las señales nominales de excitación usadas son  $u_{e1}^k = 18$  mca y  $u_{e2}^k = 4$  mca y se muestran en la Figura 5. Para satisfacer la condición de excitación persistente se ha empleado una señal binaria pseudoaleatoria (PRBS) con amplitud máxima de 1 mca, sumado a las entradas. En estas condiciones el flujo nominal en los extremos resulta  $y_{nom}^k = y_1^k = y_2^k = 0.018$  m<sup>3</sup>/s. Durante los primeros 400 s el sistema opera en las condiciones nominales con

gasto de extracción  $u_{e3}^k = 0$  y posteriormente se ajusta  $u_{e3}^k = 8.25 \times 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s que representa el 4.6% del flujo nominal ( $y_{nom}^k$ ), estas condiciones se muestran en la Figura 6.

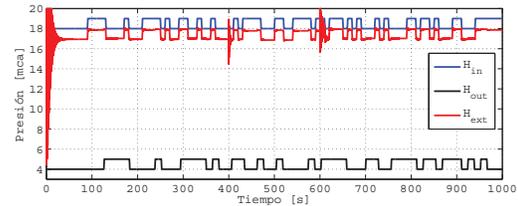


Figura 5. Presiones en los extremos y en la extracción en el ducto

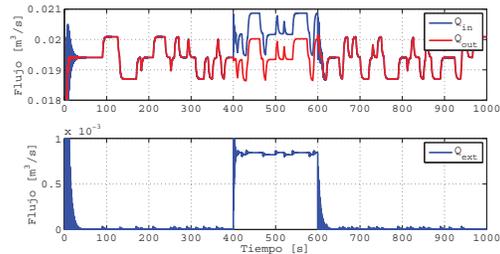


Figura 6. Flujos en los extremos y en la extracción en el ducto

Realizando la identificación de los dos coeficientes de fricción con el modelo (18), se obtiene la evolución de la estimación mostrada en la Figura 7; se observa que  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  son iguales y correctamente identificados mientras la extracción está inactiva y toman valores distintos en el momento de activar la extracción a los 400 s. Este comportamiento es correcto dado que los flujos aguas abajo y arriba con respecto a la extracción no son iguales y por tanto la fricción que depende de los flujos es distinta. Adicionalmente, se observa en el transitorio que  $\epsilon \rightarrow 0$  en un tiempo aproximado de 30 s. La Figura 8 muestra la identificación considerando desconocida la presión en el punto de extracción al derivar el modelo del regresor. Comparando las Figuras 7 y 8 se observa la discrepancia entre los resultados al considerar el estado medido o estimado en el modelo con las aproximaciones en diferencias finitas.

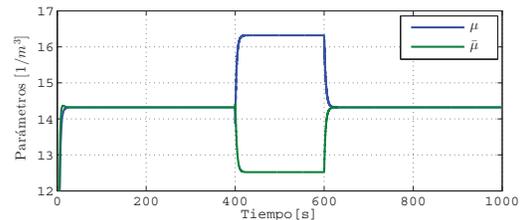


Figura 7. Evolución de la identificación de  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  con  $x_2^k$  medida

## 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El punto de extracción en el ducto piloto es  $z_{ext} = 112.88$  m y corresponde a la válvula V-3. Durante los primeros

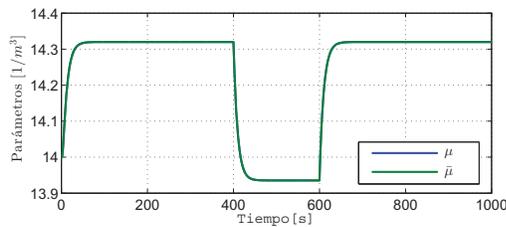


Figura 8. Evolución de la identificación de  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  con  $x_2^k$  estimada

1000 s de prueba se trabaja en condiciones nominales con  $y_{nom} = 0.0171 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $u_{e3}^k = 0$ , en el resto de la prueba se provoca un flujo de extracción  $u_{e3}^k = 0.00148 \text{ m}^3/\text{s}$  que corresponde a 8.67% del flujo nominal. El periodo de muestreo fue  $T_m = 0.1 \text{ s}$ .

En la Figura 9 se muestran los resultados con y sin extracción en el ramal, observándose que los parámetros convergen en un tiempo menor a 40 s cuando está presente la extracción. La Figura 10 muestra la evolución de los parámetros cuando se usa el regresor reportado en Cayetano (2016) y se estiman los estados en el punto de la extracción. En este caso los parámetros se mantienen iguales en presencia de la extracción debido al acoplamiento de los estados en el punto de extracción vía la aproximación de diferencia finitas y que las condiciones de frontera en el punto del ramal no se tomaron en cuenta.

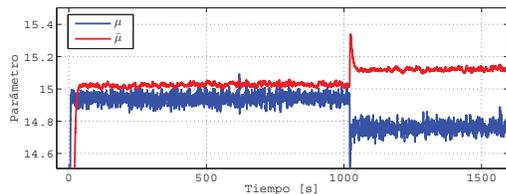


Figura 9. Comportamiento del parámetro  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  en presencia de la extracción cuando  $x_2^k$  es medida

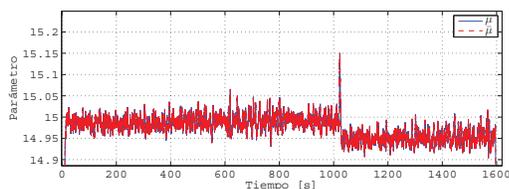


Figura 10. Comportamiento del parámetro  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  en presencia de la extracción cuando  $x_2^k$  es estimada

## 5. CONCLUSIONES

Como se observa, tanto en la simulación como experimentalmente, el parámetro relacionado con la fricción,  $\mu$ , no es constante a lo largo del ducto en condiciones de extracción, como lo constatan las Figuras 7 y 9, ya que las  $\mu$  dependen de las condiciones de operación del ducto, esto es,  $\mu(Q_{in}) \neq \mu(Q_{out})$ .

Por otro lado, la propuesta para la identificación de los parámetros, ecuación (18) y las relaciones de equivalencia (19) resultó apropiada para una identificación paramétrica en línea.

Como trabajo futuro está la adecuación del algoritmo de identificación cuando se considera la condición de frontera en el punto de extracción para el cálculo de la presión.

## REFERENCIAS

- Bergant, A., Simpson, A., y Vitkovsk, J. (2010). Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research*.
- Billmann, L. y Isermann, R. (1987). Leak detection methods for pipelines. *Automatica*, 23(3), 381–385.
- Carrera, R. y Verde, C. (2001). Localizador automático de fugas en un ducto. *Ingeniería Hidráulica en México*, XVI, 139–151.
- Carrera, R. y Verde, C. (2010). Prototipo para detección de fugas en tuberías: Manual de uso. In *Internal Report*. Instituto de Ingeniería-UNAM, Ciudad Universitaria, México.
- Carrera, R., Verde, C., y Cayetano, R. (2015). A scada expansion for leak detection in a pipeline. In *26th International Workshop on Principles of Diagnosis*, 145–151.
- Cayetano, R. (2016). *Identificación de parámetros de fricción en ductos con tomas laterales*. Master's thesis, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Chaudhry, M.H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer, third edition.
- Dulhoste, J., Besan, G., Torres, L., Begovich, O., y Navarro, A. (2011). Friction modeling for observer-based leak estimation in pipelines. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 12–15.
- Ioannou, P. y Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*. Prentice-Hall.
- Isermann, R. (2011). *Fault-Diagnosis Applications*. Springer-Verlag.
- Kowalczyk, Z. y Gunawickrama, K. (2004). *Detecting and locating leaks in transmission pipelines*. Springer.
- Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall, second edition.
- Navarro, A., Begovich, O., y Besançon, G. (2011). Calibration of fitting loss coefficients for modelling purpose of a plastic pipeline. In *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*.
- Pemex (2012). Infraestructura de plantas de proceso, sistema de ductos y terminales de almacenamiento y reparto. URL <http://www.ref.pemex.com/files/content/03transparencia/RC/REF05.pdf>.
- Saldarriaga, J. (2003). *Hidráulica de acueductos*. Mc Graw-Hill.
- Siebert, H. (1981). Untersuchung verschiedener methoden zur leckueberwachung bei pipelines. Technical report, Technische Hochschule Darmstadt. Forschungsbericht Kfk-PDV 206.
- Torres, L., Verde, C., Carrera, R., y Cayetano, R. (2014). Algoritmos de diagnóstico para fallas en ductos. V(4), 57–78.
- Viejo, M. (1972). *Bombas: Teoría, diseño y aplicaciones*. Limusa, 2a edition.