

# Estimación del estado de carga en capacitores de doble capa eléctrica utilizando modelos electroquímicos discretizados

Jesús Velázquez\* Luis Alvarez-Icaza\* Aldo Romero-Becerril\*

\* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Ciudad de México, 04510, Mexico.*  
*e-mails: jvelazquezh@iingen.unam.mx, alvar@pumas.iingen.unam.mx,  
aldo.romerob@gmail.com*

---

## Resumen

Se utiliza un filtro de Kalman estacionario para estimar el estado de carga en capacitores de doble capa eléctrica mediante modelos electroquímicos discretizados espacialmente. El resultado es un esquema de observación que depende de cuatro parámetros relacionados con características físicas de los capacitores. Finalmente, el desempeño del observador se compara contra un modelo en lazo abierto, obteniendo errores de estimación de menos del 2% en el peor caso.

Keywords: Capacitores, doble capa eléctrica, estado de carga, filtro de Kalman, modelo electroquímico.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Las consecuencias de la contaminación producida por las emisiones de gases de efecto invernadero de a los vehículos en la salud humana, son diversas. Se pueden presentar daños al sistema nervioso central por las partículas de plomo en el aire; dolor de cabeza o mareos causados por el dióxido de azufre y el monóxido de carbono; irritación de ojos, nariz y garganta por el ozono y el dióxido de nitrógeno; problemas cardiovasculares, y problemas de desarrollo fetal. Entre los grupos vulnerables a estos efectos, se encuentran los niños, los adultos mayores, los deportistas, los ciclistas y los asmáticos (Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno de la Ciudad de México), 2016).

La industria automotriz ha dado como respuesta los vehículos eléctricos y los vehículos híbridos como por ejemplo el Honda Insight o el Toyota Prius (Hannan, 2014), los cuales incorporan una máquina eléctrica adicional al motor de combustión interna. Uno de los objetivos de estos vehículos es disminuir las emisiones de gases e incrementar la calidad del aire en las ciudades. El gran problema de los vehículos eléctricos ha sido su limitada autonomía (Jorgensen, 2008), la cual ha ido mejorando notablemente a través de los años. En el caso de los vehículos híbridos, el reto reside en plantear estrategias de intercambio de potencia entre las diferentes fuentes de energía para maximizar la eficiencia del vehículo. Estos algoritmos requieren conocer el estado de carga de las fuentes utilizadas para la alimentar la máquina eléctrica, usualmente baterías y supercapacitores. Es precisamente este punto, el problema de la estimación del estado de carga en capacitores de doble capa eléctrica (DCE), el objetivo del presente trabajo.

Un capacitor es un dispositivo eléctrico formado por dos placas conductoras separadas por un material dieléctrico. Cuando se someten las placas a una diferencia de potencial, adquieren una determinada carga eléctrica, positiva en una de ellas y negativa en la otra, almacenando energía en forma de campo eléctrico. Los capacitores de doble capa eléctrica (DCE), capacitores electroquímicos o supercapacitores, tienen una doble capa eléctrica hecha de un material nanoporoso (por ejemplo, carbón activado) que mejora la capacidad de almacenamiento; un diagrama esquemático de estos capacitores puede encontrarse en la Fig. 1. Los valores de capacitancia de estos dispositivos pueden alcanzar los 3000 F. Los supercapacitores tienen como ventajas sobre las baterías un ciclo de vida más largo (alrededor de 500000 ciclos, frente a 2000 de las baterías), menor resistencia interna (menores pérdidas por calentamiento) y una buena reversibilidad. Sin embargo, la cantidad de energía almacenada por unidad de peso (densidad de energía) es de entre 3 y 5 Whkg<sup>-1</sup>, mientras que la densidad de energía de una batería Li-Ion es de aproximadamente 140 Whkg<sup>-1</sup> (Hannan, 2014). Como las características físicas de cada dispositivo se complementan, lo recomendable es utilizarlos en conjunto en un vehículo híbrido para aumentar su eficiencia, densidad de energía y desempeño (Conway, 2003; Hannan, 2014).

En general, los trabajos sobre la estimación del estado de carga se basan principalmente en modelos de circuito equivalente. Estos modelos son sencillos, muchas veces lineales, relacionan la entrada (corriente) y la salida (voltaje en las terminales) con precisión, pero no proveen una vinculación física directa de sus variables internas con las de los capacitores. En (Nadeau, 2014) se utiliza un filtro de Kalman extendido sobre un modelo de circuito equivalente de 3 bandas; concluyen que la fórmula pa-

ra calcular la energía de un capacitor lleva a resultados erróneos porque los fenómenos físicos internos asociados a la carga del capacitor crean estados inobservables. En (Weigert, 2011) se utilizan redes neuronales artificiales. Sus resultados muestran correlación de 0.95. Con modelos electroquímicos, se encuentra el trabajo de (Drummond, 2015), donde se prueba geoméricamente que el modelo es localmente observable. Sin embargo, al realizar la linealización del modelo, se encuentran estados no observables. Este problema se corrige usando un sistema de control que permite que las trayectorias del error de observación sean asintóticamente estables.

En este trabajo se utiliza el modelo electroquímico discretizado presentado en (Romero-Becerril, 2012), obtenido mediante cuadratura diferencial polinomial con una malla basada en las raíces de los polinomios de Legendre. Se obtiene un modelo LIVT dependiente de cuatro parámetros. Bajo el criterio de residuos, se considera una aproximación de sexto orden. En dicho artículo y en (Romero-Becerril, 2015) se dan condiciones de observabilidad para esta discretización.

## 2. MODELO DE ELECTRODO ÚNICO (MEU)

### 2.1 Descripción del modelo

En este trabajo, el modelo de electrodo único (MEU) del supercapacitor se toma de (Romero-Becerril, 2015). El modelo es válido bajo las siguientes suposiciones:

1. Las reacciones farádicas son despreciables.
2. Los electrodos son simétricos, es decir, de igual geometría y composición.
3. El capacitor opera dentro de los límites nominales de corriente y tensión.

La primera suposición es conveniente desde el punto de vista de la manufactura de estos dispositivos. La segunda es razonable y, en términos generales, es posible considerar que se cumple.

La distribución del potencial  $\eta(t, x)$  en el electrodo negativo está dada por

$$\frac{\partial \eta^-}{\partial t} = \frac{1}{a^- C_e^-} \frac{\kappa^- \sigma^-}{\kappa^- + \sigma^-} \frac{\partial^2 \eta^-}{\partial x^2},$$

con  $\eta^-(0, x) = \eta_0^-(x)$  para  $0 \leq x \leq \ell^-$  y con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^-}{\partial x} &= \frac{-i_d}{S \sigma^-} \quad \text{en } x = 0, \\ \frac{\partial \eta^-}{\partial x} &= \frac{i_d}{S \kappa^-} \quad \text{en } x = \ell^-. \end{aligned}$$

La dinámica del electrodo positivo es similar

$$\frac{\partial \eta^+}{\partial t} = \frac{1}{a^+ C_e^+} \frac{\kappa^+ \sigma^+}{\kappa^+ + \sigma^+} \frac{\partial^2 \eta^+}{\partial x^2},$$

con  $\eta^+(0, x) = \eta_0^+(x)$  para  $\ell^{sep} \leq x \leq \ell^{cel}$ , con  $\ell^{cel} = \ell^- + \ell^{sep} + \ell^+$  y cuyas condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^+}{\partial x} &= \frac{i_d}{S \kappa^+} \quad \text{en } x = \ell^{sep}, \\ \frac{\partial \eta^+}{\partial x} &= \frac{-i_d}{S \sigma^+} \quad \text{en } x = \ell^{cel}. \end{aligned}$$

La función de salida (diferencia de potencial) tiene la forma

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{-\kappa^-}{\kappa^- + \sigma^-} \eta^-|_{x=0} - \frac{\sigma^-}{\kappa^- + \sigma^-} \eta^-|_{x=\ell^-} \\ &+ \frac{\sigma^+}{\kappa^+ + \sigma^+} \eta^+|_{x=\ell^{sep}} + \frac{\kappa^+}{\kappa^+ + \sigma^+} \eta^+|_{x=\ell^{cel}} \\ &- \frac{1}{S} \left( \frac{\ell^-}{\kappa^- + \sigma^-} + \frac{\ell^{sep}}{\kappa^{sep}} + \frac{\ell^+}{\kappa^+ + \sigma^+} \right) i_d. \end{aligned}$$

La suposición 1 hace posible que  $\kappa = \kappa^\pm$ ,  $\sigma = \sigma^\pm$ ,  $\ell = \ell^\pm$ ,  $a = a^\pm$ ,  $C_e = C_e^\pm$ ,  $\eta^-|_{x=0} = -\eta^+|_{x=\ell^{cel}}$  y  $\eta^-|_{x=\ell^-} = -\eta^+|_{x=\ell^{sep}}$ . Luego, es posible representar la dinámica del capacitor considerando solo uno de los electrodos, por simplicidad, se escoge el positivo. La segunda suposición implica que la capacitancia específica de los electrodos  $C_e$  es un parámetro constante (Romero-Becerril, 2015). De esta forma, el modelo de electrodo único (MEU) es

$$\frac{\partial \eta^+}{\partial t} = \frac{1}{a C_e} \frac{\kappa \sigma}{\kappa + \sigma} \frac{\partial^2 \eta^+}{\partial x^2},$$

con  $\eta^+(0, x) = \eta_0^+(x)$  para  $\ell^{sep} \leq x \leq \ell^{cel}$  y condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^+}{\partial x} &= \frac{i_d}{S \kappa} \quad \text{en } x = \ell^{sep}, \\ \frac{\partial \eta^+}{\partial x} &= \frac{-i_d}{S \sigma} \quad \text{en } x = \ell^{cel}. \end{aligned}$$

la función de salida se reduce a

$$v_d = \frac{2\sigma}{\kappa + \sigma} \eta^+|_{x=\ell^{sep}} + \frac{2\kappa}{\kappa + \sigma} \eta^+|_{x=\ell^{cel}} - \frac{1}{S} \left( \frac{2\ell}{\kappa + \sigma} + \frac{\ell^{sep}}{\kappa^{sep}} \right) i_d.$$

Finalmente, haciendo  $\eta = \eta^+$  y normalizando la coordenada longitudinal sobre el electrodo positivo de la manera  $\xi = (x + \ell^{sep})/\ell$ , el MEU puede escribirse como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{a C_e \ell^2} \frac{\kappa \sigma}{\kappa + \sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}$$

con  $\eta(0, \xi) = \eta_0(\xi)$  para  $0 \leq \xi \leq 1$  y condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{\ell}{S \kappa} i_d \quad \text{en } \xi = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{-\ell}{S \sigma} i_d \quad \text{en } \xi = 1. \end{aligned}$$

Función de salida:

$$v_d = \frac{2\sigma}{\kappa + \sigma} \eta|_{\xi=0} + \frac{2\kappa}{\kappa + \sigma} \eta|_{\xi=1} - \frac{1}{S} \left( \frac{2\ell}{\kappa + \sigma} + \frac{\ell^{sep}}{\kappa^{sep}} \right) i_d$$

Los parámetros de este modelo se encuentran en la Tabla 1.

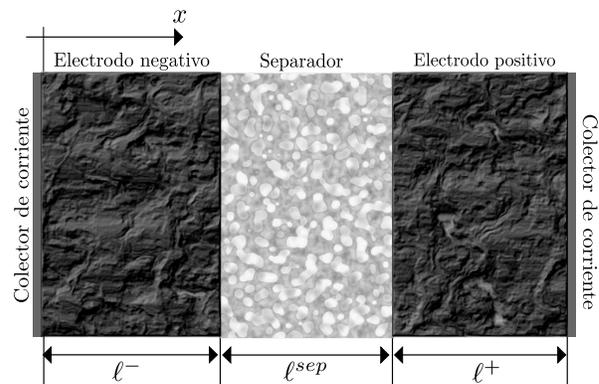


Figura 1. Esquema de un capacitor DCE.

Tabla 1. Parámetros del MEU

Parámetro	Símbolo
Conductividad nominal del sustrato sólido	$\sigma_0$
Conductividad nominal de la solución electrolítica	$\kappa_0$
Porosidad de los electrodos	$\epsilon$
Constante de Bruggeman de los electrodos	$brug$
Porosidad del separador	$\epsilon^{sep}$
Constante de Bruggeman del separador	$brug^{sep}$
Conductividad efectiva del sustrato	$\sigma$
Conductividad efectiva de la solución electrolítica	$\kappa$
Espesor de los electrodos	$\ell$
Espesor del separador	$\ell^{sep}$
Sección transversal del capacitor DCE	$S$
Constante de tiempo	$\tau = aC_e\ell^2\left(\frac{\kappa+\sigma}{\kappa\sigma}\right)$
Tensión máxima en las terminales	$v_m$

## 2.2 MEU Discretizado

Como se reporta en (Romero-Becerril, 2015), la dinámica de la distribución del potencial eléctrico en la doble capa a lo largo del electrodo positivo de un capacitor DCE se describe, sobre los puntos interiores de la malla de discretización, con la ecuación de estado

$$\dot{\eta} = \vartheta_a A \eta + \vartheta_b (B_1 - \vartheta_c B_n) i_d, \quad (1)$$

con  $\eta(0) = \eta_0$ . La función de salida es

$$v_d = \frac{2}{\vartheta_c + 1} \eta_1 + \frac{2\vartheta_c}{\vartheta_c + 1} \eta_n - \left( \frac{2\vartheta_c}{\vartheta_c + 1} \frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} + \vartheta_d \right) i_d, \quad (2)$$

donde  $\eta_1(t)$  y  $\eta_n(t)$  son las aproximaciones de  $\eta(t, \xi)$  en las fronteras, es decir,

$$\eta_1 = C_1 \eta + \frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} (d_{1,1} - \vartheta_c d_{1,n}) i_d, \quad (3a)$$

$$\eta_n = C_n \eta + \frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} (d_{n,1} - \vartheta_c d_{n,n}) i_d. \quad (3b)$$

Los parámetros  $\vartheta$  del modelo de electrodo único reducido (MEUR) son

$$\vartheta_a = \frac{1}{aC_e\ell^2} \frac{\kappa\sigma}{\kappa + \sigma}, \quad \vartheta_b = \frac{1}{aC_e\ell^2} \frac{\kappa\sigma}{\kappa + \sigma} \frac{\ell}{\kappa S},$$

$$\vartheta_c = \frac{\kappa}{\sigma}, \quad \vartheta_d = \frac{\ell^{sep}}{\kappa^{sep} S}.$$

Las matrices involucradas se encuentran en el Apéndice A.

## 3. CÁLCULO DEL ESTADO DE CARGA

En el caso de los capacitores DCE, el estado de carga (SoC) se calcula tradicionalmente como

$$SoC(t) = \frac{v(t) - v_0}{v_{100}}, \quad (4)$$

donde  $v(t)$  es el voltaje medido en el instante  $t$ ,  $v_{100}$  y  $v_0$  son los voltajes en las terminales del capacitor completamente cargado y descargado, respectivamente. Esta expresión tiene su origen en la energía almacenada en un capacitor, calculada como

$$W(t) = \frac{1}{2} C v(t)^2 \quad (5a)$$

$$W(t) = \frac{Q(t)^2}{2C}, \quad (5b)$$

donde  $v(t)$  es el voltaje del capacitor,  $Q(t)$  la carga almacenada y  $C$  la capacitancia. Combinando (5a) y (5b) y recordando que  $C = Q/V$ , se obtiene

$$Q_t = \frac{v(t)}{v_{nom}}, \quad (6)$$

donde  $v_{nom}$  es el voltaje nominal del capacitor, especificado por el fabricante. Aquí es posible apreciar que (6) es (4), con  $v_{100} = v_{nom}$  y  $v_0 = 0$ .

Por otro lado, el SoC puede ser calculado con el cociente

$$SoC(t) = \frac{2\eta_p(t) - v_0}{v_{100} - v_0}, \quad (7)$$

donde  $\eta_p(t)$  es el potencial en la capa eléctrica doble promediado en el volumen del electrodo. En (Romero-Becerril, 2015) se prueba que

$$\eta_p = C_p \eta, \quad C_p = (T_1 B_n)^{-1} T_1, \quad (8)$$

donde  $T_1$  es el vector característico transpuesto asociado al valor característico nulo de la matriz del sistema ( $A$ ).

El estado de carga crítico (SoCc) se calcula como

$$SoCc(t) = \frac{2\eta_c(t) - v_0}{v_{100} - v_0}, \quad (9)$$

donde

$$\eta_c = \frac{1}{\vartheta_c + 1} (C_1 + \vartheta_c C_n) \eta \quad (10)$$

es el potencial interfacial crítico de uno de los electrodos.

## 4. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Con el objetivo de facilitar la notación, se definen las siguientes matrices

$$\bar{A} = \vartheta_a A \quad (11a)$$

$$\bar{B} = \vartheta_b (B_1 - \vartheta_c B_n) \quad (11b)$$

$$\bar{C} = \frac{2}{\vartheta_c + 1} C_1 + \frac{2\vartheta_c}{\vartheta_c + 1} C_n \quad (11c)$$

$$\bar{D} = \frac{2}{\vartheta_a(\vartheta_c + 1)} (\vartheta_b (d_{1,1} - \vartheta_c d_{1,n}) + \vartheta_c \vartheta_a (d_{n,1} - \vartheta_c d_{n,n})) - \left( \frac{2\vartheta_c \vartheta_b}{\vartheta_a(\vartheta_c + 1)} + \vartheta_d \right) \quad (11d)$$

Las condiciones de observabilidad pueden verificarse obteniendo el rango de la matriz de observabilidad del par  $(\bar{A}, \bar{C})$ . Se utiliza un filtro de Kalman estacionario para estimar  $\eta$  y, a partir de (7), calcular el SoC. El esquema de observación tiene la forma

$$\dot{\hat{\eta}} = \bar{A} \hat{\eta} + \bar{B} i_d + K (v_d - \hat{v}_d), \quad (12a)$$

$$\hat{v}_d = \bar{A} \hat{\eta} + \bar{D} i_d \quad (12b)$$

La ganancia de inyección del error de salida para el esquema (12a)-(12b) es

$$K = P \bar{C}^T R^{-1}, \quad (13)$$

donde  $P$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$P \bar{A}^T + \bar{A} P - P \bar{C}^T R^{-1} \bar{C} P = -Q, \quad (14)$$

con  $Q$  la matriz de covarianza del ruido asociada a los estados y  $R$  la covarianza del ruido a la salida.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los experimentos se realizan en el banco de pruebas detallado en (Romero-Becerril, 2015) utilizando un tiempo de muestreo de 1 ms sobre un capacitor Maxwell BCAP0150 150 F, 2.85 V, 40 A. El banco de pruebas consiste en una fuente programable, una carga programable, el circuito de alimentación al capacitor, una etapa de acondicionamiento de señal y tarjetas de adquisición de datos de National

Tabla 2. Parámetros de un capacitor Maxwell BCAP0150

Parámetro	Valor
$\vartheta_a$	$7.6102 \times 10^{-1}$
$\vartheta_b$	$2.8987 \times 10^{-3}$
$\vartheta_c$	$1.4652 \times 10^{-1}$
$\vartheta_d$	$8.0061 \times 10^{-3}$

Instruments. La señal de entrada  $i_d$  se forma de dos pulsos, uno de carga con amplitud de 1.3 A durante 30 s, un periodo de relajación de 30 s y, posteriormente, un pulso de descarga de 13 A durante 3 s, como se muestra en la Fig. 2. Los parámetros de este capacitor se reportan en (Romero-Becerril, 2016), con una parametrización basada en resistencias equivalentes del capacitor, distinta a la del presente trabajo. Es posible establecer la siguiente relación entre los parámetros  $\vartheta_a$ ,  $\vartheta_b$ ,  $\vartheta_c$  y  $\vartheta_d$ , y los parámetros  $\vartheta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  reportados en (Romero-Becerril, 2016), de la siguiente forma

$$\vartheta_a = \vartheta_1 \quad (15)$$

$$\vartheta_b = \vartheta_1 \vartheta_2 \quad (16)$$

$$\vartheta_c = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \quad (17)$$

$$\vartheta_d = \vartheta_4. \quad (18)$$

Con el objetivo de evaluar cualitativamente el desempeño del observador en las variables que no es posible medir, se utilizará un sistema virtual alimentado por la corriente del experimento para generar  $\eta$ ,  $\eta_c$ ,  $\eta_p$ ,  $SoC$  y  $SoC$  como señales de referencia. El  $SoC$  y  $SoC$  recuperados con el observador, se calculan a través de  $\hat{\eta}$ , (7) y (9). Un diagrama esquemático del experimento se muestra en la Fig. 3. Los parámetros utilizados en las pruebas experimentales se encuentran en la Tabla 2, corresponden al capacitor Maxwell BCAP0150.

La Figura 4 muestra la salida medida  $v_{exp}$ , estimada  $\hat{v}$  y la predicha con el modelo virtual  $v$ . La salida estimada converge en apenas 0.04 s de iniciado el experimento, a pesar de iniciar con condiciones iniciales nulas, y sigue con precisión a  $v_{exp}$  salvo en los instantes en los que  $i_d$  cambia abruptamente en tales instantes presenta ligeras desviaciones con amplitud del ruido de medición.  $v$  presenta errores de hasta 20 mV en la predicción de  $v_{exp}$ , lo cual representa 0.7% del voltaje máximo del capacitor. Si bien este error es aceptable, acarrea errores en las variables utilizadas como comparación. Las variables estimadas son confiables debido a la observabilidad del modelo, es decir, si el error de salida es nulo, el error en el estado también.

La Fig. 5 muestra los potenciales crítico y promedio del modelo virtual ( $\eta_c$  y  $\eta_p$ ) y los predichos por el filtro de Kalman ( $\hat{\eta}_c$  y  $\hat{\eta}_p$ ), utilizados en el cálculo del  $SoC$  y del  $SoC$ . Ambos potenciales presentan un comportamiento similar y se observan desviaciones en los instantes cuando cambia  $i_d$ , resultantes del error de  $v$  respecto a  $v_{exp}$ . Se presenta una buena predicción del  $SoC$  por parte del filtro de Kalman ( $\hat{SoC}$ ), cuya desviación máxima es de 1.7% con respecto del  $SoC$  del modelo virtual, como puede verse en la Fig. 6. Finalmente, en la Fig. 7, se muestra el  $SoC$  calculado de manera tradicional ( $SoC_Q$ ) mediante (6), comparado contra el  $SoC$  estimado ( $\hat{SoC}$ ) y el predicho ( $SoC$ ), se observa un comportamiento similar en los tres casos. En estado permanente no existe diferencia

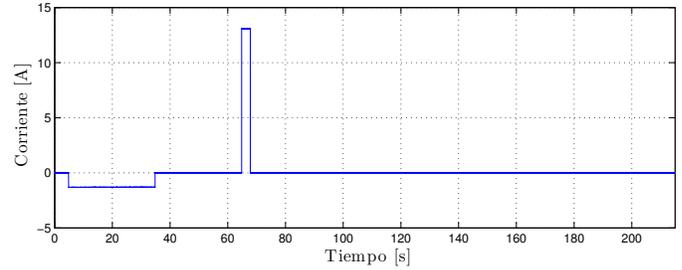


Figura 2. Corriente de entrada.

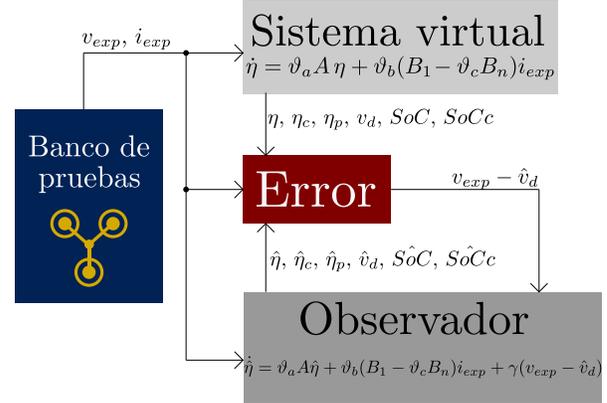


Figura 3. Diagrama esquemático del experimento.

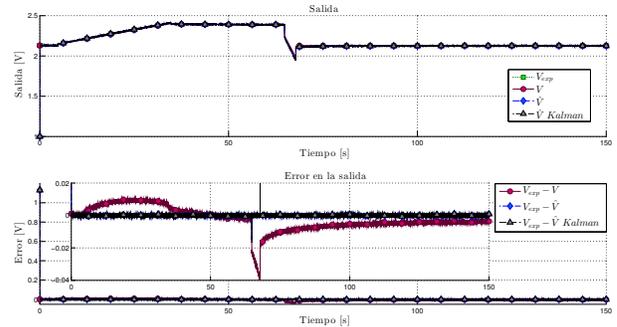


Figura 4. Salida y error en la salida.

alguna entre ellos, sin embargo, el esquema tradicional presenta error en las etapas de carga y descarga de hasta 6% comparado contra  $\hat{SoC}$  y de 7.5% contra  $SoC$ , lo que implica que incluso un modelo en lazo abierto es mejor que el esquema tradicional.

## 6. CONCLUSIONES

El filtro de Kalman puede utilizarse de manera satisfactoria para la estimación del estado de carga en capacitores DCE, se recomienda su uso debido a la presencia de ruido de medición en las variables de voltaje y corriente, presenta un comportamiento satisfactorio en el seguimiento de la salida medida, aún ante variaciones bruscas de la corriente de entrada, lo cual es una propiedad deseable en vehículos eléctricos o híbridos.

El esquema tradicional de medición del estado de carga es más barato y más sencillo, sin embargo, presenta errores de hasta 6% durante las fases de carga y descarga con respecto de los resultados de este trabajo. Además, únicamente

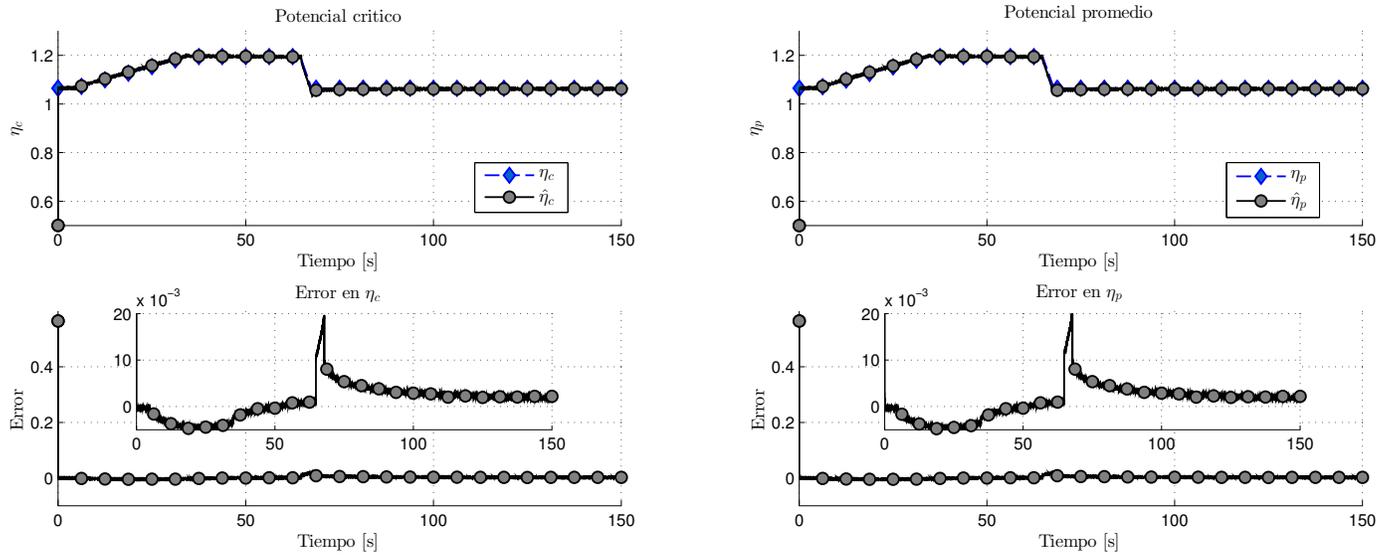


Figura 5. Potenciales crítico y promedio.

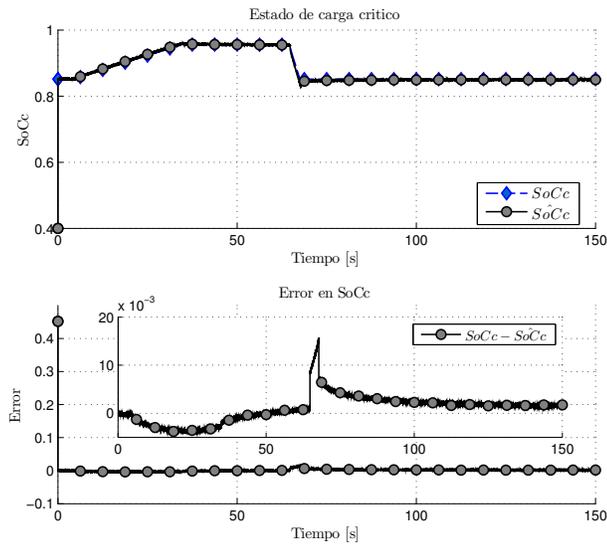


Figura 6. Estado de carga crítico.

es preciso en estado permanente, confirmando lo dicho en (Nadeau, 2014), donde se establece que una aproximación capacitiva no puede representar adecuadamente la energía almacenada en un supercapacitor.

El modelo en lazo abierto predice con poco error las variables del sistema y depende únicamente de cuatro parámetros, al igual que el observador, lo cual facilita su implementación en diferentes capacitores. En caso que se tenga una parametrización basada en resistencias equivalentes como la de (Romero-Becerril, 2016), las expresiones (15)-(18) la hacen compatible con la de este trabajo.

El trabajo futuro puede extenderse hacia una versión robusta del observador ante variaciones paramétricas o hacia la implementación del observador en su versión discreta en un sistema embebido.

#### RECONOCIMIENTOS

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) y al Instituto de Ingeniería de

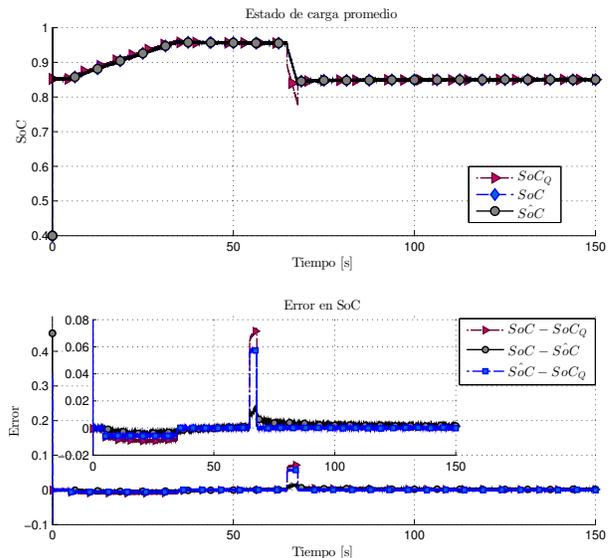


Figura 7. Estado de carga promedio.

la UNAM el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

#### REFERENCIAS

- W. G. Conway, B. E. y Pell. Double-layer and pseudocapacitance types of electrochemical capacitors and their applications to the development of hybrid devices. *Journal of Solid State Electrochemistry*, 7(9):637–644, 2003. ISSN 1432-8488. doi: 10.1007/s10008-003-0395-7.
- S.R. Drummond, R. y Duncan. On observer performance for an electrochemical supercapacitor model. In *Control Applications (CCA), 2015 IEEE Conference on*, pages 1260–1265. IEEE, 2015.
- Azidin F. A. y Mohamed A. Hannan, M. A. Hybrid electric vehicles and their challenges: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 29:135–150, 2014. ISSN 13640321. doi: 10.1016/j.rser.2013.08.097. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2013.08.097>.
- K. Jorgensen. Technologies for electric, hybrid and hydrogen vehicles: Electricity from renewable energy sources

in transport. *Utilities Policy*, 16(2):72–79, 2008. ISSN 0957-1787. doi: 10.1016/j.jup.2007.11.005.

Sharma G. y Soyata T. Nadeau, A. State-of-charge estimation for supercapacitors: A kalman filtering formulation. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pages 2194–2198. IEEE, 2014.

A. Romero-Becerril. *Reducción y validación de modelos electroquímicos de celdas de iones de Litio y supercapacitores*. PhD thesis, UNAM, 2015.

L. Romero-Becerril, A. y Alvarez-Icaza. Order reduction and analysis of a simplified electrochemical model for electric double-layer capacitors. In *ASME 2012 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference joint with the JSME 2012 11th Motion and Vibration Conference*, pages 395–404. American Society of Mechanical Engineers, 2012.

L. Romero-Becerril, A. y Alvarez-Icaza. Reduced electrochemical model of electric double-layer capacitors: model deduction and experimental validation (En revisión). *Journal of Power Sources*, 2016.

Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno de la Ciudad de México). Programa Temporal Hoy No Circula, publicado en <http://www.sedema.df.gob.mx/>, consultado el 7 de abril de 2016, 2016.

Tian Q. y Lian K. Weigert, T. State-of-charge prediction of batteries and battery–supercapacitor hybrids using artificial neural networks. *Journal of Power Sources*, 196(8):4061–4066, 2011.

$Q$  fue obtenida del análisis de covarianza *a posteriori* de los estados resultantes de inyectar la entrada al sistema virtual, mientras que  $R$  se obtuvo directamente del análisis de covarianza de la medición de la salida. Con estas matrices y utilizando el comando `are` de Matlab para resolver la ecuación de Riccati involucrada, se obtiene

$$P = 1 \times 10^{-2} \begin{bmatrix} -6.1688 & -4.9070 & 0.8638 & 4.4737 & 4.7140 & 1.9524 \\ -4.9070 & -8.4467 & -1.6236 & 5.0759 & 6.2561 & 3.3380 \\ 8.6387 & -1.6236 & -4.0963 & -1.3503 & 2.5263 & 1.8658 \\ 4.4737 & 5.0759 & -1.3503 & -5.4372 & -3.6739 & -1.1276 \\ 4.7140 & 6.2561 & 2.5263 & -3.6739 & -7.1567 & -3.5148 \\ 1.9524 & 3.3380 & 1.8658 & -1.1276 & -3.5148 & -2.8198 \end{bmatrix},$$

por lo que la ganancia de realimentación de salida es

$$K = \begin{bmatrix} 78.608 \\ 78.164 \\ 77.545 \\ 77.107 \\ 76.984 \\ 77.040 \end{bmatrix}.$$

## Apéndice A. MATRICES DEL MODELO

Las matrices resultantes de la discretización, utilizadas en el modelo (1)-(2) son

$$A = \begin{bmatrix} -116.9522 & 135.9324 & -26.5266 & 12.2387 & -8.4859 & 3.7937 \\ 64.5633 & -110.3922 & 56.4838 & -16.0932 & 9.4698 & -4.0316 \\ -9.7152 & 43.5490 & -64.4602 & 38.5522 & -12.4092 & 4.4834 \\ 4.4834 & -12.4092 & 38.5522 & -64.4602 & 43.5490 & -9.7152 \\ -4.0316 & 9.4698 & -16.0932 & 56.4838 & -110.3922 & 64.5633 \\ 3.7937 & -8.4859 & 12.2387 & -26.5266 & 135.9324 & -116.9522 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -13.0235 & -0.1523 \\ 0.8581 & 0.1558 \\ -0.2565 & -0.1539 \\ 0.1539 & 0.2565 \\ -0.1558 & -0.8581 \\ 0.1523 & 13.0235 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1.1158 \quad -0.1548 \quad 0.0600 \quad -0.0360 \quad 0.0281 \quad -0.0131]$$

$$C_n = [-0.0131 \quad 0.0281 \quad -0.0360 \quad 0.0600 \quad -0.1548 \quad 1.1158]$$

$$d_{1,1} = -0.0233,$$

$$d_{1,n} = 5.4123 \times 10^{-4},$$

$$d_{n,1} = -5.4123 \times 10^{-4},$$

$$d_{n,n} = 0.0233.$$

Para el filtro de Kalman se utilizaron las matrices de covarianza del ruido

$$Q = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 2.9193 & 2.8824 & 2.8337 & 2.7999 & 2.7918 & 2.7971 \\ 2.8824 & 2.8619 & 2.8308 & 2.8066 & 2.7989 & 2.8007 \\ 2.8337 & 2.8308 & 2.8196 & 2.8068 & 2.8001 & 2.7984 \\ 2.7999 & 2.8066 & 2.8068 & 2.8010 & 2.7953 & 2.7919 \\ 2.7918 & 2.7989 & 2.8001 & 2.7953 & 2.7902 & 2.7868 \\ 2.7971 & 2.8007 & 2.7984 & 2.7919 & 2.7868 & 2.7843 \end{bmatrix},$$

$$R = 4.6781 \times 10^{-7}.$$