

# Control de Postura para un Vehículo Espacial vía Inmersión e Invariancia

Fernando Hernández-Castañeda, Francisco Jurado,  
Víctor Santibáñez

*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna,  
Blvd. Revolución y Calzada Instituto Tecnológico de La Laguna S/N,  
C.P. 27000, Torreón, Coahuila de Zaragoza, México.  
(e-mail:[jfcastaneda][fjurado][vsantiba]@itl.laguna.edu.mx)*

---

**Resumen:** El control de seguimiento de postura (orientación) de un vehículo espacial con ruedas de reacción es abordado utilizando la metodología de Inmersión e Invariancia (I&I). Se describe el modelo cinemático y dinámico del vehículo espacial utilizando la representación de los ángulos de Euler para la postura de un cuerpo en el espacio. El sistema dinámico objetivo requerido por la metodología I&I es seleccionado como un sistema lineal y desacoplado dependiente únicamente de los errores de postura del vehículo espacial. La ley de control obtenida contiene un tipo de término PD y una compensación de la inercia del vehículo espacial, incluidas las ruedas de reacción. La prueba de estabilidad es simple y no requiere de una función de Lyapunov. El desempeño del controlador propuesto es validado mediante simulación.

*Palabras Clave:* Control no lineal, inmersión, invariancia, seguimiento, vehículo espacial.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Antes de abordar el tema principal de este artículo se dará una breve introducción de lo que es el control de postura de un vehículo espacial y lo que esto involucra con el fin de brindar una base para aquellos que no están familiarizados en el campo. Una nave espacial, vehículo espacial o astronave es un vehículo diseñado para operar más allá de la atmósfera terrestre, es decir, en el espacio exterior. Estos vehículos se utilizan para una gran variedad de propósitos entre los que se incluyen las comunicaciones, experimentación en el espacio exterior, exploración espacial, observaciones terrestres, meteorología, navegación, entre otros; suelen maniobrar a través de actuadores como motores a reacción, también conocidos como motores de propulsión a chorro de gas (*Gas-Jet*, **GJ**), ruedas de reacción (*Reaction Wheels*, **RWs**), pares magnéticos (*Magnetic Torques*, **MTs**) o giroscopios de control de momento (*Control Moment Gyros*, **CMGs**). Por otro lado, el movimiento de un vehículo espacial puede ser dividido en dos tipos: movimiento traslacional y movimiento rotacional. El movimiento traslacional describe el movimiento de un vehículo espacial en una órbita mientras que el movimiento rotacional describe la orientación (postura) del vehículo en el espacio con respecto a una referencia como el sol o una estrella en particular. Estos dos movimientos pueden desacoplarse entre sí, según el tipo de actuador empleado para la descripción del movimiento y la configuración del vehículo espacial. En este artículo se abordará únicamente el control de seguimiento de postura de un vehículo espacial que utiliza ruedas de reacción como actuadores. El control de postura es el proceso de orientar un cuerpo rígido en una dirección específica predeterminada y tiene importantes

aplicaciones; desde direccionar y orientar una aeronave, un helicóptero, un satélite o nave espacial hasta el control de orientación de un objeto sostenido por uno o varios brazos robóticos.

Los primeros estudios sobre el control de postura de un vehículo espacial fueron reportados por Meyer (1966a,b, 1968). Posteriormente, un análisis global sobre el problema de control de postura de un vehículo espacial fue reportado también por Meyer (1971), el cual se enfocaba en las representaciones apropiadas para la postura y adoptó un enfoque de Lyapunov, usó apropiadas funciones de Lyapunov basadas en energía para el análisis de sistemas de control cuyo comportamiento surge del análisis de sistemas Lagrangianos. Luego, varios trabajos fueron reportados sobre este tema como el de Crouch (1984), donde la teoría de control geométrico no lineal fue usada para el problema del control de postura de un vehículo espacial con ruedas de reacción, en cuyo documento se establecieron condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad del sistema para el caso en el que los actuadores tengan uno, dos o hasta tres pares independientes; estos tipos de problemas también han sido estudiados en Aeyels (1985) y Byrnes et al. (1988). Más tarde, el trabajo reportado por Wen and Kreutz-Delgado (1991) representaría un marco general para el análisis del problema de control de seguimiento de postura de un cuerpo rígido al definir como representación de postura global y no singular al cuaternión unitario y cuyo trabajo es visto como una extensión natural al trabajo reportado por Meyer (1971). Por otra parte, recientemente una metodología para el diseño de controladores no lineales y controladores adaptables para sistemas no lineales basada en las nociones de inmersión del sistema a controlar (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Isidori, 1995; Byrnes et al., 1997) e

invariancia de una variedad diseñada con características particulares (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Wiggins, 1990; Isidori, 1995), las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal (Wonham, 1985; Jouan, 2003), ha sido reportada en la literatura como Inmersión e Invariancia (*Immersion and Invariance, I&I*) (Astolfi et al., 2002; Astolfi and Ortega, 2003; Astolfi et al., 2008). Las nociones sobre inmersión e invariancia fueron empleadas en una versión adaptable en la solución al problema de seguimiento de postura para un modelo de cuerpo rígido de tres grados de libertad, completamente actuado, el cual considera la presencia de fuerzas externas desconocidas y en donde el diseño del controlador parte del modelo de cuerpo rígido descrito en la forma perturbada Hamiltoniana y de la propuesta de una función de energía en términos de los errores de seguimiento tanto para los ángulos de Euler como para el vector de velocidad angular (Astolfi et al., 2008). Luego, el control adaptable en cuestión fue considerado como parte de un sistema de control de vuelo para un vehículo aéreo autónomo; éste último sistema compuesto además por un controlador de seguimiento de trayectoria diseñado bajo la metodología I&I (Astolfi et al., 2008). Basándose también en la metodología I&I, Hu and Zhang (2015) diseñaron dos observadores para un sistema de control de postura de un cuerpo rígido, el primero destinado a la estimación de la velocidad angular y el segundo para la estimación de una constante de perturbación. La ley de control consistió en un simple control PD más una compensación de la perturbación, donde los estimados de la velocidad angular y la perturbación fueron usados directamente en la realimentación. En el presente artículo, continuando con el trabajo previo en lo referente al estudio de la metodología I&I (Castañeda et al., 2015), se aborda ahora el problema del control de seguimiento de postura para un vehículo espacial donde la metodología en cuestión es utilizada en la obtención de una ley de control para el sistema completo y que por la naturaleza propia en la que se desenvuelve el sistema no se consideran momentos aerodinámicos externos.

La organización del presente artículo es descrita a continuación. En la sección 2 se exhiben las ecuaciones que describen la cinemática y dinámica de un vehículo espacial y se formula el problema de control. En la sección 3 se muestran los resultados preliminares sobre la metodología I&I y se establece el teorema usado como herramienta principal del enfoque por I&I. En la sección 4 se aborda el problema del control de seguimiento de postura de un vehículo espacial, gobernado mediante ruedas de reacción, utilizando el enfoque I&I. Los resultados en simulación referentes al desempeño del controlador propuesto son mostrados en la sección 5. Finalmente, las conclusiones se establecen en la sección 6.

## 2. MODELO DEL VEHÍCULO ESPACIAL

Un vehículo espacial es tratado como un cuerpo rígido en el espacio cuya postura puede describirse por un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones de cinemática y dinámica o simplemente cinemática y dinámica del cuerpo. La cinemática relaciona la derivada temporal de las coordenadas de la posición angular (postura u orientación) con el vector de velocidad angular mientras

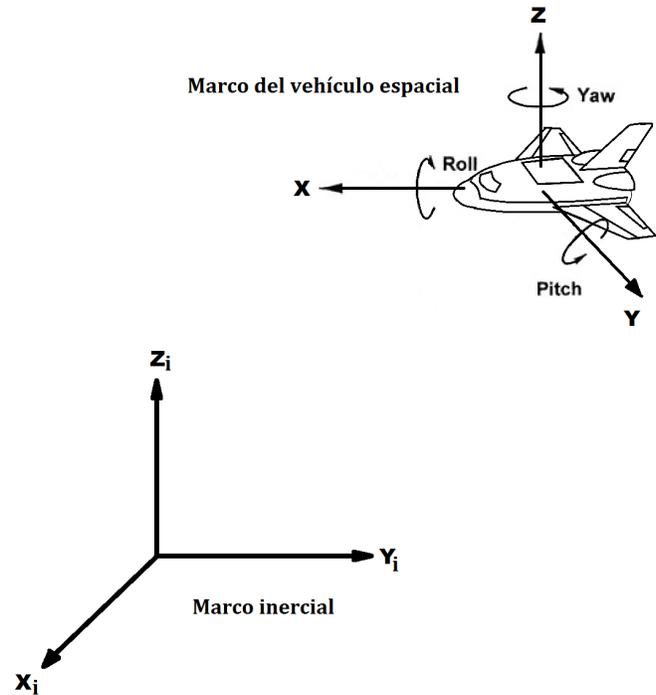


Figura 1. Vehículo espacial y los marcos de referencia.

que la dinámica describe la evolución temporal del vector de velocidad angular. Como se comentó anteriormente, un vehículo espacial puede ser maniobrado por diferentes tipos de actuadores, por lo que en este artículo se considera que el vehículo espacial es gobernado a través de tres ruedas de reacción colocadas a lo largo de un conjunto de tres ejes ortonormales. Luego, basados en estos ejes, se define un marco de referencia ortonormal arbitrario unido al vehículo espacial que llamaremos *marco del vehículo espacial*, cuyo origen no necesariamente es el centro de masa del sistema o sus ejes no necesariamente son los ejes principales del vehículo espacial. Para efectos de simplicidad aquí se supondrá que estos coinciden. Además, se define un *marco de referencia inercial* con respecto a las estrellas o alguna otra referencia que pueda ser considerada inercial durante la duración de la maniobra de cambio de postura como para un transbordador espacial. Ver figura 1.

### 2.1 Cinemática de cuerpo rígido

Las ecuaciones para la cinemática, las cuales relacionan la derivada temporal de las coordenadas para la posición angular con el vector de velocidad angular, pueden ser descritas de varias maneras y esto depende de las coordenadas que describen la posición angular (postura) del vehículo espacial. La representación de la postura de un vehículo espacial (cuerpo rígido) puede realizarse utilizando de tres a cuatro parámetros. Las técnicas de representación de postura que utilizan tres parámetros son los ángulos de Euler, el vector de Gibbs (*Cayley-Rodrigues parameters*) y los parámetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues parameters*), las cuales pueden exhibir orientaciones singulares debido a que la matriz Jacobiana en la ecuación cinemática puede resultar singular para algunas orientaciones. La representación

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

de postura utilizando cuatro parámetros está dada por el cuaternión unitario, el cual representa de forma global la postura de un cuerpo rígido sin caer en singularidades, sin embargo una ecuación de restricción es introducida con los cuatro parámetros. Por simplicidad, en el presente trabajo se utilizan los ángulos de Euler para la representación de la postura considerando que estos tienen un mayor significado físico en contraste con otras representaciones. Un estudio de estas representaciones para la postura es llevado a cabo en Shuster (1993).

La postura de un cuerpo rígido o sistema de partículas puede ser descrita mediante la representación clásica de los ángulos de Euler, la cual consiste de las rotaciones angulares consecutivas en dirección de giro con las agujas del reloj de los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  (*cabeceo*, *alabeo* y *guiñada*) que alinean el marco inercial con el marco del vehículo espacial. En este caso la ecuación para la cinemática es descrita como

$$\dot{\gamma} = M(\gamma)\omega$$

donde  $\gamma = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  es el vector de los ángulos de Euler,  $\omega \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidad angular del vehículo espacial y

$$M(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix}.$$

Esta descripción es válida en la región  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Usando esta representación, el momento angular  $p$  del vehículo espacial puede ser obtenido como

$$p = R(\gamma)p_r$$

donde  $p_r$  es el momento angular constante del vehículo espacial y  $R(\gamma)$  representa la matriz de transformación de coordenadas del marco inercial a las coordenadas del vehículo espacial. Ver ecuación (1).

## 2.2 Dinámica de cuerpo rígido

El modelo dinámico que describe la evolución en el tiempo de la velocidad angular de un vehículo espacial puede ser descrito como (Crouch, 1984; Slotine and Benedetto, 1990)

$$H\dot{\omega} = p \times \omega + \tau$$

donde  $p \in \mathbb{R}^3$  es el momento angular total del vehículo espacial y  $\tau \in \mathbb{R}^3$  es el vector de pares aplicado al vehículo espacial a través de las ruedas de reacción, todos expresados en coordenadas del vehículo espacial.  $H$  es la matriz de inercia de la nave, definida positiva, dada como

$$H = H^0 - H^A$$

donde  $H^0$  es la matriz central de inercias total (nave espacial más ruedas de reacción) y  $H^A$  es la matriz diagonal de las inercias de las ruedas de reacción. El operador  $\times$  denota la operación de producto vectorial y la notación  $[p \times]$  se refiere a la matriz antisimétrica definida por el producto vectorial con  $p$

$$[p \times] = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En resumen, el conjunto de ecuaciones que describe la postura de un vehículo espacial puede escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned} H\dot{\omega} &= p \times \omega + \tau \\ \dot{x} &= J(x)\omega \end{aligned} \quad (2)$$

donde dependiendo de la representación utilizada para las ecuaciones de la cinemática, las componentes del vector  $x$  serán los parámetros del vector de Gibbs (*Cayley-Rodrigues parameters*), los parámetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues parameters*), la representación mediante el cuaternión unitario o los ángulos de Euler. En el presente trabajo,  $x = \gamma = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  y  $J(x) = M(\gamma)$ .

## 2.3 Formulación del problema de control

De la definición del modelo dinámico y seleccionando cualquier tipo de representación de coordenadas para las ecuaciones de la cinemática, el problema de control de seguimiento de postura puede formularse como sigue: Considere el sistema descrito por (2), diferenciando la expresión  $\dot{x}$  y después de algunas simplificaciones la ecuación de movimiento de la nave en relación a las coordenadas de postura seleccionadas puede ser escrita como

$$D(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} = F \quad (3)$$

con

$$\tau = J^T F,$$

$$D(x) = J^{-T} H J^{-1},$$

$$C(x, \dot{x}) = -J^{-T} H J^{-1} \dot{J} J^{-1} - J^{-T} [p \times] J^{-1}.$$

Luego, el problema de control de seguimiento de postura consiste en encontrar una ley de control  $F$  tal que dependiendo de las coordenadas seleccionadas para la cinemática, la trayectoria de postura describa una trayectoria de postura deseada, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_d(t) - x(t)] = 0$$

con  $x_d(t)$  una función suave de referencia.

## 3. INMERSIÓN E INVARIANCIA (I&I)

Con el objetivo de ser utilizadas en la sección siguiente, a continuación se exponen las condiciones fundamentales para la construcción de leyes de control por realimentación de estados, globalmente asintóticamente estabilizadoras para sistemas no lineales, las cuales son parte del resultado principal de la estabilización por I&I (Astolfi and Ortega, 2003).

El principio de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal vía I&I se resume a través del siguiente teorema (Astolfi et al., 2008).

*Teorema 1.* Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y un punto de equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}^n$  a ser estabilizado. Suponga que existen mapeos suaves

$\alpha : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $\pi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ ,  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $v : \mathbb{R}^{n \times (n-s)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $s < n$ , tales que sostengan lo siguiente:

**(C1) Sistema dinámico objetivo.** El sistema objetivo es definido por

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (5)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^s$  tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en  $\xi^* \in \mathbb{R}^s$  y

$$x^* = \pi(\xi^*).$$

**(C2) Condición de inmersión.** Para todo  $\xi$ ,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (6)$$

**(C3) Variedad implícita.** El conjunto identidad

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^s\} \quad (7)$$

se mantiene.

**(C4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.** Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} [f(x) + g(x)v(x, z)], \quad (8)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, z), \quad (9)$$

están acotadas y (8) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en  $z = 0 \in \mathbb{R}^{n-s}$ , donde  $z$  representa el estado de la dinámica fuera de la variedad. Luego  $x^*$  es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \phi(x)). \quad (10)$$

◇

#### 4. CONTROL DE POSTURA PARA UNA NAVE ESPACIAL VÍA I&I

En esta sección, el problema de control de un vehículo espacial gobernado a través de ruedas de reacción es abordado bajo el enfoque de la metodología I&I. Para este fin, se define una representación en espacio de estados del sistema como en (4) dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D(x)^{-1}[F - C(x, \dot{x})\dot{x}] \end{bmatrix}. \quad (11)$$

De la definición  $x_e = x_d - x$  para el error de postura, el sistema (11) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ D(x_d - x_e)^{-1}[F - C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde  $\dot{x}_d$  es la velocidad de la trayectoria deseada para la postura. Así, el enfoque I&I es aplicado al sistema (12) considerando el teorema 1. Hacia este fin, el sistema objetivo (5) es definido como sigue.

**(C1) Sistema objetivo.** El sistema dinámico objetivo es seleccionada como

$$\dot{\xi} = -K\xi, \quad (13)$$

donde  $K$  es una matriz diagonal definida positiva,  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , la dimensión de este vector es debida a que se utilizarán los tres parámetros de Euler para la representación de la cinemática y el sistema tiene un equilibrio globalmente

asintóticamente estable en  $\xi^* = 0$ . El mapeo  $\pi(\xi)$  es definido como

$$\begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \pi(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix}$$

donde el mapeo  $\pi_1(\xi)$  es seleccionado debido a que se desea que la trayectoria del error de postura se comporte como el sistema objetivo (13).

**(C2) Condición de inmersión.** El mapeo restante  $\pi_2(\xi)$  es obtenido de la condición de inmersión (6) como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \pi_2(\xi) \\ D(x_d - \xi)^{-1}[F - C(x_d - \xi, \pi_2(\xi))\pi_2(\xi)] \end{bmatrix}$$

donde usando  $\xi = \dot{x}_d - \pi_2(\xi)$  y la definición (13) el mapeo  $\pi_2(\xi)$  resulta como

$$\pi_2(\xi) = \dot{x}_d + K\xi.$$

**(C3) Variedad implícita.** La variedad es definida de acuerdo con (7) como

$$\mathcal{M} = \{x_e, \dot{x} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(x_e, \dot{x}) = \dot{x} - \dot{x}_d - Kx_e = 0\} = \{x_e, \dot{x} \in \mathbb{R}^3 | x_e = \xi, \dot{x} = \dot{x}_d + K\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3\}$$

**(C4) Atractividad de la variedad y acotamiento de soluciones.** La coordenada fuera de la variedad es definida como

$$z \triangleq \varphi(x_e, \dot{x}).$$

Usando (8), la dinámica fuera de la variedad resulta

$$\dot{z} = D(x_d - x_e)^{-1}[F - C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x}] - \ddot{x}_d - K[\dot{x}_d - \dot{x}] \quad (14)$$

donde seleccionando  $F$  como

$$F = D(x_d - x_e)[- \Gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - K\dot{x}] + C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x} \quad (15)$$

con  $\Gamma$  una matriz diagonal definida positiva conduce a

$$\dot{z} = -\Gamma z, \quad (16)$$

cuyo sistema posee un equilibrio global y asintóticamente estable en el origen  $z = 0 \in \mathbb{R}^3$ . Finalmente, sólo resta demostrar que las trayectorias del sistema (9) están acotadas; para esto, sustituyendo (15) en (12) conduce al sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ -\Gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - K\dot{x} \end{bmatrix}.$$

Luego, usando (16) y la definición  $x_r = \dot{x}_d - \dot{x}$ , el sistema se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ x_e \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma z \\ x_r \\ \Gamma z - Kx_r \end{bmatrix}.$$

Ahora, de la primera ecuación,  $\dot{z} = -\Gamma z$ , es fácil observar que  $z \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ , lo que implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ . De la tercer ecuación y considerando la conclusión anterior se tiene además  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_r = -Kx_r$ , el cual es un sistema globalmente asintóticamente estable en el origen, lo que implica que  $x_r \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ . Así, de esta conclusión y de la segunda ecuación,  $\dot{x}_e = x_r$ , se puede concluir además que  $\dot{x}_e \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ , lo que implica que  $x_e \in \mathcal{L}_\infty$  con lo que se cumple la última condición del teorema 1.

#### 5. SIMULACIÓN

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador (15), obtenido por medio de la aplicación de la técnica de I&I, en el control de seguimiento de postura de un vehículo

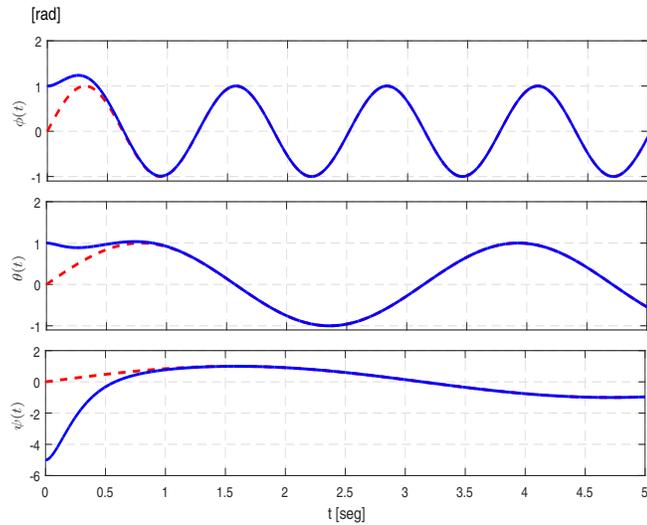


Figura 2. Postura del vehículo espacial (— postura real, - - - postura deseada).

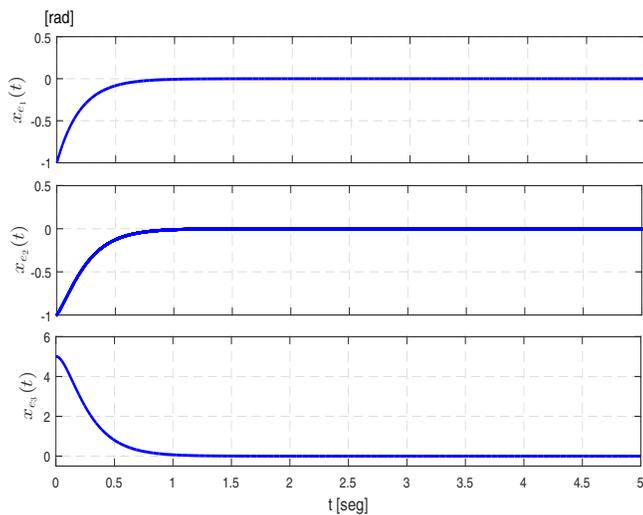


Figura 3. Error de postura.

espacial simulaciones numéricas fueron realizadas utilizando los siguientes parámetros

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad p_r = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el modelo dinámico. Las trayectorias deseadas fueron establecidas como  $\phi(t) = \sin(5t)$ ,  $\theta(t) = \sin(2t)$  y  $\psi(t) = \sin(t)$ . La velocidad de muestreo para la simulación fue establecida en 1000 Hz y los estados iniciales del sistema establecidos como  $x(0) = [1 \ 1 \ -5]^T$  y  $\dot{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Los parámetros para el controlador están dados por

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

La figura 2 muestra la evolución en el tiempo de los ángulos de Euler. De la figura en cuestión se puede observar que las trayectorias de los ángulos de Euler siguen las trayectorias deseadas después de aproximadamente 1,5 segundos, dato que es corroborado en la figura 3 donde se

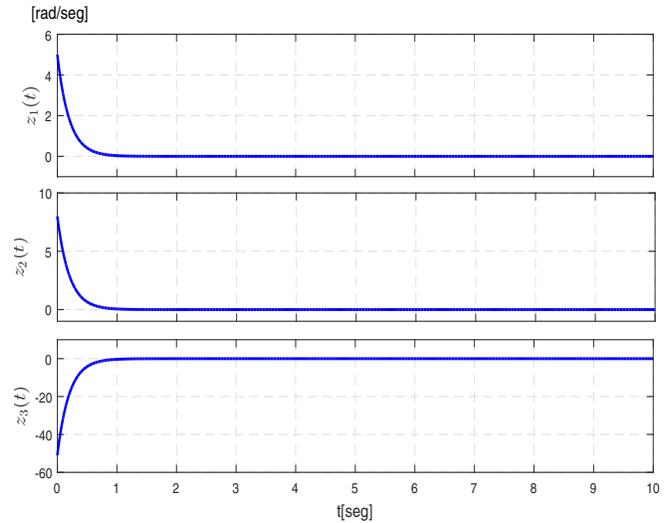


Figura 4. Dinámica fuera de la variedad.

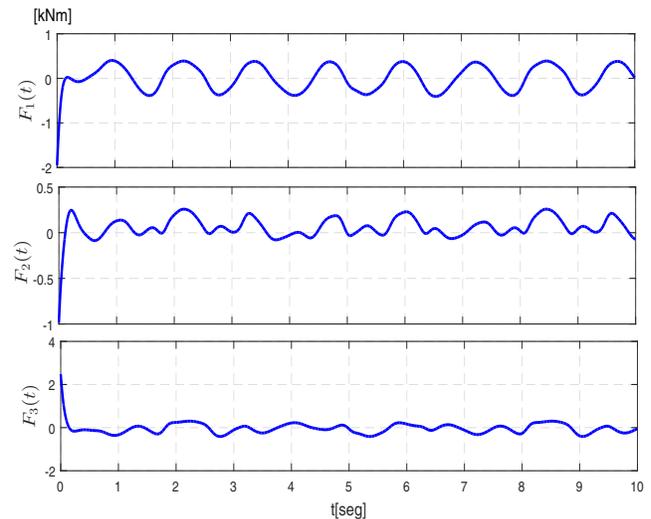


Figura 5. Entradas de control.

describen las trayectorias del vector del error de postura. La figura 4 muestra la trayectoria de la dinámica fuera de la variedad descrita por las componentes del vector  $z$ , donde se observa que después de alrededor de 2 segundos ésta coordenada se vuelve cero en sus tres componentes, lo que significa que a partir de ese momento las trayectorias de los ángulos de Euler se comportan como se describe a través del sistema dinámico objetivo. Finalmente, la figura 5 muestra los pares aplicados al vehículo espacial.

## 6. CONCLUSIÓN

En el presente artículo, la metodología I&I es aplicada en el diseño del control de seguimiento de postura para un vehículo espacial de lo que resulta una ley de control que depende del modelo del sistema y que está constituida por una matriz  $K$  de parámetros, la cual afecta solo el comportamiento del sistema dinámico objetivo, así como por una matriz de parámetros  $\Gamma$ , la cual afecta la velocidad de convergencia para la dinámica fuera de la variedad definida por  $z$ , pero que juntas forman un

tipo de término PD que afecta al sistema completo. La ley de control propuesta pareciera similar a la ley de control Par Calculado que puede encontrarse en Kelly et al. (2005); sin embargo, la aquí propuesta no considera el vector de pares gravitacionales debido a la naturaleza en la que se desenvuelve el sistema a controlar. Más aún, el establecimiento de las ganancias del controlador I&I las imprime el propio enfoque de la metodología.

#### AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico otorgado mediante la beca de estudios y el proyecto CONACyT 134534 y Proyectos TecNM.

#### REFERENCIAS

- Aeyels, D. (1985). Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of a rigid body. *Systems & Control Letters*, 6(1), 59–63.
- Astolfi, A., Escobar, G., Ortega, R., and Stankovic, A. (2002). An adaptive controller for the TCSC based on the immersion and invariance design technique. In *Proc. of the 14th Conf. on Power Systems Computation, Seville, Spain*.
- Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London.
- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Byrnes, C.I., Isidori, A., Monaco, S., and Sabatino, S. (1988). Analysis and simulation of a controlled rigid spacecraft: stability and instability near attractors. pp. 81–85. Decision and Control, In Proc. of the 27th IEEE Conf. on, IEEE, Austin, TX.
- Byrnes, C., Priscoli, F.D., and Isidori, A. (1997). *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston.
- Castañeda, F., Jurado, F., and Santibáñez, V. (2015). Control de movimiento de robots manipuladores vía inmersión e invariancia: Casos particulares. In *Congreso Nacional de Control Automático*, 339–345. AMCA, Cuernavaca, Morelos, México.
- Crouch, P., E. (1984). Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 29, 321–331.
- Hu, J. and Zhang, H. (2015). Output feedback control for rigid-body attitude with constant disturbances. *International Journal of Control*, 88(3), 602–612.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin.
- Jouan, P. (2003). Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and optimization*, 41(6), 1756–1778.
- Kelly, R., Santibáñez, V., and Loría, A. (2005). *Control of Robots Manipulators in Joint Space*. Springer London.
- Meyer, G. (1966a). On the use of orthogonal transformation for the synthesis of attitude control systems. pp. 430–434. Presented at the 1966 Joint Automatic Control Conference, Seattle, Washington.
- Meyer, G. (1966b). On the use of Euler’s theorem on rotations for the synthesis of attitude control systems. TN D-3643, NASA.
- Meyer, G. (1968). Response envelop - a global description of three-axis large-angle spacecraft attitude control systems. TN D-4896, NASA.
- Meyer, G. (1971). Design and global analysis of spacecraft attitude control systems. Tech. Rep. R-361, NASA.
- Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- Shuster, M., D. (1993). A survey of attitude representations. *Journal of Astronautical Sciences*, 41(4), 439–517.
- Slotine, J. and Benedetto, M. (1990). Hamiltonian adaptive control of spacecraft. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(7), 848–852.
- Wen, J.Y. and Kreutz-Delgado, K. (1991). The attitude control problem. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(10), 1148–1162.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.
- Wonham, W. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. 3rd edition, Springer-Verlag.