

# Control acotado para regulación de inventario en cadenas de suministro

Trejo-Rodríguez Diego Addi, Rodríguez-Ángeles Alejandro

*Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Av. Instituto Politecnico Nacional 2508, Delegación Gustavo A. Madero, San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Ciudad de México (e-mail: additrejo@gmail.com).*

---

**Abstract:** En este trabajo se ha propuesto un controlador de regulación de inventario acotado para una cadena de suministro modelada por nodos productores y no productores. Este tipo de controladores acotados son muy importantes, ya que pueden ser utilizados en otros sistemas aparte de cadenas de suministros, como en actuadores con limitaciones o cualquier otro sistema que esté acotado. Se utiliza una función de saturación para cumplir con las restricciones del sistema general, haciendo que el sistema se divida en subsistemas. El análisis de estabilidad que se muestra es usando el método directo de Lyapunov, ya que los resultados que anteriormente se han obtenido acerca de cadenas de suministro acotadas han sido mayormente locales.

*Keywords:* Condición de acotamiento, control saturado, sistemas híbridos, Estabilidad en el sentido de Lyapunov

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En el mundo actual, las cadenas de suministro juegan un papel fundamental en las áreas de logística y desarrollo de proyectos de todas las empresas de procesos y servicios. Es por eso la importancia del estudio de estas, ya que al optimizarlas se puede tener mayor eficiencia en los procesos, llegando a alcanzar altos estándares de calidad minimizando los costos de inventario y de transporte. Empresas como *Tal apparel group* o la planta de manufactura de Ford en Hermosillo, (Contreras (2006), Koudal and Long (2005)), se han dedicado a estudiar e implementar formas más eficientes en las cadenas de suministro, logrando así un éxito rotundo en sus márgenes de ganancia.

Los modelos de las cadenas de suministro han sido muy variados a lo largo de la historia de su estudio. En muchas ocasiones se han modelado en forma de sistemas de eventos discretos, Persson and Araldi (2009), ecuaciones diferenciales ordinarias, Nagatani and Helbing (2003), Perea-López et al. (2001) y combinando modelos continuos en el tiempo con sistemas discretos Lee et al. (2002). En este trabajo se utilizaron ecuaciones diferenciales ordinarias para el modelo de la cadena de suministro para 2 tipos de nodos (productores y no productores) junto con el controlador propuesto.

Si se toma como modelo las ecuaciones diferenciales ordinarias para las cadenas de suministro, estos son modelos acotados, ya que tanto el nivel de inventario y la tasa de entrada de cada nodo tienen límites naturales, siendo el límite inferior 0 (límite físico natural) o una cantidad mínima de nivel de inventario y el nivel máximo de inventario que se puede almacenar en un nodo; así mismo la tasa de entrada tiene un límite inferior, y el

límite superior es el flujo máximo de material que puede recibir en un lapso de tiempo.

En la sección 2 se presentan los modelos dados en Nagatani and Helbing (2003) de un nodo no productor y un nodo productor de una cadena de suministro. En la sección 3 se presenta el resultado principal de este trabajo, que es la proposición de un controlador PI acotado, con una función de saturación, para los 2 nodos con los que se trabaja. Se presenta también su análisis en lazo cerrado con los modelos descritos en la sección 2 y su análisis de estabilidad. La sección 4 presenta los resultados de una simulación numérica, con 4 nodos en la cadena de suministro. En la sección 5 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. MODELOS DINÁMICOS DE CADENAS DE SUMINISTROS

Los modelos dinámicos usados en este artículo serán los propuestos por Helbing en Nagatani and Helbing (2003). El modelo de la cadena de suministro que es objeto de estudio en este artículo se divide en nodos no productores y productores.

### 2.1 *Nodo no productor*

El modelo de un sistema en lazo abierto para un nodo no productor en una cadena de suministro es:

$$\dot{N} = \lambda_c - \lambda_{dem}, \quad (1)$$

el cual es una ecuación de balance de materia.  $N \in \mathbb{R}^+$  es el nivel de inventario en el nodo,  $\lambda_c \in \mathbb{R}^+$  es la tasa

de entrada del nodo y  $\lambda_{dem} \in \mathbb{R}^+$  es la tasa de salida o demanda de inventario que tiene el nodo.

### 2.2 Nodo productor

El modelo de un sistema para un nodo productor en una cadena de suministro está conformado por (1) y por:

$$\dot{\lambda}_c = \frac{1}{T}(W_c - \lambda_c), \quad (2)$$

el cual es la dinámica con la cual tarda en adaptarse a un cambio el nodo productor.  $W_c \in \mathbb{R}^+$  es la política de producción y  $T \in \mathbb{R}^+$  es el tiempo de adaptación que tiene el nodo sobre un cambio.

## 3. CONTROL ACOTADO PARA REGULACIÓN DE INVENTARIO

A continuación se presentan los resultados principales de este artículo, analizando el controlador propuesto para cada nodo con su respectiva estabilidad.

### 3.1 Nodo no productor

El siguiente controlador es propuesto para lograr un nivel de inventario estable en el nodo:

$$\lambda_c = \begin{cases} \lambda_{max} & \text{si } u(t) \geq \lambda_{max} \\ u(t) & \text{si } 0 < u(t) < \lambda_{max} \\ 0 & \text{si } u(t) \leq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

con

$$u(t) = -k_p(N - N_{des}) - k_i \int (N - N_{des}) dt + \lambda_{dem}, \quad (4)$$

donde  $\lambda_{max} \in \mathbb{R}^+$  es la capacidad máxima de tasa de entrada del nodo y  $N_{des} \in \mathbb{R}^+$  es el valor deseado de inventario del nodo;  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la señal de control PI con compensación, asociada al control saturado. Las ganancias  $k_p$  y  $k_i$  son las ganancias proporcional e integral, esto es  $k_p, k_i \in \mathbb{R}^+$ .

El sistema (1) en lazo cerrado con (3) es un sistema acotado, ya que el controlador propuesto es una función de saturación, y que presenta 3 dinámicas diferentes dependiendo del valor de  $\lambda_c$ .

A continuación se presentará la estabilidad del sistema. Se analizará de forma individual cada subsistema de (1) en lazo cerrado con (3).

*Sistema en lazo cerrado cuando  $0 < u(t) < \lambda_{max}$*   
Sustituyendo (3) y (4) en (1), cuando  $\lambda_c$  no se encuentra en los valores de saturación, se tiene:

$$\dot{N} = -k_p(N - N_{des}) - k_i \int (N - N_{des}) dt. \quad (5)$$

Definiendo el error de regulación de inventario, se tiene que

$$z = N - N_{des}.$$

Sustituyendo esta última ecuación en (5), se tiene que el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{z} = -k_p z - k_i \int z dt. \quad (6)$$

Se puede observar que en el sistema se está integrando el estado  $z$ , por lo que para facilitar el análisis de estabilidad se agrega un estado de la siguiente manera:

$$\dot{w} = z$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (6), se tiene que

$$\dot{w} = z \quad (7)$$

$$\dot{z} = -k_p z - k_i w \quad (8)$$

Siendo estas las ecuaciones de lazo cerrado del sistema.

El punto de equilibrio del sistema es  $(0, 0)$ .

*Sistema en lazo cerrado en saturación* Sustituyendo (2) en (1), cuando  $\lambda_c = 0$ , en función del error de regulación de inventario, se tiene:

$$\dot{z} = -\lambda_{dem}, \quad (9)$$

y cuando  $\lambda_c = \lambda_{max}$

$$\dot{z} = \lambda_{max} - \lambda_{dem} \quad (10)$$

En estos subsistemas se puede observar que no tienen puntos de equilibrio en el origen. Los subsistemas solo se encuentran perturbados por las constantes  $\lambda_{dem}$  y  $\lambda_{max} - \lambda_{dem}$  respectivamente. En el primer caso,  $z > 0$ , ya que  $N > N_{des} \forall N$ , entonces,  $z\dot{z}$  es negativo para todo  $z$ ; así mismo en el segundo caso,  $z < 0$ , ya que  $N < N_{des} \forall N$ , siendo  $z\dot{z}$  negativo para todo  $z$  como en el primer caso. Por tal motivo, estos subsistemas generan un dominio de atracción hacia las fronteras de saturación, donde al atravesar dichas fronteras, el sistema se comporta como en el caso sin saturación del nodo no productor.

*Análisis de estabilidad cuando  $0 < u(t) < \lambda_{max}$*  El método para probar estabilidad en el subsistema (7), (8) es el método directo de Lyapunov utilizado en Sepulchre et al. (2012).

Proponiendo una función de Lyapunov se puede demostrar que el subsistema garantiza estabilidad globalmente asintótica.

La función candidata de Lyapunov elegida es:

$$V(w, z) = \frac{1}{2}k_i w^2 + \frac{1}{2}z^2. \quad (11)$$

Claramente se ve que la función candidata de Lyapunov es definida positiva, ya que es una función cuadrática;

siendo también esta una función radialmente no acotada, ya que cumple la condición  $w, z \rightarrow \infty, \Rightarrow V(w, z) \rightarrow \infty$ .

Ahora, se necesita comprobar que  $\dot{V}(w, z) < 0$ . Entonces, la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}(w, z) = k_i w \dot{w} + z \dot{z}. \quad (12)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (12) se tiene

$$\dot{V}(w, z) = -k_p z^2, \quad (13)$$

que es semidefinida negativa para cualquier  $k_p, k_i \in \mathbb{R} > 0$ . Como la función de Lyapunov no contiene a todos los estados del sistema, se tiene que recurrir al teorema de invariancia de LaSalle utilizado en Sepulchre et al. (2012).

Sea  $w(t), z(t)$  una solución que pertenece idénticamente a  $E$ , donde  $E = \{\sigma, z \in \mathbb{R} \mid z = 0\}$ :

$$z(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{z} \equiv 0 \Rightarrow k_i w \equiv 0$$

Como  $k_i \neq 0$ , entonces

$$w \equiv 0$$

La única solución del sistema que puede permanecer en  $E$  es la solución trivial. Por lo tanto, el punto de equilibrio del sistema (7) y (8) es globalmente asintóticamente estable.

### 3.2 Nodo productor

El siguiente controlador es propuesto para lograr el control de inventario sobre el nodo:

$$W_c = \begin{cases} \lambda_{max} & \text{si } u(t) \geq \lambda_{max} \\ u(t) & \text{si } 0 < u(t) < \lambda_{max} \\ 0 & \text{si } u(t) \leq 0 \end{cases}, \quad (14)$$

con

$$u(t) = -k_p(N - N_{des}) - k_i \int (N - N_{des})dt + \lambda_{dem}, \quad (15)$$

donde  $\lambda_{max} \in \mathbb{R}^+$  es la capacidad máxima de tasa de entrada del nodo y  $N_{des} \in \mathbb{R}^+$  es el valor deseado de inventario del nodo;  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la señal de control PI con compensación, asociada al control saturado. Las ganancias  $k_p$  y  $k_i$  son las ganancias proporcional e integral, esto es  $k_p, k_i \in \mathbb{R}^+$ .

El sistema formado por (1) y (2) en lazo cerrado con (14) es un sistema híbrido de conmutación, ya que presenta 3 dinámicas diferentes dependiendo del valor de  $W_c$ .

*Sistema en lazo cerrado cuando  $0 < u(t) < \lambda_{max}$*   
Sustituyendo (14) y (15) en (2), cuando  $W_c$  se encuentra en los intervalos de saturación, se tiene:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{T} \left( -k_p(N - N_{des}) - k_i \int (N - N_{des}) dt - \lambda + \lambda_{dem} \right). \quad (16)$$

Definiendo el error de regulación de inventario y el error en la tasa de entrada, se tiene que

$$\begin{aligned} z_1 &= N - N_{des} \\ z_2 &= \lambda - \lambda_{dem}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas últimas dos ecuaciones en (1) y (16), el sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (17)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{T} \left( -k_p z_1 - k_i \int z_1 dt - z_2 \right). \quad (18)$$

Se puede observar que en el sistema se está integrando al nuevo estado  $z_1$ , entonces para facilitar el análisis de estabilidad se agrega un estado de la siguiente manera:

$$\dot{w} = z_1$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (24), el sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{w} = z_1 \quad (19)$$

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (20)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{T} (-k_p z_1 - k_i w - z_2). \quad (21)$$

siendo estas las ecuaciones de lazo cerrado del sistema.

El punto de equilibrio del sistema es  $(0, 0, 0)$ .

*Sistema en lazo cerrado en saturación* Sustituyendo (14) en (2), cuando  $W_c = 0$ , en función del error de regulación de inventario, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{T} (-\lambda_{dem} - z_2); \end{aligned} \quad (22)$$

y cuando  $W_c = \lambda_{max}$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{T} (\lambda_{max} - \lambda_{dem} - z_2). \end{aligned} \quad (23)$$

En estos subsistemas se puede observar que no tienen puntos de equilibrio en el origen. Los subsistemas solo se encuentran perturbados por las constantes  $\lambda_{dem}$  y  $\lambda_{max} - \lambda_{dem}$  respectivamente. En el primer caso,  $z_1 > 0$  y  $z_2 < 0$ , ya que  $N > N_{des} \forall N$ , entonces,  $z_1 \dot{z}_1$  es negativo para todo  $z_1$ , mientras que  $z_2 \dot{z}_2 = 0$ , ya que  $z_2 = -\lambda_{dem}$ ;

así mismo en el segundo caso,  $z_1 < 0$  y  $z_2 > 0$ , ya que  $N < N_{des} \forall N$ , siendo  $z_1 \dot{z}_1$  negativo para todo  $z_1$ , mientras que  $z_2 \dot{z}_2 = 0$ , ya que  $z_2 = \lambda_{max} - \lambda_{dem}$ . Por tal motivo, estos subsistemas generan un dominio de atracción hacia las fronteras de saturación en el inventario, donde al atravesar dichas fronteras, el sistema se comporta como en el caso sin saturación del nodo productor.

*Análisis de estabilidad cuando  $0 < u(t) < \lambda_{max}$*  Como en la subsección anterior, se puede elegir una función de Lyapunov tal que garantice al sistema estabilidad globalmente asintótica.

Con la condición de que  $k_i < \frac{k_p}{T}$ , la función candidata de Lyapunov elegida es:

$$V(w, z_1, z_2) = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} x, \quad (24)$$

Con  $P_{11} = \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_p - k_i T)}$ ,  $P_{12} = \frac{k_p k_i + k_i T}{2(k_p - k_i T)}$ ,  $P_{13} = 0$ ,  $P_{22} = \frac{k_p^2 + k_p T + k_i + 1}{2(k_p - k_i T)}$ ,  $P_{23} = \frac{k_i T + T}{2(k_p - k_i T)}$ ,  $P_{33} = \frac{k_p T + T^2}{2(k_p - k_i T)}$ .

Claramente se ve que la función candidata de Lyapunov es una función cuadrática, y que obteniendo sus menores principales es definida positiva; siendo también esta una función radialmente no acotada, ya que cumple la condición  $w, z_1, z_2 \rightarrow \infty \Rightarrow V(w, z_1, z_2) \rightarrow \infty$ .

Sustituyendo (19), (20) y (21) en la derivada con respecto al tiempo de (24), y mediante desarrollo matemático directo, se tiene:

$$\dot{V}(w, z_1, z_2) = -\frac{1}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 \quad (25)$$

Esta función de Lyapunov es semidefinida negativa. Considerese  $E = \{w, z_1, z_2 \in \mathbb{R} \mid z_1 = 0, z_2 = 0\}$ . Sea  $w(t), z_1(t), z_2(t)$  una solución que pertenece idénticamente a  $E$ :

$$z_1(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{z}_1 \equiv 0 \Rightarrow z_2 \equiv 0$$

$$z_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{z}_2 \equiv 0 \Rightarrow \frac{k_i w}{T} \equiv 0$$

Como  $k_i \neq 0$ , y  $T \neq 0$ , entonces

$$w \equiv 0$$

La única solución del sistema que puede permanecer en  $E$  es la solución trivial. Por lo tanto, el punto de equilibrio del sistema (19), (20) y (21) es globalmente asintóticamente estable.

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se simuló numéricamente los controladores propuestos en la sección anterior, en el entorno SIMULINK incluido en el programa MATLAB, en una cadena de suministro que consta de 4 tanques de agua alimentados cada uno por una bomba hidráulica, que están interconectados entre sí

jugando el papel de nodos productores y no productores, de la siguiente forma:

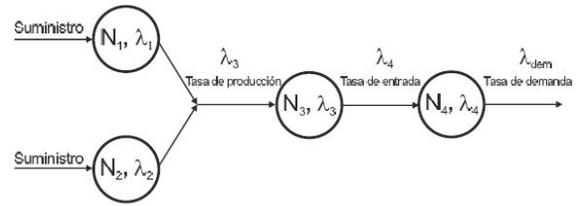


Fig. 1. Estructura de la cadena de suministro

donde el tanque 1 y 2 son nodos no productores, el tanque 3 es un nodo productor y el tanque 4 es un nodo no productor. Como se mencionó anteriormente, el objetivo del controlador es hacer una regulación de nivel de inventario a un nivel de inventario deseado, que en este caso es el nivel de columna de agua de los tanques [cm]; variando la tasa de entrada o política de producción [l/min] que entra a cada nodo según sea el caso. Las restricciones del sistema acotado, así como las condiciones iniciales del sistema, se muestran en las siguientes tablas respectivamente:

Table 1. Restricciones en la simulación

Nivel de inventario mínimo	$N_{i, min}$	0 cm
Nivel de inventario máximo	$N_{i, max}$	40 cm
Tasa de entrada	$\lambda_c, min$	0 l/min
Tasa de entrada máxima	$\lambda_c, max$	24 l/min
Política de producción mínima	$W_c, min$	0 l/min
Política de producción máxima	$W_c, max$	24 l/min

Table 2. Condiciones iniciales de la simulación

Nodo	$N[cm]$	$T[s]$	$\lambda_{dem}[l/min]$
1	15	-	$\lambda_3$
2	15	-	$\lambda_3$
3	10	1	$\lambda_4$
4	20	-	12

Los valores del controlador PI acotado para el nodo 3 son 10 y 1.1 para  $k_p$  y  $k_i$  respectivamente; mientras que para el nodo 4 son 10 y 0.001 respectivamente. La señal de referencia es una señal cuadrada que oscila entre 20 cm y 10 cm en el nivel de inventario, que se introdujo a los nodos 4 y 3 en un periodo de tiempo relativamente grande. A continuación se muestran las gráficas de nivel de inventario de los nodos 1, 2, 3 y 4; y las gráficas de la tasa de entrada de los nodos 3 y 4, ya que como es un sistema en retroalimentación, la tasa de entrada de los nodos 1 y 2 es constante.

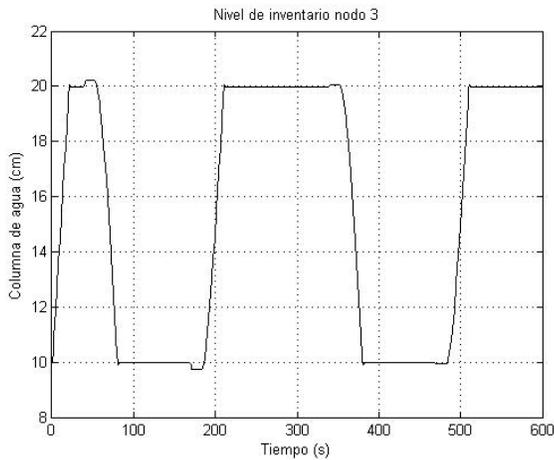


Fig. 2. Nivel de inventario del nodo 3

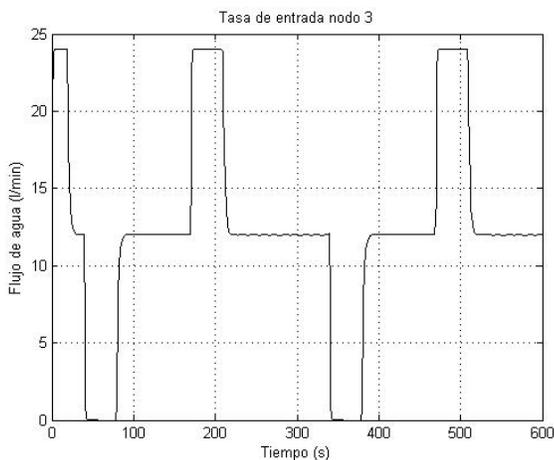


Fig. 3. Tasa de entrada del nodo 3

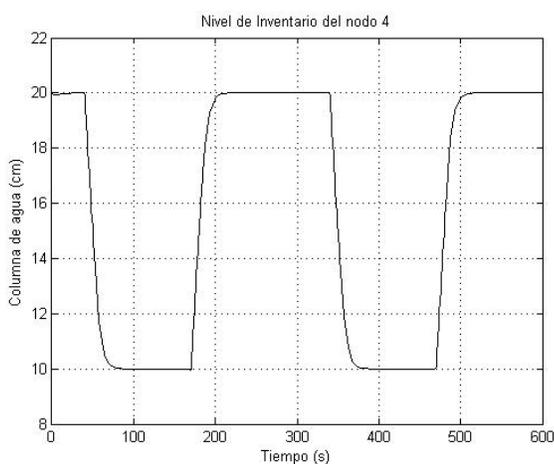


Fig. 4. Nivel de inventario del nodo 4

## 5. CONCLUSIONES

Se pudo obtener un análisis de estabilidad general, considerando al sistema de cada nodo como un sistema conmutado, ya que, como este está acotado, presenta

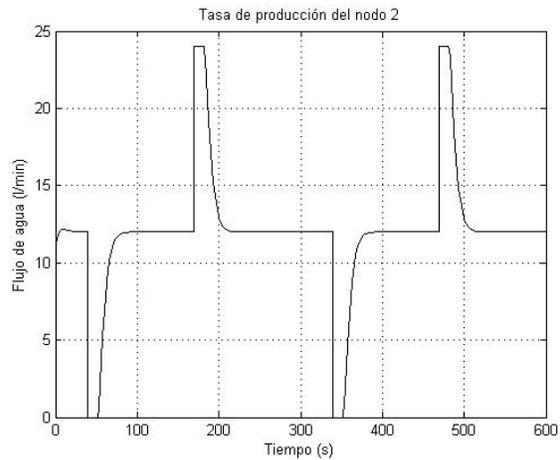


Fig. 5. Tasa de entrada del nodo 4

diferentes dinámicas dependiendo de los valores de los estados del sistema.

En la simulación se pudo comprobar que el controlador llega de manera asintótica a la referencia establecida, de una manera muy suave.

Se puede considerar usar este tipo de controladores para otro tipo de nodos en una cadena de suministro tales como almacenes, para poder llegar a un nivel deseado de inventario; así como usar otro tipo de configuraciones más complejas en la parte de simulaciones y experimental.

## REFERENCES

- Contreras, O. (2006). Cadenas de suministros y proveedores locales en Ford Hermosillo. Technical report.
- Guadarrama-Mendoza, R. (2010). Diseño y construcción de una plataforma de pruebas para el control y sincronización de cadenas de suministro.
- Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 3, 2655–2660. IEEE.
- Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, (N.J.). URL <http://opac.inria.fr/record=b1091137>.
- Koudal, P. and Long, V.W.t. (2005). The power of synchronization: the case of tal apparel group. *A Deloitte Research Case Study. May, www.deloitte.com/dtt/cda/doc/content/DTT\_DR\_TAL\_May2005Web.pdf*.
- Lee, Y.H., Cho, M.K., Kim, S.J., and Kim, Y.B. (2002). Supply chain simulation with discrete-continuous combined modeling. *Computers & Industrial Engineering*, 43(1), 375–392.
- Loza-Chavez, R. (2012). Sincronización y control de cadenas de suministro.
- Morse, A.S. (1996). Supervisory control of families of linear set-point controllers part i. exact matching. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(10), 1413–1431.
- Nagatani, T. and Helbing, D. (2003). Stabilization of a linear supply chain. *Physica A*, 335(cond-

- mat/0304476), 644–660.
- Ogata, K. (2001). *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR.
- Perea-López, E., Grossmann, I.E., Ydstie, B.E., and Tahmassebi, T. (2001). Dynamic modeling and decentralized control of supply chains. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(15), 3369–3383.
- Persson, F. and Araldi, M. (2009). The development of a dynamic supply chain analysis tool—integration of scor and discrete event simulation. *International Journal of Production Economics*, 121(2), 574–583.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P.V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media.
- Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K., and Michel, A.N. (2001). Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. *International Journal of Systems Science*, 32(8), 1055–1061.