

Control Predictivo para Sistemas Lineales Complementarios: Aplicación a Convertidores de Potencia

Rodrigo Morfin-Magaña, J. Jesus Rico-Melgoza,
Fernando Ornelas-Tellez

*Autores adscritos a la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad
Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, e-mail:
rmorfin@dep.fie.umich.mx, jerico@umich.mx, fornelas@umich.mx*

Resumen: En este trabajo se presenta un esquema de control predictivo para sistemas híbridos, en específico para sistemas conmutados, que pueden ser modelados como sistemas lineales complementarios. En general, los sistemas conmutados son difíciles de analizar o hacer diseño de control, por lo que para su estudio/diseño, es común el uso de técnicas basadas en modelos promediados, las cuales no conservan la naturaleza conmutada. En este trabajo se propone una metodología de modelado que conserva la dinámica híbrida del sistema, y que posteriormente permite diseñar esquemas de control considerando dicha dinámica. Se diseñará un control predictivo para esta clase de sistemas bajo una nueva perspectiva, buscando hacer más eficiente su solución, ya que es conocido que por métodos clásicos, el control predictivo requiere de una capacidad de procesamiento considerable, dado que debe resolverse un problema de control óptimo en cada instante de tiempo. En este esquema de control se parte de un modelo lineal complementario, el cual se parametriza en términos de las variables de entrada y de estado, y se obtiene una solución algebraica del sistema (solución explícita), que posteriormente, es usada en control predictivo por un algoritmo Nelder-Mead para determinar la solución óptima de la acción de control en un horizonte de tiempo finito. La metodología de modelado y diseño de control es aplicada a un sistema electrónico conmutado, donde se ilustran sus ventajas para cumplir los objetivos de control, tales como estabilización y seguimiento de trayectorias.

Palabras clave: Sistemas híbridos, sistema lineal complementario, problema lineal complementario paramétrico, Nelder-Mead, control predictivo.

1. INTRODUCCIÓN

En general un sistema híbrido es la mezcla de dinámicas continuas y eventos discretos que representan un sistema físico. Estas dinámicas continuas y discretas no solo coexisten, sino que interactúan, y los cambios que ocurren en la parte discreta modifican instantáneamente las dinámicas continuas, descritas por una ecuación diferencial o en diferencias (V. Schaft, 1999). Un sistema lineal complementario (SLC) es una clase particular de sistemas híbridos no lineales, que modela sistemas conmutados (W. Petrus, 1999). Un SLC se define por una ecuación diferencial que resuelve las variables dinámicas, y una ecuación algebraica con una restricción complementaria que resuelve las variables generadas por los eventos discretos, denominadas variables complementarias. Los SLC permiten modelar sistemas híbridos de tipo electrónico (M. Camlibel, 11 de Agosto 2003; F. Vasca, 13 Febrero 2009; J. Rico-Melgoza, 2009), de tipo mecánico (C. Glocker, 2005), de telecomunicaciones (R. Zhong, 2013), entre otros sistemas. Para determinar la evolución de un SLC, se plantea la solución de las variables complementarias como un problema de optimización, denominado problema lineal complementario (PLC), para el cual es posible obtener una solución explícita con antelación una vez parametrizado el problema en términos de las variables de entrada y estado, lo que se denomina problema lineal complementario paramétrico (PLCP) (E. Pistikopoulos, 2007). La ventaja de tener la solución explícita de un problema de optimización es que se tiene pre-calculado un conjunto de soluciones algebraicas

acotadas (definidas por regiones) para las variables complementarias.

Realizar control sobre sistemas híbridos no es una tarea sencilla. Una forma de diseñar esquemas de control para esta clase de sistemas es el método de modelos promediados (J. Sun, 2005), donde se pierden las características propias del sistema conmutado, e incluso pueden tenerse soluciones que no son físicamente factibles (D. Perreault, Mayo 2002). En este trabajo, para realizar tareas de control, se propone modelar al sistema como un SLC, donde las características de conmutación permanecen en el modelo. Existen diferentes estrategias de control para sistemas híbridos (V. Sessa, Diciembre 2014; F. Vasca, 20-23 Junio 2011). Una técnica de control optimizada que también puede aplicarse para sistemas híbridos es control predictivo, normalmente denominado MPC (por sus siglas en inglés, Model Predictive Control). El MPC determina una secuencia de control futuro basado en el modelo del sistema, posteriormente aplica la acción de control que corresponde al estado siguiente, y cuando una nueva medición está disponible, se repite el proceso. En general el MPC en sistemas híbridos plantea un problema de control óptimo en cada instante de tiempo, donde el sistema híbrido es parte de las restricciones (A. Bemporad, 28 Junio 2000; B. Riyanto, 2005; F. Oettmeier, 11 Agosto 2009; J. Thomas, Julio 2012). Resolver un problema de control óptimo con estas características es complejo. En el MPC la cantidad de variables a resolver en cada instante de tiempo está relacionado con el horizonte de predicción, por lo que el MPC requiere de una gran capacidad de

procesamiento. Como se menciono anteriormente, con el SLC y la solución explicita del PLCP, se puede obtener una ecuación de estado parametrizada, con la cual se puede optimizar la variable de control respecto a una función objetivo, por medio de un algoritmo de búsqueda directa como el Nelder-Mead, que permite obtener una solución al control predictivo de forma más eficiente. El Nelder-Mead es un algoritmo de optimización multi-variable de búsqueda directa, propuesto originalmente por (J. Nelder, 1965). El Nelder-Mead trabaja en base a evaluación y comparación de distintos valores de las variables de decisión, sin necesidad de ninguna información diferencial. El algoritmo es utilizado para diseño de control, como por ejemplo, optimizar ganancias en controladores PID (V. Sinlapakun, 24-27 Junio 2015; M. Tajjudin, 27-28 Junio 2011).

La contribución de este trabajo es proponer un esquema de control predictivo eficiente para un SLC sin necesidad de plantear problemas de control óptimo para cada instante de tiempo. El control se basa en la solución de la ecuación de estado del SLC (previamente parametrizado), donde mediante el algoritmo Nelder-Mead, se optimiza la variable de control respecto a una función objetivo durante un horizonte de tiempo finito. Se presenta un ejemplo numérico para ilustrar la metodología propuesta.

2. SISTEMA LINEAL COMPLEMENTARIO Y PROBLEMA LINEAL COMPLEMENTARIO

2.1 Modelo de un sistema lineal complementario

Los sistemas lineales complementarios son sistemas híbridos no lineales que incorporan dinámicas de tiempo continuo y de tiempo discreto en un sistema mezclado. El SLC está descrito por una ecuación algebraica, una ecuación diferencial y una restricción de complementariedad. Un SLC puede utilizarse para tratar comportamientos de sistemas no lineales mediante la inclusión de eventos discretos, F. López (2015). De forma general, el modelo del sistema dinámico lineal continuo se describe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c \varphi + E_c e_c + g_c \\ \lambda &= C_c x + D_c \varphi + F_c e_c + h_c \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{N_x}$ representa el vector de estado, $e_c \in \mathbb{R}^{N_{e_c}}$ el vector de entradas externas, $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^{N_c}$ las variables de salida y entrada, respectivamente, del sistema complementario, donde N_x representa el número variables de estado, N_{e_c} es el número de entradas externas y N_c representa el número de variables complementarias que modelan los elementos discretos, las matrices $A_c, B_c, E_c, C_c, D_c, F_c$ son matrices constantes y g_c, h_c son vectores constantes. Todos los elementos que introducen eventos discretos al sistema se modelan en el siguiente sistema complementario

$$\begin{aligned} \varphi &= A_s \lambda + B_s z + E_s u_s + g_s \\ w &= C_s \lambda + D_s z + F_s u_s + h_s \\ 0 &\leq w \perp z \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde $(z, w) \in \mathbb{R}^{N_z}$ representa las variables complementarias y $u_s \in \mathbb{R}^{N_{u_s}}$ representa las entrada de control. Las matrices $A_s, B_s, E_s, C_s, D_s, F_s$ son matrices constantes, y g_s, h_s son vectores constantes. El sistema (2) se rige por la restricción de complementariedad $0 \leq w \perp z \geq 0$, la cual indica que todos los elementos de los vectores (z, w) deben ser no negativos, y el producto punto entre ambos vectores debe ser cero, por lo que si una variable toma un valor positivo, la otra debe ser cero, o presentarse el caso en que ambas variables son cero. El sistema dinámico continuo (1) y el sistema lineal complementario (2) pueden integrarse en un solo modelo lineal complementario como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bz + Ee + g \\ w &= Cx + Dz + Fe + h \\ 0 &\leq w \perp z \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde $e = \text{col}[e_c, u_s] \in \mathbb{R}^{N_e}$ representa las entradas externas del sistema procedentes del sistema dinámico y entradas de control procedentes del sistema complementario, con $N_e = N_{e_c} + N_{u_s}$. Las matrices A, B, C, D, E, F, g, h son definidas mediante la combinación de ambos sistemas como:

$$\begin{aligned} A &= A_c + B_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s C_c \\ B &= B_c(I - A_s D_c)^{-1} B_s \\ C &= C_s(C_c + D_c(I - A_s D_c)^{-1}) A_s C_c \\ D &= C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} B_s) + D_s \\ E &= \begin{bmatrix} B_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s F_c + E_c \\ B_c(I - A_s D_c)^{-1} E_s \end{bmatrix}^T \\ F &= \begin{bmatrix} C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s F_c + F_c) \\ C_s(I - A_s D_c)^{-1} E_s + F_s \end{bmatrix}^T \\ g &= B_c(I - A_s D_c)^{-1} (A_s h_c + g_s) + g_c \\ h &= C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} (A_s h_c + g_s) + h_c) + h_s \end{aligned} \quad (4)$$

donde I es una matriz identidad de dimensiones adecuadas.

De esta forma (3)-(4) representa el sistema lineal complementario, que depende del vector de estado x , de las variables complementarias (z, w) , y del vector e de entradas externas. Note que en e están las entradas u_s que permiten hacer el diseño de control. La solución para un sistema de la forma (3), en general, se resuelve encontrando el valor de las variables complementarias (z, w) . Una forma es discretizar el sistema, y encontrar las variables complementarias por medio de métodos numéricos, por lo que en este trabajo se utiliza la regla de Euler hacia atrás. El sistema discreto se presenta como

$$\begin{aligned} x_k &= A_d x_{k-1} + B_d z_k + E_d e_k + g_d \\ w_k &= C x_k + D z_k + F e_k + h \\ 0 &\leq w_k \perp z_k \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

con

$$\begin{aligned} A_d &= [I - \alpha A]^{-1} & B_d &= [I - \alpha A]^{-1} \alpha B \\ E_d &= [I - \alpha A]^{-1} \alpha E & g_d &= [I - \alpha A]^{-1} \alpha g \end{aligned}$$

donde $\alpha = T/N$, es el paso de integración y N es el número de pasos por periodo. I es una matriz identidad de dimensiones adecuadas.

2.2 Problema Lineal Complementario

El PLC permite encontrar las variables complementarias en un SLC discreto, en el cual, dadas una matriz M y un vector q , se determinan las variables complementarias que satisfagan las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} w_k - M z_k &= q_k \\ 0 &\leq w_k \perp z_k \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} M &= C B_d + D \\ q_k &= C(A_d x_{k-1} + E_d e_k + g_d) + F e_k + h \end{aligned}$$

donde (z_k, w_k) son las variables complementarias, M es una matriz constante semidefinida positiva, y q_k es un vector que depende de los estados anteriores x_{k-1} y las entradas externas e_k . Generalmente el PLC se resuelve con herramientas computacionales como un problema de optimización, donde el PLC se describe como (6) y no es necesario definir función objetivo alguna.

3. PROBLEMA LINEAL COMPLEMENTARIO PARAMÉTRICO

Note en (6) que el vector q_k es el elemento que modifica el PLC en relación los estados anteriores x_{k-1} y las entradas externas e_k , por lo que estas variables se toman como parametros en el PLCP.

3.1 Formulación del PLCP

La formulación del PLCP se realiza dividiendo el vector q_k , en una parte constante q y una parte variable, representada por una matriz Q y el vector de variables θ_k . Se delimita la solución del problema agregando restricciones a las variables del vector θ_k . El PLCP se puede escribir como

$$\begin{aligned} w_k &= Mz_k + q + Q\theta_k \\ 0 &\leq w_k \perp z_k \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} M &= CB_d + D & q &= Cg_d + h \\ Q &= [CA_d, CE_d + F] & \theta_k &= [x_{k-1}, e_k]^T \\ \underline{L} &\leq x_{k-1} \leq \bar{L}, \underline{E} &\leq e_k \leq \bar{E} \end{aligned}$$

donde w_k y z_k son las variables complementarias, q es un vector constante, Q es una matriz de coeficientes, M es una matriz constante semidefinida positiva, θ_k es un vector que contiene las variables paramétricas del problema (estados anteriores y entradas externas), \underline{L} y \bar{L} son los límites inferior y superior, respectivamente, para el vector de estado, y \underline{E} , \bar{E} son respectivamente, los límites inferior y superior para los valores que pueden tomar las señales externas al sistema. Note que en el vector θ_k se encuentra la entrada de control u_s .

3.2 Solución Explícita

La solución del PLCP en general requiere un tiempo de procesamiento considerable, pero este se puede resolver con antelación y obtener la solución explícita del problema. Existen varias herramientas computacionales para formular y solucionar el PLCP (7). En este trabajo se usa la herramienta para Matlab "Multi-Parametric Toolbox 3.0 (MPT3)", (M. Herceg, Julio 2013). Esta herramienta emplea el algoritmo lexicográfico Lemke, descrito en (C. Jones, 13-15 Diciembre 2006). El valor de z_k en la solución explícita esta dado por ecuaciones algebraicas divididas en regiones (R_1, R_2, \dots, R_n). En cada iteración los parámetros $\theta_k = [x_{k-1}, e_k]$ determinan en que región se encuentra la solución. La solución explícita del PLCP se puede representar como

$$\begin{aligned} R_1 : & A_1\theta_k \leq b_1 \\ & z_k = C_1\theta_k \\ R_2 : & A_2\theta_k \leq b_2 \\ & z_k = C_2\theta_k \\ & \vdots \\ R_n : & A_n\theta_k \leq b_n \\ & z_k = C_n\theta_k \end{aligned} \quad (8)$$

donde $R_1 \dots R_n$ son las regiones, θ_k son los parámetros, z_k son las variables complementarias buscadas, $A_1 \dots A_n$ son matrices constantes, que junto con los vectores $b_1 \dots b_n$ forman los límites de cada región, y $C_1 \dots C_n$ son matrices con los coeficientes de cada región. Geométricamente (8) forma un poliedro, donde cada una de sus caras representa una región donde el PLCP (7) tiene una solución algebraica.

4. CONTROL ÓPTIMO PREDICTIVO

En el presente trabajo se propone resolver un esquema control óptimo predictivo basado en la ecuación x_k de (5),

la cual depende de la solución explícita de z_k , para lo que se propone el algoritmo de optimización Nelder-Mead, con la finalidad de determinar la entrada de control optima u_s^* que minimiza una función objetivo, misma que se plantea en términos de objetivos clásicos de control, (A. Isidori, 1989), tales como estabilización, regulación, seguimiento, velocidad de respuesta, etc.

4.1 Algoritmo Nelder-Mead

El Nelder-Mead es un algoritmo de optimización de búsqueda directa donde una función no lineal multi-variable es minimizada sin tener conocimiento diferencial de las variables. El algoritmo Nelder-Mead inicia con un conjunto de $n + 1$ puntos aleatorios formando los vértices de un hiperplano de dimensión n , donde n es el número de variables de decisión, es decir, si $n = 1$, el hiperplano corresponde a la sección de una recta, si $n = 2$ se tiene un triángulo, y así sucesivamente. Durante la búsqueda, el hiperplano inicial sufrirá procesos de reflexión, expansión, contracción y reducción hasta que la función objetivo sea minimizada o maximizada, según sea el caso, (M. Tajjudin, 27-28 Junio 2011; J. Lagarias, 1988). Esta metodología logra convergencia al mínimo global en los SLC ya que estos sistemas son lineales por segmentos y no presentan mínimos locales.

El objetivo de control es determinar la entrada optimizada u_s^* , esta variable es generada por un elemento de conmutación, por lo que la variable de control oscila entre valores binarios $\{0, 1\}$. Es recomendable que el esquema de control establezca una lógica de conmutación, misma que comúnmente se define por una modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en ingles pulse-width modulation). Para definir una lógica de conmutación PWM, se propone representar un conjunto de entradas p en una variable continua d_c , que define el ciclo de servicio en cada ciclo de trabajo. El procedimiento que lleva a cabo el algoritmo Nelder-Mead en cada iteración se puede resumir en los siguientes pasos

- (1) Iniciar los vértices v con los $n + 1$ puntos de forma aleatoria y ordenarlos del mejor al peor: $f(d_{c_1}) \leq \dots \leq f(d_{c_{n+1}})$
- (2) Reflexión d_{c_r} : Calcular $d_{c_r} = c + \delta(c - d_{c_{n+1}})$, donde c es el centro del hiperplano y $\delta > 0$ es un parámetro que determina el radio de reflexión.
 - (a) Si $f(d_{c_1}) \leq f(d_{c_r}) \leq f(d_{c_{n+1}})$, aceptar d_{c_r} y Terminar.
 - (b) Si $f(d_{c_r}) < f(d_{c_1})$, ir a 3.
 - (c) Si $f(d_{c_r}) \geq f(d_{c_1})$, ir a 4.
- (3) Expansión d_{c_e} : Calcular $d_{c_e} = c + \beta(d_{c_1} - c)$, donde $\beta > 1$ es un parámetro que expande el hiperplano.
 - (a) Si $f(d_{c_e}) \leq f(d_{c_r})$, aceptar d_{c_e} y Terminar.
 - (b) Si $f(d_{c_e}) > f(d_{c_r})$, aceptar d_{c_r} y Terminar.
- (4) Contracción d_{c_c} :
 - Si $d_{c_r} < d_{c_{n+1}}$: $d_{c_c} = c + \gamma(d_{c_r} - c)$
 - (a) Si $f(d_{c_c}) \geq f(d_{c_r})$, aceptar d_{c_c} y Terminar.
 - (b) De lo contrario ir a 5.
 - Si $d_{c_r} \geq d_{c_{n+1}}$: $d_{c_c} = c + \gamma(d_{c_{n+1}} - c)$
 - (a) Si $f(d_{c_c}) \leq f(d_{c_{n+1}})$, aceptar d_{c_c} y Terminar.
 - (b) De lo contrario ir a 5.

donde $0 \leq \gamma \leq 1$ es un parámetro para la contracción.
- (5) Reducción: Se reduce el hiperplano aproximando los vértices v al mejor punto actual d_{c_1} , $v_i = d_{c_1} + \rho(d_{c_i} - d_{c_1})$. Donde $i = 2, \dots, n + 1$ y $0 \leq \rho \leq 1$.

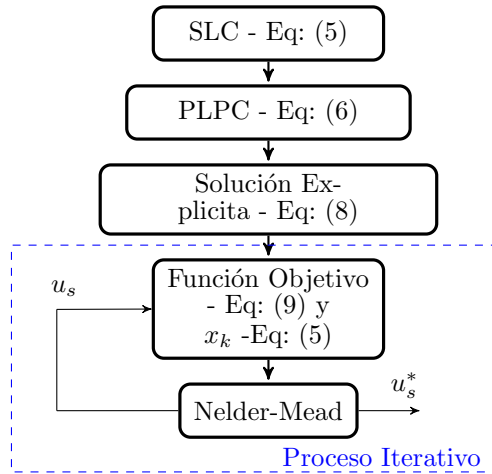


Fig. 1. Diagrama a bloques del método de control.

4.2 Solución al control óptimo predictivo

El horizonte de predicción es definido por n ciclos PWM y el algoritmo Nelder-Mead toma las variables d_c en cada ciclo como variables de decisión. La función objetivo en el esquema de control es planteada en relación a alguna de las variables de estado, y depende de las variables de estado x_k y las entradas de control u_s , y se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{k=1}^n fo(x_{k-1}, d_{c_k}) \\ & \text{s. a. } x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max} \\ & e_{\min} \leq e_c \leq e_{\max} \\ & u_{\min} \leq u_s \leq u_{\max} \end{aligned} \quad (9)$$

con

$$d_{c_k} = \sum_{k=1}^p \frac{u_{s_k}}{p}$$

donde fo es la función objetivo, d_{c_k} es el ciclo de servicio, x_k son las variables de estado, y u_{s_k} son las entradas de control. Las restricciones son las establecidas en el PLCP.

El algoritmo Nelder-Mead determina el conjunto de entradas óptimas para el ciclo de trabajo $d_{c_k}^*$, donde fo debe satisfacer criterios de control. El esquema completo del control predictivo propuesto se muestra en el diagrama a bloques de la Figura 1, donde partiendo de un sistema híbrido que pueda ser representado por un SLC, se formula y se obtiene la solución explícita del PLCP. En relación a los requerimientos de control, se formula la función objetivo fo , y finalmente, el algoritmo Nelder-Mead realiza la búsqueda hasta encontrar el valor óptimo de los n ciclos de servicio $d_{c_k}^*$.

5. APLICACIONES

5.1 Convertidor Boost

El convertidor Boost, Figura 2, es un sistema no lineal de naturaleza híbrida, ya que está formado por elementos analógicos acompañados por dispositivos conmutados, un interruptor unidireccional y el diodo, que da lugar a eventos discretos. El convertidor Boost puede formularse como un sistema lineal complementario y utilizar el método propuesto en este trabajo para realizar tareas de control. El sistema dinámico de la forma (1), se fórmula por medio analizar los lazos y nodos mostrados en la Figura 2, por medio de leyes de Kirchoff, con lo que se obtiene las

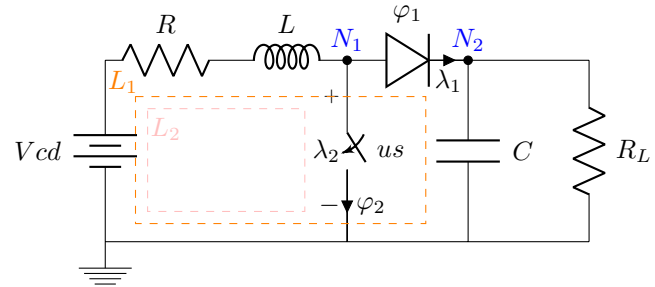


Fig. 2. Convertidor Boost.

ecuaciones dinámicas del sistema. A partir de los lazos L_1 y L_2 , se obtiene

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_{cd} + \varphi_1 - Ri_L - v_c}{L}. \quad \lambda_2 = -\varphi_1 + v_c.$$

De los nodos N_1 y N_2 , se obtiene:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_L - \varphi_2}{C} - \frac{v_c}{R_L C}. \quad \lambda_1 = i_L - \varphi_2.$$

donde i_L es la corriente en el inductor L , V_{cd} es el voltaje de alimentación de corriente directa, v_c es el voltaje en el capacitor C , R_L es la resistencia de carga, $[\varphi_1, \lambda_1]$ son las variables complementarias (para voltaje y corriente respectivamente) de el diodo, y $[\varphi_2, \lambda_2]$ son las variables complementarias (para corriente y voltaje respectivamente) del interruptor. De esta forma las matrices del sistema dinámico lineal continuo (1) son

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_L C \end{bmatrix} & D_c &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & E_c &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/C \end{bmatrix} & C_c &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & g_c &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ F_c &= [0 \ 0]^T & h_c &= [0 \ 0]^T \end{aligned}$$

con $x = [i_L, v_c]^T$, $e_c = [V_{cd}]$ y $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$.

El sistema complementario (2) se describe con los modelos complementarios ideales del diodo y del interruptor unidireccional, como se presentan en (F. López, 2015). De tal forma que las matrices del sistema discreto complementario son

$$\begin{aligned} A_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & E_s &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & F_s &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g_s &= [0 \ 0]^T & h_s &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \end{aligned}$$

donde $z = [z_d, z_{s1}, z_{s2}, z_{s3}, z_{s4}]^T$, $u_s = [u_s]$ y $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]^T$, y A_c define una restricción física para la corriente.

Los sistemas dinámico y complementario pueden ser representados por un SLC de la forma (3), como se describió en la sección 2. Las matrices del SLC quedan definidas por

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_L C \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & g &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T & h &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

donde $x = [i_L, v_C]^T$, $z = [z_d, z_{s1}, z_{s2}, z_{s3}, z_{s4}]^T$ y $e = [V_{cd}, u_{sw}]^T$.

Para mostrar el desempeño del algoritmo MPC, se toma como ejemplo los valores utilizados en (F. López, 2015) para un convertidor Boost. El valor de los elementos se muestran en la Tabla 1, donde f_c es la frecuencia de trabajo del PWM.

Tabla 1. Parámetros del convertidor Boost

R	0.1	Ω
L	0.1	mH
C	100	μF
R_L	20	Ω
f_c	10	kHz

Para el SLC discreto (3), se define un paso de integración α de $1 \mu s$, obteniendo las matrices A_d , B_d , E_d y el vector g_d . Posteriormente se define el PLCP como (7), donde los parámetros θ_k son: $x_{k-1} = [i_{L_{k-1}}, v_{C_{k-1}}]^T$ y $e_k = [V_{cd}, u_{s_k}]^T$. La solución del PLCP se restringe con: $0 \leq i_L \leq 30$, $0 \leq v_C \leq 40$, $0 \leq V_{cd} \leq 20$ y $u_s \in \{0, 1\}$. Finalmente se obtiene la solución explícita para la variable complementaria z_k de la forma (8).

5.2 Función Objetivo para el Control Predictivo

En general los objetivos de control, regulación y seguimiento, buscan lograr la convergencia de una señal hacia una referencia. Considerando que el convertidor Boost busca regular el voltaje a la salida, se plantea una función objetivo que minimiza el error promedio del voltaje v_{c_k} respecto a la referencia r_k , durante el horizonte de predicción.

$$fo = \frac{|v_{c_k} - r_k|}{(p)(n)} \quad (10)$$

Para la predicción del voltaje v_{c_k} , se resuelve la ecuación de estado del SLC discreto (5), donde $x_k = [i_{L_k}, v_{C_k}]^T$. La solución explícita (8) para z_k , depende de los parámetros V_{cd_k} , x_{k-1} y u_{s_k} , donde x_{k-1} y V_{cd_k} son valores conocidos, y u_{s_k} es la variable de control buscada.

5.3 Regulación

Como primer objetivo de control, se propone realizar regulación a una referencia constante, $r_k = r = 20V$, y se considera que el voltaje de alimentación también permanece constante $V_{cd_k} = V_{cd} = 12V$. Se considera el horizonte de predicción igual a dos ciclos de trabajo, $n = 2$ y considerando el paso de integración α , $p = 100$. En la Figura 3 se muestra el resultado de la regulación, donde el voltaje en el Boost muestra un rizado inherente a un sistema conmutado, y v_{c_k} converge a la referencia deseada. La simulación se realiza en el software Mathematica durante $4ms$ (40 ciclos de trabajo).

5.4 Seguimiento de trayectoria

Para este caso se desea realizar seguimiento de trayectoria cuando se tiene una referencia r_k variante en el tiempo. En la Figura 4 se muestra el control realizado para el seguimiento de una señal $r_k = 22 + 4\sin(2\pi ft)$, donde $f = 4.4kHz$.

5.5 Variación en los parámetros

Suponga ahora que se quiere regular el voltaje v_{c_k} a una referencia $r = 25V$, bajo la consideración de que se tiene

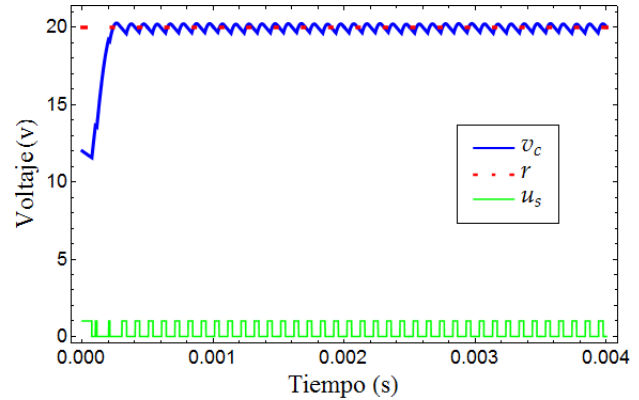


Fig. 3. Regulación de voltaje en el Boost, señal de control.

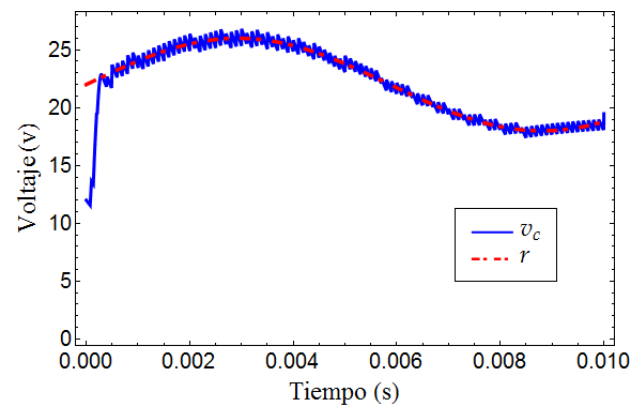


Fig. 4. Seguimiento de voltaje en el Boost

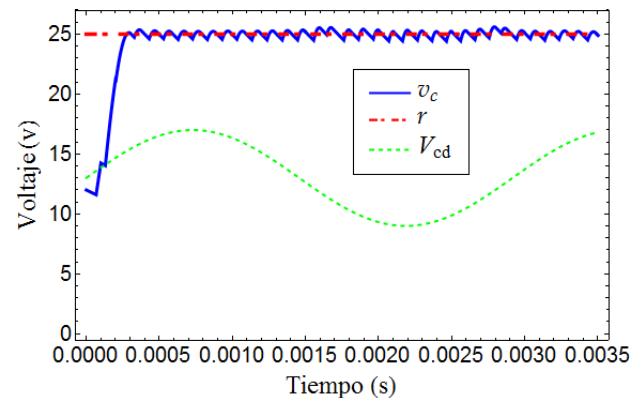


Fig. 5. Regulación de v_c con variaciones en el voltaje de alimentación

una fuente de alimentación $V_{cd_k} = 13V$, que presenta oscilaciones en el voltaje de $\pm 4V$. En la Figura 5, se muestra el voltaje V_{cd_k} y el resultado de la regulación, mismo que verifica la convergencia de v_c hacia su referencia, aún en presencia de variaciones en V_{cd} .

Es importante señalar que la resistencia de carga R_L , no es un parámetro en el problema multi-paramétrico y que por lo tanto no puede escribirse como la ecuación (7), lo que en términos de simulación implica desarrollar nuevamente el modelo paramétrico del convertidor Boost de forma que se reflejen los cambios en la carga. En la Figura 6 se muestra el resultado de la regulación de voltaje en presencia de variaciones en la resistencia de carga, sin modificar el modelo, lo que provoca una desviación en el seguimiento de la trayectoria deseada por parte del voltaje. La simulación

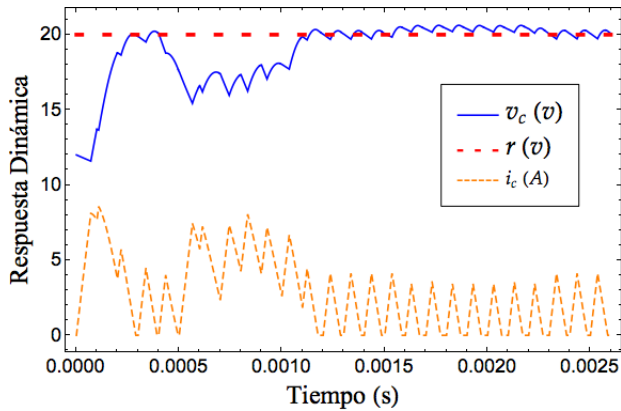


Fig. 6. Regulación de v_c con variaciones en la resistencia de carga

se realiza durante 2.6 ms, donde la carga comienza con el valor nominal de 20 Ω , una vez que se alcanza la referencia a los 0.4 ms, la carga disminuye a 5 Ω y se mantiene en ese valor durante 0.6 ms, posteriormente la carga regresa a su valor nominal en 1 ms, en 1.6 ms la carga aumenta a 30 Ω y finalmente recupera su valor nominal en 2.3 ms. En un trabajo futuro se abordará el estudio de un sistema de control que sea insensible ante variaciones de parámetros, en este caso, R_L .

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se describe un esquema de control predictivo general para distintos tipos de sistemas híbridos que se puedan modelar como un SLC. La metodología de modelado y control propuesta se aplica a un sistema electrónico; sin embargo, su aplicación se puede extender a otro tipo de sistemas híbridos que puedan ser modelados por un SLC, entre los que se pueden encontrar sistemas mecánicos, químicos, biológicos, entre otros. De la metodología de modelado se debe destacar que se conserva la dinámica conmutada del sistema, donde se tienen características de conmutación, rizado, incluso modos de operación continua y discontinua, las cuales se pierden cuando se utilizan métodos clásicos tales como modelos promediados. En los resultados de simulación se aprecia que los objetivos de control se cumplen, esto es, se logra regulación y seguimiento de trayectorias de manera que una función de objetivo es minimizada.

REFERENCIAS

A. Bemporad, F.B. (28 Junio 2000). Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems. In *American Control Conference, 2000.*, volume 2, 1190 – 1194. Chicago, IL.

A. Isidori, . (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Italia, 2 edition.

B. Riyanto, I.H. (2005). Model predictive control for linear complementarity and extended linear complementarity systems. *Proceedings ITB Journal of Engineering Science*, 37 B(2), 121–140.

C. Glocker, C.S. (2005). Formulation and preparation for numerical evaluation of linear complementarity systems in dynamics. *Multibody System Dynamics*, 13, 447–463.

C. Jones, M.M. (13-15 Diciembre 2006). Multiparametric linear complementarity problems. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 5687 – 5692. IEEE, San Diego, CA.

D. Perreault, G.V. (Mayo 2002). Time-varying effects and averaging issues in models for current-mode control.

IEEE Transactions on Power Electronics, 12(3), 453 – 461.

E. Pistikopoulos, M.G. (2007). *Multi-Parametric Programming*, volume 1. WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.

F. López, J.R. (2015). *Modelado y Simulación de Circuitos Eléctricos Modernos en el Marco de Referencia Complementario*. Master's thesis, UMSNH.

F. Oettmeier, J.N. (11 Agosto 2009). Mpc of switching in a boost converter using a hybrid state model with a sliding mode observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(9), 3453 – 3466.

F. Vasca, G.A. (20-23 Junio 2011). Linear complementarity models for steady - state analysis of pulse-width modulated switched electronic systems. In *Control & Automation (MED), 2011 19th Mediterranean Conference*, 400 – 405. IEEE, Corfu.

F. Vasca, L.I. (13 Febrero 2009). A new perspective for modeling power electronics converters: Complementarity framework. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 24(2), 456 – 468.

J. Lagarias, J.R. (1988). Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1), 112–147.

J. Nelder, R.M. (1965). Simplex for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4), 308–313.

J. Rico-Melgoza, J.S. (2009). Modeling and analysis of three-phase diode bridge rectifiers as linear complementarity systems. *Electr. Power Compon. Syst.*, 47(15), 1639–1655.

J. Sun, B.C. (2005). Averaged modeling and switching instability prediction for peak current control. In *2005 IEEE 36th Power Electronics Specialists Conference*, 2764 – 2770. IEEE, Recife.

J. Thomas, . (Julio 2012). Analytical non-linear model predictive control for hybrid systems with discrete inputs only. *IET Control Theory & Applications*, (8), 1080 – 1088.

M. Camlibel, H.H. (11 de Agosto 2003). Switched networks and complementarity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50(8), 1036 – 1046.

M. Herceg, M.K. (Julio 2013). Multi-parametric toolbox 3.0. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, 502 – 510. Zurich.

M. Tajjudin, N.I. (27-28 Junio 2011). Optimized pid control using nelder-mead method for electro-hydraulic actuator systems. In *IEEE Control and System Graduate Research Colloquium*, 90 – 93.

R. Zhong, F.Y. (2013). A linear complementarity system approach to macroscopic freeway traffic modeling. In *Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems (CYBER), 2013 IEEE 3rd Annual International Conference on*, 14026902, 18 – 23. IEEE, Nanjing.

V. Schaft, H.S. (1999). *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 2 edition.

V. Sessa, L.I. (Diciembre 2014). A complementarity model for closed-loop power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 29(12), 6821 – 6835.

V. Sinlapakun, . (24-27 Junio 2015). Optimized pid controller design for electric furnace temperature systems with nelder mead algorithm. In *Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*, 1 – 4.

W. Petrus, H.H. (1999). *Linear Complementarity Systems: a Study in Hybrid dynamics*. Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology.