

# Análisis topológico de la superficie de un atractor multi-scroll de orden fraccionario: Atractor multi-scroll de Chua.

D. E. Rivas-Cisneros \* D. A. Diaz-Romero \*

\* Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza,  
Nuevo León, México, (e-mail: daniel.rivascs@uanl.edu.mx,  
david.diazrr@uanl.edu.mx).

---

## Resumen

Existen varias formas de clasificar los atractores caóticos en  $R^3$  y una de ellas es la topológica. El análisis clásico para el estudio del comportamiento topológico de atractores caóticos en  $R^3$  de orden entero se realiza modificando los parámetros del lado derecho de la ecuación y las condiciones iniciales. En el presente trabajo el análisis se realiza al cambiar el orden de la derivada, lo que significa que el sistema puede tomar cualquier orden, no necesariamente entero. A través de un análisis estrictamente topológico, se estudia si el *genus* de la superficie del atractor multi-scrolls de Chua de orden entero es *topológicamente equivalente* a su atractor de orden fraccionario.

*Keywords:* Sistemas fraccionarios, Superficie, Genus, Topología, Formas canónica.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La topología estudia las deformaciones continuas o discontinuas de un objeto o superficie a través de propiedades topológicas, una de esas propiedades es el *genus*. La deformación continua es cuando las propiedades topológicas permanecen invariantes. La deformación discontinua sucede cuando las propiedades topológicas se alteran. Hay varias formas de clasificar a los atractores caóticos en  $R^3$ , la topología es una de las más rigurosas. Desde el punto de vista topológico, los atractores caóticos se clasifican de acuerdo con su *genus* [Tsankov (2003), Tsankov (2004)]. El *genus* ( $g$ ) es un invariante topológico y se interpreta como el número de agujeros independientes que tiene la superficie [Cromwell (2004)]. De esta manera, la esfera tiene una superficie con *genus*  $g = 0$ , la superficie del toro tiene un *genus*  $g = 1$ ; para  $g \geq 2$  es el toro con  $g$ -agujeros. Entonces, dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se dicen que son *topológicamente equivalentes* si el *genus* es el mismo [Cromwell (2004)]. Por lo tanto, para que la superficie de dos atractores caóticos sean *topológicamente equivalentes* tiene que tener el mismo *genus* [Tsankov (2003), Tsankov (2004)], esto significa que hay un mapeo continuo 1 a 1 con inversa continua. De lo contrario no son topológicamente equivalentes.

La teoría de la integración y diferenciación de orden no entero, también conocida como *cálculo fraccionario* ha estado presente desde hace más de 300 años pero en las últimas décadas ha tenido un gran crecimiento de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia tales como: sistemas dinámicos [Tavazoei (2008)], ingeniería de control [Petráš (2009)], procesamiento de señales [Sheng (2011)] e ingeniería biomédica [Magin (2011)]. Este tópico de las matemáticas permite considerar la integración y la derivación de cualquier orden, no necesariamente entero.

Una de las razones la cual se uso por mucho tiempo modelos de orden entero fue la ausencia de métodos de solución para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Gracias a la investigación de científicos como Liouville, Grünwald, Riemann, Letnikov y Caputo, en el presente tenemos métodos de solución para la derivada de orden fraccionaria e integral de orden fraccionaria.

En la literatura se estudia si los sistemas caóticos permanecen con sus propiedades caóticas al cambiar el orden del sistema [Tavazoei (2008), Tavazoei (2008)]. En este trabajo se estudia si el cambio de orden del sistema afecta la superficie topológica del atractor multi-scroll. El resultado principal de este trabajo es que siendo el mismo sistema caótico, la superficie del atractor multi-scroll de Chua de orden entero no es topológicamente equivalente a su atractor de orden fraccionario.

El artículo esta organizado como sigue: Sección 2, introducción a la topología de los atractores caóticos en  $R^3$ . Sección 3, conceptos de sistemas de orden fraccionarios. Sección 4, la equivalencia topológica entre atractores de orden entero y orden fraccionario. Sección 5, análisis topológico del atractor multi-scroll de Chua de orden entero. Sección 6, análisis topológico del atractor de Chua de orden fraccionario. Finalmente, las conclusiones en la sección 7.

## 2. TOPOLOGÍA GENERAL DE ATRACTORES CAÓTICOS

Desde el punto de vista topológico, los atractores caóticos tienen tres estructuras bien definidas, las cuales son: la estructura fractal, el conjunto de trayectorias y la superficie [Tsankov (2003)]. Como se mencionó anteriormente, la superficie del atractor se estudia y clasifica por su *genus*. Las formas canónicas nos permiten saber el tipo de

superficie que tiene el atractor caótico. La forma canónica se define como la proyección del atractor caótico sobre una superficie plana bidimensional con  $g$ -agujeros interiores [Tsankov (2003), Tsankov (2004)]. Hay dos tipos de formas canónicas que representan las superficies de una gran variedad de atractores caóticos, las cuales son la forma canónica de la cadena y la forma canónica del círculo [Tsankov (2003), Tsankov (2004)]. En este trabajo solo se utiliza la de la cadena. La forma canónica de la *cadena* se representa como  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) con  $n$ -agujeros interiores o desde el punto de vista de sistemas caóticos con  $n$ -scrolls o  $n$ -espirales y  $n - 1$  agujeros cuadrados los cuales separan a los  $n$ -scrolls. Por lo que el *genus* para este tipo de superficie es  $g = 2n - 1$  [Tsankov (2003), Tsankov (2004)]. Los atractores multi-*scrolls* pertenecen a la forma  $A_n$ , en la figura 1 se muestra la forma canónica para un atractor de 4-*scrolls*, si usamos la expresión  $g = 2(4) - 1$  su *genus* es 7. Atractores como el de Rössler pertenecen al tipo  $A_1$  y son de *genus* 1 y se muestra en la figura 2.

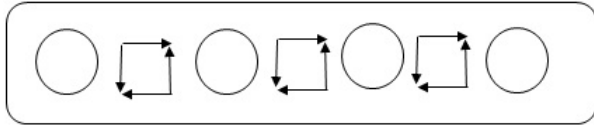


Figura 1. Forma canónica de un atractor de 4-*scrolls* con *genus* 7.

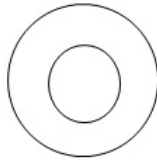


Figura 2. Forma canónica de un atractor de 1-*scrolls* con *genus* 1.

### 3. RESEÑA SOBRE CÁLCULO FRACCIONARIO.

El operador fundamental del cálculo fraccionario se denota como  ${}_a D_t^\alpha$ , donde  $a$  y  $t$  son los límites de la operación y  $\alpha$  el orden no entero de la diferenciación o integración. El operador fraccionario se define como [Petráš (2011)]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Para  $\alpha = N$ , donde  $N$  es entero, la operación  ${}_0 D_t^\alpha f(t)$  da el mismo resultado como la diferenciación y integración de orden entero [Petráš (2011)]. Las aproximaciones más usadas para definir el operador fraccionario son tres, estas son la de Grünwald-Letnikov (G-L), Riemann-Liouville (R-L) y Caputo. En este trabajo se usará solamente la aproximación de G-L, para mas detalles sobre las

propiedades de esta definición en [Magin (2011)]. Esta definición se describe como sigue [Petráš (2011)]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \quad (1)$$

#### 3.1 Sistemas dinámicos de orden fraccionario

Un sistema dinámico de orden entero puede ser generalmente definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, y se describe de la forma [Broer (2011)]:

$$\frac{d^r x_i}{dt^r} = F_i(x), \quad r = 1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Desde el punto de vista topológico, un sistema dinámico consiste de un espacio topológico  $\Sigma$  también llamado *superficie*, un tiempo  $t \in R$  y de un operador de evolución  $\Phi : \Sigma \times R \rightarrow \Sigma$  [Broer (2011), Adams (2008)].

Un sistema dinámico de orden fraccionario es una generalización de los sistemas dinámicos de orden entero, por lo cual puede ser definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, y se describe como sigue [Tarasov (2010)]:

$$D_t^\alpha x_i = F_i(x), \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

En sistemas dinámicos de orden fraccionario el término “orden del sistema” no es igual a los sistemas de orden entero. En sistemas dinámicos de orden entero, el orden del sistema es igual al número de estados del sistema o al conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. En sistemas de orden fraccionario, el orden del sistema es igual a la suma de los ordenes que tenga cada ecuación diferencial que conforme al sistema dinámico. Esto quiere decir, si tenemos un sistema dinámico de orden 3 lo cual son tres ecuaciones diferenciales de primer orden, esto puede ser modificado a que una de las ecuaciones diferenciales su derivada sea de orden fraccionario, por lo cual el orden del sistema sería  $2 + \alpha$  [Petráš (2000)], donde  $0 < \alpha \leq 1$  y si las tres ecuaciones diferenciales sus derivadas son de orden fraccionario el orden total sería  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

#### 3.2 Método numérico para simulación de sistemas dinámicos de orden fraccionario

El algoritmo para resolver la ecuación (3) usa el principio de *memoria corta* y se basa en la definición de G-L (1), el esquema numérico tiene la siguiente forma [Petráš (2011)]:

$$({}_{k-Lm/h}) D_{tk}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \quad (4)$$

donde  $Lm$  es la *longitud de memoria*,  $tk = kh$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $h$  es el intervalo de tiempo del cálculo y  $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$  son los coeficientes binomiales  $c_j^{(\alpha)}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ). Para su cálculo se usa la siguiente expresión:

$$c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)}. \quad (5)$$

La solución numérica general de la ecuación diferencial de orden fraccionario es de la forma:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = f(x(t), t). \quad (6)$$

la solución de la ecuación (6) puede ser expresada como:

$$x(tk) = f(x(tk), tk)h^\alpha - \sum_{j=v}^k c_j^{(\alpha)} x(tk - j). \quad (7)$$

#### 4. RELACIÓN ENTRE LA SUPERFICIE DE ATRACTORES CAÓTICOS DE ORDEN ENTERO Y ATRACTORES CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO.

En este punto se considera la equivalencia topológica entre la superficie de atractores caóticos de orden entero y de orden fraccionario. En topología, un sistema dinámico es definido como una función que mapea un espacio a sí mismo [Adams (2008)]. Específicamente, sea  $\Sigma_1$  una superficie de un atractor de orden entero y  $\Sigma_2$  una superficie de un atractor de orden fraccionario. Entonces,  $f^\alpha : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$  sea una función que mapea  $\Sigma_1$  a sí mismo, donde  $\alpha \in \mathbb{N}$  [Adams (2008)]. Considerando la misma función, sea  $f^\alpha : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  una función que mapea  $\Sigma_2$  a sí mismo, donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Por lo que se deduce el siguiente enunciado, sea  $f^{\alpha \in \mathbb{N} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  una función que mapea  $\Sigma_1$  a  $\Sigma_2$  entonces se dice que las dos superficies son topológicamente equivalentes si y solo si el *genus* permanece invariante.

#### 5. ATRACTOR MULTI-SCROLL DE CHUA DE ORDEN ENTERO

El atractor clásico de Chua genera un atractor caótico de 2-scroll. El atractor modificado de Chua genera un atractor multi-scroll, este atractor multi-scroll se describe como sigue [Lu (2006)]:

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha_1} x &= A(y - f(x)), \\ D_t^{\alpha_2} y &= x - y + z, \\ D_t^{\alpha_3} z &= -By. \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $f(x) = -bsin(\frac{\pi x}{2a} + d)$ . Los parámetros son:  $A=10.814$ ,  $B=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$  y  $d=0$ . El orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1)$  donde el orden total es de 3. El atractor multi-scroll de Chua de orden entero se muestra en la figura 3. Como se puede observar en la figura 3 el atractor tiene 5-scrolls por lo que su superficie de acuerdo a la fórmula  $g = 2n - 1$  es de  $g = 9$ .

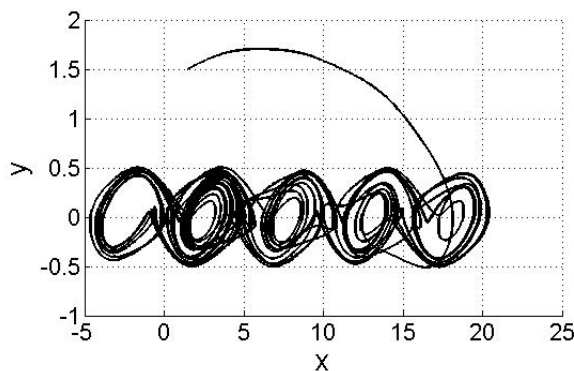


Figura 3. Atractor multi-scroll de Chua de orden entero (orden 3).

## 6. RESULTADOS

En este punto se cambia el orden del sistema (8), para analizar si ocurre un cambio topológico en la superficie del atractor con respecto al de orden entero. Se analizan 4 casos con diferentes ordenes y se calcula su *genus*.

### 6.1 Caso 1

Para el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.99, 1, 1)$  donde el orden total es de 2.99, el atractor multi-scroll de Chua con este orden se muestra en la figura 4. Como se puede observar en la figura 4 el atractor tiene 7-scrolls por lo que su superficie es de  $g = 13$ .

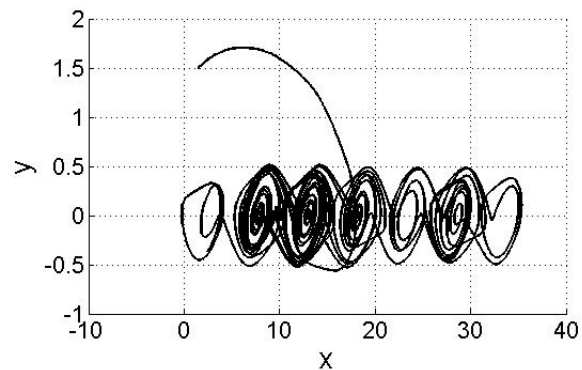


Figura 4. Atractor multi-scroll de Chua de orden fraccionario (orden 2.99).

### 6.2 Caso 2

Para el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.99, 0.99, 1)$  donde el orden total es de 2.98, el atractor multi-scroll de Chua con este orden se muestra en la figura 5.

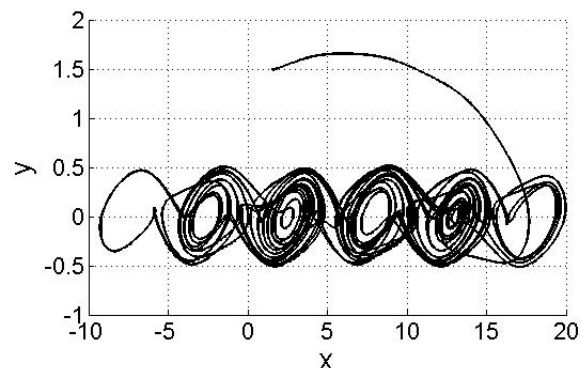


Figura 5. Atractor multi-scroll de Chua de orden fraccionario (orden 2.98).

Como se puede observar en la figura 5 el atractor tiene 6-scrolls por lo que su superficie es de  $g = 11$ .

### 6.3 Caso 3

Para el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.99, 0.99, 0.99)$  donde el orden total es de 2.97, el atractor multi-scroll de Chua con este orden se muestra en la figura 6.

Como se puede observar en la figura 6 el atractor tiene 4-scrolls por lo que su superficie es de  $g = 7$ .

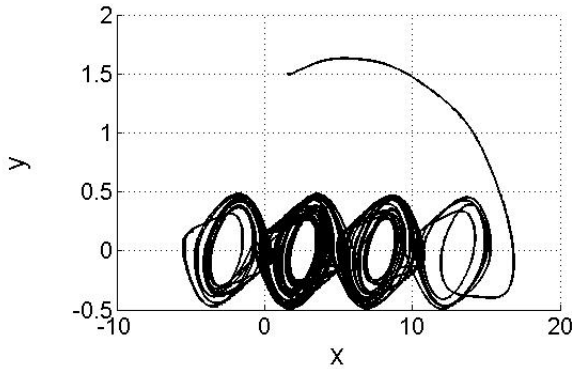


Figura 6. Atractor multi-*scroll* de Chua de orden fraccionario (orden 2.97).

#### 6.4 Caso 4

Para el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.95, 0.95)$  donde el orden total es de 2.85, el atractor multi-*scroll* de Chua con este orden se muestra en la figura 7.

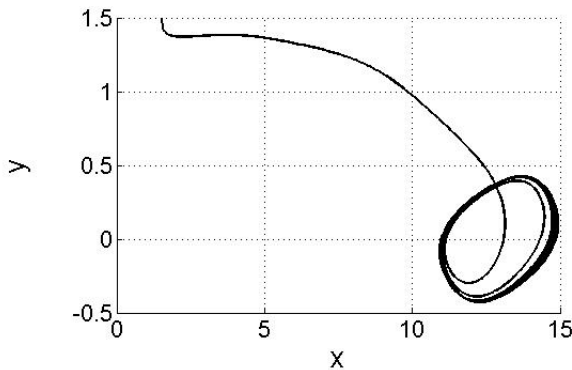


Figura 7. Atractor multi-*scroll* de Chua de orden fraccionario (orden 2.85).

Como se puede observar en la figura 7 el atractor tiene 1-*scrolls* por lo que su superficie es de  $g = 1$ .

#### 6.5 Comparativa entre el atractor de orden entero y el atractor de orden fraccionario

Como se mencionó anteriormente, topológicamente los atractores caóticos se clasifican por su *genus* y si tienen el mismo *genus* sus superficies son topológicamente equivalentes. Si comparamos el *genus* del atractor multi-*scroll* de Chua de orden entero, el cual es *genus* 9, de la figura 3, el *genus* es diferente a los atractores multi-*scroll* de Chua de orden fraccionario, los cuales se generaron a partir del cambio de orden, sus *genus* son diferentes. En este caso particular, el mapeo de  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  donde  $\Sigma_1 \in \mathbb{N}$  y  $\Sigma_2 \in \mathbb{R}$ , no es topológicamente equivalente. De la misma forma, el mapeo de  $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  no es topológicamente equivalente. Para estos resultados en específico, el sistema (8) de orden entero no es topológicamente equivalente a su orden fraccionario ya que la estructura topológica de la superficie del atractor cambia.

## 7. CONCLUSIONES

El *genus* es un invariante topológico para superficies y nos ayuda a conocer el tipo de superficie que tienen los atractores caóticos en  $\mathbb{R}^3$ . Si dos atractores tienen el mismo *genus* significa que sus superficies son topológicamente equivalentes entre sí. Por medio del *genus* se analizó si la superficie del sistema multi-*scroll* de Chua de orden entero es topológicamente equivalente a la superficie del sistema multi-*scroll* de Chua de orden fraccionario. El resultado en particular fue que, siendo el mismo sistema, las superficies de los sistemas de orden fraccionario y orden entero no son topológicamente equivalentes. Por lo que se concluye que el orden del sistema puede alterar la superficie topológica del atractor y modificar el número de *scrolls* del sistema.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento a CONACYT por la beca otorgada

## REFERENCIAS

- T.D. Tsankov and R. Gilmore, Strange Attractors are Classified by Bounding Tori, *Physical Review Letters* **91**(2003) 134104.
- T.D. Tsankov and R. Gilmore, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $\mathbb{R}^3$  *Physical Review E* **69**(2004) 056206.
- P.R. Cromwell, Knots and Links, 1st ed. (Cambridge University Press, 2004)
- M.S. Tavazoei and M. Heari, Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems, *Nonlinear Analysis* **69**(2008) 1299.
- I. Petráš, FRACTIONAL-ORDER CONTROL FEEDBACK CONTROL OF A DC MOTOR, *Journal of Electrical Engineering* **60**(2009) 117.
- H. Sheng, YQ. Chen and TS. Qiu, Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing, (*Signals and Communication Technology, Springer, 2011*).
- R. Magin, M.D. Ortigueira, I. Podlubny and J. Trujillo, On the fractional signals and systems, *Signal Processing* **91**(2011) 350.
- M.S. Tavazoei and M. Heari, Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems, *Physica D* **237**(2008) 2628.
- I. Petráš, Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation, (*Nonlinear Physical Science, Springer, 2011*).
- C. Adams and R. Franzosa, Introduction to Topology: Pure and Applied, 1st ed. (Perason, 2008).
- H. Broer and F. Takens, Dynamical Systems and Chaos, Vol. 172 (*Springer, 2011*), pp. 133-165.
- V.E. Tarasov, Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, (*Nonlinear Physical Science, Springer, 2010*).
- I. Petráš, CONTROL OF FRACTIONAL-ORDER CHUA'S SYSTEM *arXiv:nlm/0008029v1* (2000).
- J. Lü and G. Chen, GENERATING MULTISCROLL CHAOTIC ATTRACTORS: THEORIES, METHODS AND APPLICATION *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16**(2006).