

# Estimación Simultánea de Fallas y Estados para Sistemas No Lineales Fraccionales

Iván Trejo-Zúñiga, Rafael Martínez-Guerra\*

*Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Av. IPN  
2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Ciudad de México,  
México. (e-mail: itrejo,rguerra@ctrl.cinvestav.mx)*

---

**Resumen:** Este artículo se enfoca en el problema de diagnóstico de fallas en sistemas no lineales fraccionales basado en herramientas algebraicas y diferenciales. Se introducen dos definiciones esenciales: La observabilidad algebraica fraccional y la diagnosticabilidad algebraica fraccional, estos resultados permiten la construcción de un nuevo observador fraccional capaz de estimar múltiples fallas de manera simultánea, así como variables de estado desconocidas. Además, permitir conocer de antemano si las fallas, estados ó ambos pueden estimarse. Dos simulaciones numéricas permiten mostrar la efectividad y versatilidad de la metodología propuesta.

*Keywords:* Diagnóstico de fallas, Estimación de estados, Observadores fraccionales, Sistemas no lineales fraccionales.

---

## 1. INTRODUCTION

Hoy en día, el cálculo fraccional ha atraído el interés de los investigadores debido a la posibilidad de modelar fenómenos físicos como dinámicas fraccionales. Por ejemplo, S. Jesus and Machado (2008) analizan impedancias eléctricas como dinámicas fraccionales utilizando diagramas de Bode y polares, mientras que L. Zhang (2016) presenta un modelo fraccional para emular la dinámica de ultra condensadores, más ejemplos de esta clase de dinámicas se han reportado en I. Petras (2011). Estos modelos fraccionales permiten explorar nuevas líneas de investigaciones, es decir, es razonable extender las metodologías de orden entero.

El diagnóstico de fallas en sistemas de orden entero ha sido estudiado por muchos años, un trabajo reciente aborda el problema de diagnóstico utilizando un observador de intervalo para sistemas Takagi-Sugeno [D. Rotondo (2016)], por otra parte, S. Rahme (2015) presenta un observador adaptable de modos deslizantes para diagnóstico de fallas en sensores, de igual importancia, en R. Martínez-Guerra (2014) se aborda el problema de diagnóstico en sistemas no lineales usando herramientas algebraicas y diferenciales, dando excelentes resultados. Por el contrario, existen reportes muy limitados sobre el diagnóstico de falla en sistemas fraccionales, se destacan los artículos R. Kopka (2015); A. Aribi (2014), los cuales presentan diferentes métodos para la detección de fallas, sin embargo, estos esquemas no son capaces de reconstruir las fallas del sistema, que es el objetivo principal de este trabajo.

La principal contribución de esta investigación es presentar un esquema novedoso para el diagnóstico de fallas en sistemas no lineales fraccionales, el enfoque se desarrolla mediante una técnica algebraica diferencial considerando dos nuevas definiciones: La observabilidad algebraica frac-

cional (OAF) y la diagnosticabilidad algebraica fraccional (DAF), estos resultados juegan un papel importante para la construcción del nuevo observador propuesto. La metodología está motivada por el escaso número de observadores fraccionales, algunos observadores reportados de esta naturaleza [B. Tamhane (2015); I. N'Doye (2012)] abordan el problema de observación para una clase de sistemas no lineales fraccionales bajo efectos de dinámicas desconocidas, sin embargo, ninguno de ellos es capaz de reconstruir las dinámicas desconocidas, una clara ventaja del observador propuesto en este trabajo. Por lo que sabemos, en la literatura no se ha reportado esta clase de esquema de diagnóstico fraccional.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2, se introducen algunas herramientas del cálculo fraccional que servirán para formular el resultado principal. El planteamiento del problema, y las definiciones de OAF y DAF son introducidos en la Sección 3; en la Sección 4, se describe el observador fraccional, y se proporciona un método sistemático para la reconstrucción de las fallas y variables de estado desconocidas. Posteriormente, para fortalecer la metodología propuesta se llevan a cabo simulaciones numéricas en la Sección 5. Por último, en la sección 6, se resumen las conclusiones de este trabajo.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Algunos conceptos básicos e importantes se presentan en esta sección y son utilizados a lo largo del artículo con el fin de facilitar la comprensión del esquema propuesto.

### 2.1 Derivada Fraccional de Caputo

Existen diferentes definiciones de la derivada de orden  $\alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , véase en I. Podlubny (1999); debido a la interpretación física de las condiciones iniciales se

---

<sup>1</sup> \*Corresponding author.

selecciona el operador fraccional de Caputo, el cual se aplica a lo largo del trabajo.

*Definición 1.* [I. Podlubny (1999)] La derivada fraccional de Caputo de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  es una función de  $x(t)$  definida como:

$${}^C D_t^{(\alpha)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (1)$$

donde,  $n-1 \leq \alpha < n$ ;  $\frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n}$  es la  $n$ -ésima derivada de  $x(t)$  en el sentido usual,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Gamma$  es la función Gamma definida como:<sup>2</sup>

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

que converge en la mitad derecha del plano complejo  $\Re(z) > 0$

Ahora, aplicando  $r$  veces el operador (1) se obtiene la derivada sucesiva de la función  $x(t)$  [K. S. Miller (1993)]:

$$D^{(r\alpha)} x(t) = \underbrace{{}_t D_t^\alpha \dots {}_t D_t^\alpha}_{r\text{-veces}} x(t) \quad (2)$$

Es claro que para  $r = 1$ ,  $D^{(\alpha)} x(t) = x^{(\alpha)}$  y si  $\alpha = 0$  se tiene  $D^{(0)} x(t) = x(t)$ .

### 2.2 Función Mittag-Leffler

La función Mittag-Leffler [A. A. Kilbas (2006)] con dos parámetros está definida como:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0 \quad (3)$$

Esta función se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales fraccionales como la función exponencial en los sistemas de orden entero. Ahora bien, si tenemos valores particulares de  $\alpha$ , la función (3) tiene un comportamiento asintótico en el infinito.

*Teorema 1.* [I. Podlubny (1999)] Sí  $\alpha \in (0, 2)$ ,  $\beta$  es un número complejo arbitrario y  $\delta$  es un número real arbitrario tal que:

$$\alpha \frac{\pi}{2} < \delta < \min(\pi, \pi\alpha), \quad (4)$$

entonces para un entero arbitrario  $k \geq 1$ , se tiene la siguiente expansión

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{i=0}^k \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha i) z^i} + O\left(\frac{1}{|z|^{k+1}}\right) \quad (5)$$

con  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\delta \leq |\arg(z)| \leq \pi$  ■

Por último, se presentan dos importantes propiedades de la función Mittag-Leffler [I. Podlubny (1999); K. S. Miller (1993)].

*Propiedad 1.*

$$\int_0^t \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-k\tau^\alpha) d\tau = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(-kt^\alpha), \quad \beta > 0.$$

*Propiedad 2.*  $E_{\alpha,\beta}(-x)$ , es completamente monótona, es decir,  $(-1)^n E_{\alpha,\beta}^{(n)}(-x) \geq 0$  para  $0 < \alpha \leq 1$  y  $\beta \geq \alpha$  para todo  $x \in (0, \infty)$  y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

<sup>2</sup> Para simplificar la notación en la siguiente secciones se omite la dependencia del tiempo en  $x^{(\alpha)}$ , y se considera  $t_0 = 0$ .

### 3. DIAGNOSTICABILIDAD FRACCIONAL

En esta sección se presenta; el problema de diagnóstico de fallas y las definiciones de OAF y DAF. A continuación, se muestra un sistema no lineal fraccional que esta descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) & 0 < \alpha \leq 1 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6)$$

con  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  como vector de estados,  $\bar{u} = (u, f) = (u_1, u_2, \dots, u_m, f_1, f_2, \dots, f_\mu) \in \mathbb{R}^{m-\mu} \times \mathbb{R}^\mu$  donde  $u$  es el vector de entradas conocidas y  $f$  el vector de entradas desconocidas (vector fallas), y por último,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$  como las salidas medibles del sistema.

Ahora, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo se puede estimar el vector de entradas desconocidas?, esta pregunta surge porque si conocemos  $f$  el problema de diagnóstico de fallas ya está resuelto, y la información que proporciona se puede utilizar para la toma de decisiones (mantenimiento o sustitución de sensores o actuadores) e incluso para abordar algunos problemas de control. Como se mencionó anteriormente, el esquema propuesto se basa en las definiciones de OAF y DAF, estas permiten conocer de antemano si las fallas, variables de estado o ambos pueden ser estimadas, es decir, proporcionan la condición de observabilidad y diagnosticabilidad para la construcción del observador fraccional propuesto.

*Definición 2.* (OAF) Una variable de estado  $x_i \in \mathbb{R}$  satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccional si es función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales de las salidas disponibles  $y$  y las entradas conocidas  $u$ .

$$x_i = \phi_{x_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, D^{(r_1\alpha)} y, u, u^{(\alpha)}, \dots, D^{(r_2\alpha)} u) \quad (7)$$

*Definición 3.* (DAF) Un sistema no lineal fraccional descrito por (6) satisface la propiedad de diagnosticabilidad algebraica fraccional, sí  $f_i$  es fraccional y algebraicamente observable con respecto a  $y, u$  y sus  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas secuenciales, es decir,  $f_i$  satisface la definición 2.

$$f_i = \phi_{f_i}(y, y^{(\alpha)}, \dots, D^{(r_1\alpha)} y, u, u^{(\alpha)}, \dots, D^{(r_2\alpha)} u) \quad (8)$$

Para ilustrar las definiciones 2 y 3, mostramos los siguientes ejemplos.

*Ejemplo 1.* El sistema no lineal fraccional descrito por:

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= x_1 x_2 + u + f \\ x_2^{(\alpha)} &= x_1 & 0 < \alpha \leq 1 \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

es fraccionalmente diagnosticable y observable ya que  $x_1$  y  $f$  satisfacen las ecuaciones polinomiales fraccionales dadas por

$$x_1 = y^{(\alpha)} \quad (10)$$

$$f = y^{(2\alpha)} - y^{(\alpha)} y - u \quad (11)$$

por lo tanto,  $x_1$  y  $f$  cumplen con las condiciones de OAF y DAF respectivamente, lo que permite la estimación del estado no disponible  $x_1$  y la entrada desconocida  $f$ .

*Observación 1.* Un sistema fraccionalmente diagnosticable no necesariamente cumple con la propiedad de OAF, y viceversa. De hecho, el siguiente ejemplo ilustra este hecho, cuando un sistema es fraccionalmente diagnosticable, pero no un sistema fraccionalmente observable (en el sentido de la definición 2).

*Ejemplo 2.* Para ilustrar el caso mencionado anteriormente, se considera el siguiente sistema no lineal fraccional,

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= x_2 \\ x_2^{(\alpha)} &= -x_2 + f \\ x_3^{(\alpha)} &= x_1 x_3 - x_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (12)$$

no es difícil ver que (12) es un sistema fraccionalmente diagnosticable de acuerdo a la definición 3, dando la posibilidad de estimar  $f$  a partir de  $y^{(\alpha)}$  e  $y$

$$f = y^{(\alpha)} + y$$

sin embargo,  $x_1$  y  $x_3$  no satisfacen la propiedad de OAF, impidiendo la estimación de estados.

Estos ejemplos ilustran la importancia y la información que se obtiene a partir de las definiciones 2 y 3.

#### 4. OBSERVADOR FRACCIONAL

Se considera el sistema (6), donde el vector de fallas  $f$  es desconocido y se puede interpretar como una dinámica de estados fraccional desconocida. Con el fin de estimar  $f$ , el vector de estado se extiende (inmersión, [R. Martínez-Guerra (2014)]), de tal manera que el nuevo sistema extendido está dado por

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= F(x, \bar{u}) \\ f^{(\alpha)} &= \Omega(x, \bar{u}) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (13)$$

donde  $\Omega(\bullet)$  es una función incierta y acotada. Entonces, el problema se aborda mediante el uso de un observador fraccional diseñado con el fin de reconstruir el vector de fallas  $f$ .

Considerando las siguientes hipótesis

- H1 :  $\Omega_i(x, \bar{u})$  es acotada, es decir.  $\|\Omega_i(x, \bar{u})\| \leq M_i$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < i \leq \mu$
- H2 :  $f_i(t)$  satisface la definición DAF.
- H3 :  $K_{\hat{f}_i} \in \mathbb{R}^+$

el siguiente lema muestra la existencia de un observador fraccional.

*Lema 1.* Sí las hipótesis **H1**, **H2** y **H3** se satisfacen completamente, la ecuación dada por

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = K_{\hat{f}_i}(f_i - \hat{f}_i) \quad 0 < i \leq \mu, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (14)$$

representa un observador fraccional para el sistema (13), donde  $\hat{f}_i$  denota la falla estimada y  $K_{\hat{f}_i}$  determina la tasa de convergencia deseada.

*Demostración 1.* La dinámica fraccional del error  $e_{f_i} = f_i - \hat{f}_i$  se describe como:

$$e_{f_i}^{(\alpha)} + K_{\hat{f}_i} e_{f_i} = \Omega_i(x, \bar{u}) \quad (15)$$

Existe una solución única para el sistema (15), dado que  $\Omega_i(x(t), \bar{u}(t)) - K_{\hat{f}_i} e(t)$  es una función continua y Lipschitz sobre  $e$ . Resolviendo (15) [A. A. Kilbas (2006)], se tiene como resultado la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} e_{f_i}(t) &= e_{f_{i0}} E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha) + \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K_{\hat{f}_i}(t-\tau)^\alpha) \Omega_i(\bullet) d\tau \end{aligned}$$

donde  $e_{f_i}(0) = e_{f_{i0}}$

Usando, las desigualdades del triángulo y Cauchy-Schwarz, y la hipótesis **H1**, resulta

$$\begin{aligned} |e_{f_i}(t)| &\leq |e_{f_{i0}} E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha)| + \\ &+ M_i \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K_{\hat{f}_i}(t-\tau)^\alpha)| d\tau \end{aligned}$$

Las funciones  $E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha)$  and  $(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K_{\hat{f}_i}(t-\tau)^\alpha)$  no son negativas debido a la **propiedad 2** de la función Mittag-Leffler y la hipótesis **H3**

$$\begin{aligned} |e_{f_i}(t)| &\leq |e_{f_{i0}}| E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha) + \\ &+ M_i \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K_{\hat{f}_i}(t-\tau)^\alpha) d\tau \end{aligned}$$

aplicando la **propiedad 1** de la función Mittag-Leffler, tenemos

$$|e_{f_i}(t)| \leq |e_{f_{i0}}| E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha) + M_i t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha)$$

sí  $t \rightarrow \infty$ , se usa la expresión (5) con  $\delta = \frac{3\pi\alpha}{4}$  (Teorema 1) y debido a la hipótesis **H3**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{f_i}| &\leq |e_{f_{i0}}| \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\alpha,1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha) + \\ &+ M_i \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-K_{\hat{f}_i} t^\alpha) \\ &= \frac{M_i}{K_{\hat{f}_i}} \end{aligned}$$

■

*Observación 2.* En ocasiones, derivadas fraccionales desconocidas de la salida aparecen en las ecuaciones algebraicas fraccionales de las fallas, debido a esto, es necesario el uso de variables auxiliares para evitar estimaciones de estas derivadas.

*Corolario 1.* Sí una señal de falla  $f_i$  con  $1 \leq i \leq \mu$  satisface la definición DAF, y la falla se puede escribir como

$$f_i = \sigma_i y_i^{(\alpha)} + \psi_i(y, u) \quad (16)$$

con  $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ip}) \in \mathbb{R}^p$  un vector constante,  $y$  y  $\psi_i(y, u)$  funciones acotadas, entonces, el observador fraccional (14) puede ser descrito por las siguiente ecuaciones

$$\gamma_{f_i}^{(\alpha)} = -K_{\hat{f}_i}(\gamma_{f_i} - \psi_i(y, u)) - K_{\hat{f}_i}^2 \sigma_i y_i \quad (17)$$

$$\hat{f}_i = \gamma_{f_i} + K_{\hat{f}_i} \sigma_i y_i \quad (18)$$

donde  $\gamma_{f_i}(0) = \gamma_{f_{i0}}$  y  $0 < \alpha \leq 1$ .

*Demostración 2.* Considerando las expresiones (16), (17) and (18), el observador fraccional (14) puede ser descrito como

$$\hat{f}_i^{(\alpha)} = K_{\hat{f}_i}(\sigma_i y_i^{(\alpha)} + \psi_i(y, u) - \hat{f}_i) \quad (19)$$

ahora, se define  $\gamma_{f_i}$  de la siguiente manera

$$\gamma_{f_i} \triangleq \hat{f}_i - K_{\hat{f}_i} \sigma_i y_i \quad (20)$$

y tomando la derivada fraccional de (20)

$$\gamma_{f_i}^{(\alpha)} = \hat{f}_i^{(\alpha)} - K_{\hat{f}_i} \sigma_i y_i^{(\alpha)} \quad (21)$$

finalmente, se sustituye (19) en (21) resultando lo siguiente

$$\begin{aligned} \gamma_{f_i}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_i}(\gamma_{f_i} - \psi_i(y, u)) - K_{\hat{f}_i}^2 \sigma_i y_i \\ \gamma_{f_i}(0) &= \gamma_{f_{i0}} \end{aligned} \quad (22)$$

De este modo, se obtiene la ecuación (22) que concluye la demostración. ■

El desempeño del observador fraccional propuesto anteriormente se ilustra por medio de dos simulaciones numéricas, además, se ilustra la aplicación del corolario 1.

## 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Con el fin de verificar la eficacia del método propuesto, se llevaron a cabo dos simulaciones numéricas<sup>3</sup>. Primeramente, consideremos el siguiente sistema no lineal fraccional:

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha)} &= -x_1 + f_1 x_2^3 + f_2 x_2 x_3 + u \\ x_2^{(\alpha)} &= x_3 + f_1 \\ x_3^{(\alpha)} &= -x_2^3 + f_2 \\ y_1 &= x_2 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  es el vector de estados,  $f = (f_1, f_2)^T$  el vector de fallas y  $y = (y_1, y_2)^T$  el vector de salidas.

Las fallas se pueden representar a través de las ecuaciones dada por,

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_{f_1}(y, y^{(\alpha)}) = y_1^{(\alpha)} - y_2 \\ f_2 &= \phi_{f_2}(y, y^{(\alpha)}) = y_2^{(\alpha)} + y_1^3 \end{aligned} \quad (24)$$

es decir, las entradas desconocidas satisfacen la condición DAF. Ahora, de las ecuaciones (14) y (24), se obtienen las siguientes dinámicas fraccionales de las fallas.

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_1}(y_1^{(\alpha)} - y_2 - \hat{f}_1) \\ \hat{f}_2^{(\alpha)} &= K_{\hat{f}_2}(y_2^{(\alpha)} + y_1^3 - \hat{f}_2) \end{aligned}$$

se puede observar que  $y_1^{(\alpha)}$  e  $y_2^{(\alpha)}$  no están disponibles, sin embargo, utilizando el Corolario 1 es posible definir variables auxiliares para evitar este problema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \gamma_{f_1} &= \hat{f}_1 - K_{\hat{f}_1} y_1 \\ \gamma_{f_2} &= \hat{f}_2 - K_{\hat{f}_2} y_2 \end{aligned}$$

finalmente, tomando la derivada fraccional de las variables auxiliares propuestas, el observador fraccional para (23) está dado por

$$\begin{aligned} \gamma_{f_1}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_1}(\gamma_{f_1} + y_2) - K_{\hat{f}_1}^2 y_1, & \gamma_{f_1}(0) &= \gamma_{f_{10}} \\ \gamma_{f_2}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}_2}(\gamma_{f_2} - y_1^3) - K_{\hat{f}_2}^2 y_2, & \gamma_{f_2}(0) &= \gamma_{f_{20}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \gamma_{f_1} + K_{\hat{f}_1} y_1 \\ \hat{f}_2 &= \gamma_{f_2} + K_{\hat{f}_2} y_2 \end{aligned}$$

Los resultados de simulación se obtienen con las condiciones iniciales  $\gamma_{f_{10}} = \gamma_{f_{20}} = 0$ , para el observador, se selecciona la ganancia  $K_{\hat{f}_1}$ , el parámetro  $\alpha$  y la entrada  $u(t)$  como:  $K_{\hat{f}_1} = K_{\hat{f}_2} = 40$ ,  $\alpha = 0,935$  y  $u(t) = 5\mathcal{U}(t)$ , donde  $\mathcal{U}(t)$  es la función escalón unitaria, finalmente, se toma el tiempo de muestreo para la simulación como 0,0001. Las dinámicas reales de las fallas para esta simulación están dadas por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + 5\sin(x_1)e^{-10t} \\ f_2 &= 5e^{-5(t-0,3)}\mathcal{U}(t-0,3) + e^{-5(t-1)}\mathcal{U}(t-1) \end{aligned}$$

Los resultados de estimación se muestran en las figuras 1 a 4. Notemos que en las figuras 1 y 2 las fallas estimadas siguen a las reales. Como puede verse, dos tipos de fallas se utilizan con el fin de mostrar la versatilidad del observador.

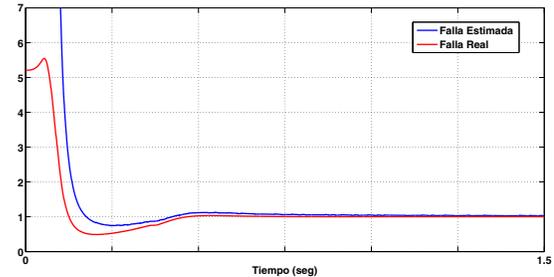


Figura 1. Reconstrucción de la falla  $f_1$  sin ruido de medición a la salida a través del observador fraccional.

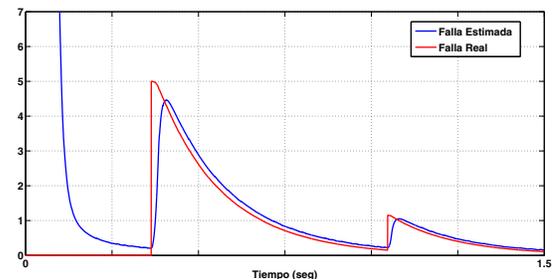


Figura 2. Reconstrucción de la falla  $f_2$  sin ruido de medición a la salida a través del observador fraccional.

Las figuras 3 y 4 muestran la estimación de las fallas incluso en presencia de ruido de medición a la salida. Las mediciones de salida están contaminadas con ruido Gaussiano, con media cero, varianza 0.01 y está acotado dentro del intervalo  $[-0,001, 0,001]$ .

<sup>3</sup> Todas las simulaciones se realizaron con *Matlab*<sup>®</sup> *Ninteger toolbox* [V. Duarte (2005)]

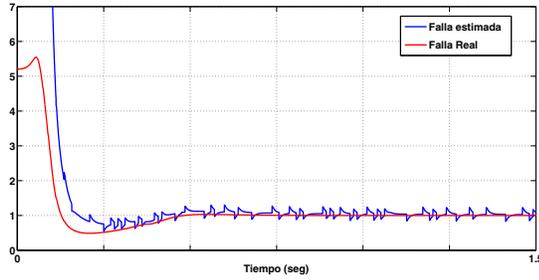


Figura 3. Reconstrucción de la falla  $f_1$  en presencia de ruido de medición a la salida a través del observador fraccional.

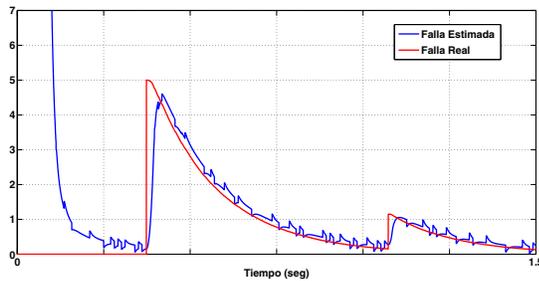


Figura 4. Reconstrucción de la falla  $f_2$  en presencia de ruido de medición a la salida a través del observador fraccional.

*Observación 3.* Para aplicaciones en tiempo real, se recomienda el uso de un filtro para reducir el ruido de medición a la salida.

En secciones anteriores se ilustra que el sistema (9) cumple con las definiciones de OAF y DAF, debido a esto, es posible diseñar el observadores fraccional para estimar el estado no disponible  $x_1$  y la falla  $f$ . Las ecuaciones (10) y (11) se utilizan para el diseño de los observadores fraccionales, para  $x_1$  se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_{x_1}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{x}_1} \gamma_{x_1} - K_{\hat{x}_1}^2 y & \gamma_{x_1}(0) &= \gamma_{x_{10}} \\ \hat{x}_1 &= \gamma_{x_1} + K_{\hat{x}_1} y \end{aligned}$$

y para  $f$ , el observador está dado por

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta}^{(\alpha)} &= -K_{\hat{\eta}} \gamma_{\eta} - K_{\hat{\eta}}^2 y & \gamma_{\eta}(0) &= \gamma_{\eta_0} \\ \gamma_f^{(\alpha)} &= -K_{\hat{f}} ((\gamma_{\eta} + K_{\hat{\eta}} y)(y + K_{\hat{f}}) + u + \gamma_f) & \gamma_f(0) &= \gamma_{f_0} \\ \hat{f} &= \gamma_f + K_{\hat{f}} (\gamma_{\eta} + K_{\hat{\eta}} y) \end{aligned}$$

Para este caso en particular fue necesario definir una nueva variable  $\eta = y^{(\alpha)}$  con el fin de evitar la estimación de  $y^{(2\alpha)}$ . Las ganancias  $K_{\hat{\eta}}$ ,  $K_{\hat{f}}$  y el parámetro  $\alpha$  se eligen como:  $K_{\hat{\eta}} = 25$ ,  $K_{\hat{f}} = 30$  y  $\alpha = 0,935$ , los resultados de la simulación con condiciones iniciales  $\gamma_{\eta_0} = \gamma_{f_0} = 0$  y un tiempo de muestreo de 0,0001 se presentan en las figuras 5 y 6, en ellas se muestra una estimación del estado  $x_1$  y el diagnóstico de la falla  $f$ . Para esta simulación la dinámica real de la falla está dada por

$$f = 0,1 \sin(4t)$$

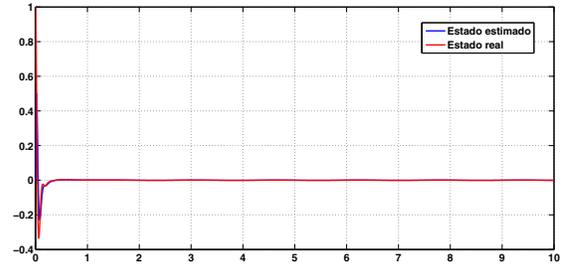


Figura 5. Reconstrucción del estado  $x_1$  a través del observador fraccional.

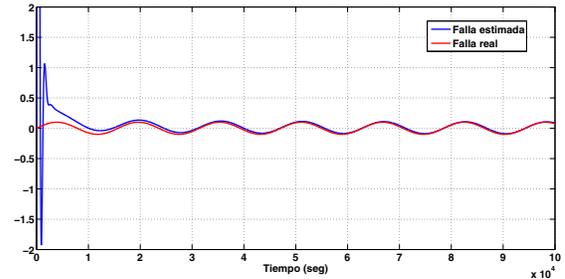


Figura 6. Reconstrucción de la falla  $f$  a través del observador fraccional.

## 6. CONCLUSIONES

Una novedosa metodología fue presentada con el fin de ofrecer una solución para el problema de diagnóstico de fallas en sistemas no lineales fraccionales. La estrategia fue desarrollada con éxito utilizando una técnica algebraica diferencial que involucra las definiciones de OAF y DAF, estos resultados desempeñaron un papel clave para el diseño del nuevo observador fraccional, el cual fue capaz de estimar múltiples fallas y estados no disponibles. Las simulaciones se realizaron con el propósito de ilustrar la versatilidad y eficacia de la metodología propuesta basada en observadores fraccionales.

## REFERENCIAS

- K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.
- D. Valerio, Ninteger v. 2.3 Fractional control toolbox for Matlab, User and Programmer Manual, 2005.
- A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V, 2006.
- I. S. Jesus, J. A. T. Machado, and J. B. Cunha, Fractional electrical impedances in botanical elements, Journal of Vibration and Control, vol. 14, pp. 1389-1402, 2008.
- I. Petras, Fractional-order nonlinear systems: Modeling, analysis and simulation., Springer Verlag, 2011.
- I. N'Doye, H. Voos, M. Darouach, J. G. Schneider and N. Knauf, An unknown input fractional-order observer design for fractional-order glucose-insulin system, Bio-medical Engineering and Sciences, 2012 IEEE EMBS Conference on, Langkawi, pp. 595-600, 2012.

- A. Aribi, C. Farges, M. Aoun, P. Melchior, S. Najjar and M. Naceur Abdelkrim, Fault detection based on fractional order models: Application to diagnosis of thermal systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, issue 10, pp. 3679-3693, 2014.
- R. Martínez-Guerra and J. L. Mata-Machuca, Fault detection and diagnosis in nonlinear systems a differential and algebraic viewpoint, Springer, 2014
- B. Tamhane, A. Mujumdar and S. Kurode, "Fractional order disturbance observer based robust control," *Industrial Instrumentation and Control (ICIC)*, 2015 International Conference on, Pune, pp. 1412-1417, 2015.
- R. Kopka, Model-Based Fault Diagnosis with Fractional Models, *Advances in Modelling and Control of Non-integer-Order Systems*. Springer International Publishing, pp. 257-263, 2015.
- S. Rahme and N. Meski, Adaptive Sliding mode observer for sensor fault diagnosis of an industrial gas turbine, *Control Engineering Practice*, vol. 38, pp. 57-74, 2015.
- D. Rotondo, R. M. Fernandez-Canti, S. Tornil-Sin, J. Blesa and V. Puig, Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a Takagi-Sugeno interval observer approach, *International Journal of Hydrogen Energy*, vol. 41, issue 4, pp. 2875-2886, 2016.
- L. Zhang, X. Hu, Z. Wang, F. Sun and D. G. Dorrell, Fractional-order modeling and State-of-Charge estimation for ultracapacitors, *Journal of Power Sources*, vol. 314, pp. 28-34, 2016.