Diseño algorítmico de funciones de Lyapunov usando Formas Generalizadas

Tonámetl Sánchez *, **Jaime A. Moreno** * y **Jesús A. Peralta** *

* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, Ciudad de México, México (e-mail: TSanchezR@iingen.unam.mx, JMorenoP@ii.unam.mx, JPeraltaC@iingen.unam.mx).*

Resumen: En este artículo se proporciona un método para diseñar funciones de Lyapunov para una clase de sistemas homogéneos tanto continuos como discontinuos. Estos sistemas están descritos por una clase particular de funciones llamadas formas generalizadas y engloban varios tipos de sistemas de marcado interés como los Sistemas Lineales, los Sistemas Polinómicos Homogéneos y algunos sistemas con Modos Deslizantes de Orden Superior. En el artículo se definen la formas generalizadas, se describen sus principales propiedades y se muestra su flexibilidad para ser usadas como candidatas a funciones de Lyapunov. El método para diseñar las funciones de Lyapunov se presenta de una forma algorítmica, lo que permite que gran parte del procedimiento sea implementado en *software*.

Keywords: Funciones de Lyapunov, Análisis de Estabilidad.

1. INTRODUCCIÓN

El método directo de Lyapunov es la base de muchas de las principales herramientas en el análisis y diseño de los sistemas de control moderno. Sin embargo el mayor obstáculo en la aplicación de dicho método es la falta de procedimientos simples y constructivos para diseñar funciones de Lyapunov (FL, usaremos estas siglas tanto en plural como en singular).

Aunque en la literatura se cuentan varios métodos para la construcción de FL, muchos de ellos resultan ser muy complicados al aplicarse. Por ejemplo, el método de Zubov (Zubov, 1964) requiere que se resuelva una ecuación en derivadas parciales, lo mismo ocurre con sus variantes, como en (Polyakov and Poznyak, 2012) donde se desarrolla un método para construir FL para algoritmos por Modos Deslizantes de segundo orden. Otros métodos clásicos como el de Krasovskii (Krasovskii, 1963) o el del Gradiente Variable (Schultz and Gibson, 1962), que a pesar de ser un tanto generales, no pueden aplicarse a ciertas clases de sistemas de interés en el control, por ejemplo, los sistemas discontinuos. Por otra parte se encuentran las aproximaciones numéricas para construir FL, vea por ejemplo (Baier et al., 2012) y sus referencias. La mayor desventaja de estos métodos es que las funciones obtenidas en general no pueden ser usadas para desarrollos adicionales como, por ejemplo, el análisis de perturbaciones.

En (Sanchez and Moreno, 2014) se propuso un método para construir FL para una clase particular de sistemas homogéneos continuos y discontinuos. Las funciones que describen dichos sistemas pertenecen a una clase de funciones llamadas formas generalizadas (FG, usaremos estas siglas tanto en plural como en singular). En el método se escoge de esta misma clase una candidata a FL, lo que permite que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema sea también una FG. Así, verificar que la candidata es FL equivale a verificar la positividad definida de dos FG. Esto último se realiza utilizando una generalización del Teorema de Pólya (Hardy et al., 1988). Una de las características relevantes de este método es que permite obtener FL diferenciables de prácticamente cualquier grado de homogeneidad. En el presente trabajo replanteamos el método propuesto en (Sanchez and Moreno, 2014) con las diferencias que enlistamos a continuación y que pueden considerarse como los resultados principales de este artículo.

- A través de un ejemplo se exhibe la importancia de considerar a las FG como una extensión de los polinomios homogéneos (formas) y la necesidad de desarrollar técnicas para analizar sus propiedades.
- En este artículo, a diferencia de (Sanchez and Moreno, 2014), se explica detalladamente el proceso de representar una FG con un conjunto de formas.
- El análisis de positividad definida de las FG se realiza utilizando la representación en suma de cuadrados (SOS por sus siglas en Inglés) de sus formas asociadas.
- Suponiendo de la existencia de una FL en la clase de FG para un sistema descrito por FG, se demuestra la existencia de una FG que es FL y cuyas formas asociadas son SOS.
- El método para diseñar las FL se describe de manera simple y algorítmica, lo que permite que varios pasos del desarrollo puedan implementarse en *software*.

Organización del artículo: En la Sección 2 se recuerdan las definiciones de homogeneidad y de FG. Se explican las principales propiedades de las FG y como determinar su positividad usando la representación SOS de sus formas asociadas. En la Sección 3 se describe y ejemplifica el método para construir FL usando FG. En la Sección 4 se dan algunas conclusiones.

2. HOMOGENEIDAD Y FORMAS GENERALIZADAS

En esta sección proporcionamos las definiciones y los resultados necesarios para el desarrollo del artículo. Empezamos recordando los conceptos de homogeneidad clásica y homogeneidad ponderada. Posteriormente recordamos brevemente el concepto de forma, definimos las FG y mencionamos algunas de sus principales características. Sin embargo, antes de comenzar, establecemos la notación utilizada a lo largo del artículo.

Denotamos a los números reales, racionales y enteros con $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$, respectivamente. Definimos los conjuntos $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, análogamente para $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$. $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_q)$ es la matriz diagonal de tamaño $q \times q$ cuyos elementos de su diagonal son a_i, $i = 1, \ldots, q$. Dadas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la función $f \circ g$ denota la composición de f con g, i. e., para $x \in \mathbb{R}^m$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \mathbb{R}^p$. Definimos $\lceil \cdot \rfloor^{\rho} = \mathrm{sign}(\cdot)|\cdot|^{\rho}$, donde sign es la función signo, por ejemplo, $\lceil x \rfloor^{\frac{2}{3}} = \mathrm{sign}(x)|x|^{\frac{2}{3}}$, $\lceil x \rfloor^1 = \lceil x \rfloor = x$ y $\lceil x \rfloor^0 = \mathrm{sign}(x)$.

2.1 Homogeneidad ponderada

Considere la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Clásicamente, g es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$, si para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $g(\epsilon x) = \epsilon^m g(x)$. Dos ejemplos de funciones homogéneas son las funciones lineales y los polinomios homogéneos. La homogeneidad es una propiedad de escalamiento que se puede extender a una clase mas amplia de funciones si se flexibiliza la manera en que se realiza dicho escalamiento. Esta extensión se conoce como *homogeneidad ponderada* y ha sido ampliamente estudiada. A continuación recordamos sus definiciones tomadas de (Bacciotti and Rosier, 2005).

***Definición** 2.1.* Sea $\Lambda_\epsilon^{\mathbf{r}}$ la matriz diagonal dada por $\Lambda_\epsilon^{\mathbf{r}} = \mathrm{diag}(\epsilon^{r_1}, \ldots, \epsilon^{r_n})$, donde $\mathbf{r} = [r_1, \ldots, r_n]^\top$, $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$, y $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Los elementos de $\mathbf{r}$ se llaman *pesos* de homogeneidad de las coordenadas. Así:

a) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ (con los pesos $\mathbf{r}$) si $f(\Lambda_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
b) El campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con componentes $f_i(x)$, es homogéneo de grado $k \in \mathbb{R}$ (con los pesos $\mathbf{r}$) si $f_i(\Lambda_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$.
c) Un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, es homogéneo de grado k si f es homogéneo de grado k.

Las definiciones de homogeneidad ponderada han sido extendidas a funciones discontinuas y funciones conjunto-valuadas, vea por ejemplo (Levant, 2005), (Orlov, 2005), o mas recientemente (Bernuau et al., 2014).

En el resto de este artículo nos referiremos a la homogeneidad ponderada solo como homogeneidad. Ahora tenemos los elementos necesarios para definir las FG, sin embargo, daremos antes un ejemplo en el cuál se motiva el estudio de dichas funciones.

2.2 Ejemplo motivacional

Considere el siguiente sistema homogéneo polinómico de grado $k = 2$ con pesos $\mathbf{r} = [1, 3]^\top$:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -x_1^5\,. \tag{1}$$

En (Bacciotti and Rosier, 2005, Ejemplo 5.4) la función

$$V(x) = \tfrac{1}{6}x_1^6 + \tfrac{1}{2}x_2^2\,, \tag{2}$$

se da como una FL débil para (1). Note que esta función es polinómica y homogénea de grado $m = 6$ con los mismos pesos del sistema. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) es $\dot{V} = -x_1^8$. Así, la debilidad de V es debida a la ausencia de un término negativo definido en x_2 en $\dot{V}$. Ahora, considere el sistema

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1^3 + x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -k_2 x_1^5\,. \tag{3}$$

Note que para $k_1 = k_2 = 1$ obtenemos (1) como un caso particular. Es importante mencionar que el problema de la debilidad de (2), como FL para (1), se hereda a (3) no solo con (2) sino con todos los polinomios homogéneos que son FL para (2), esto lo establecemos en el siguiente teorema.

***Teorema** 2.1.* Para (3) no existen FL estrictas en la clase de polinomios homogéneos de ningún grado m con los pesos $\mathbf{r} = [1, 3]^\top$, para cualesquiera $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Considere la función polinomial

$$V(x) = \alpha_1 x_1^{p_1} + \alpha_2 x_2^{p_2} + \sum_{i=1}^{N} \beta_i x_1^{q_{1i}} x_2^{q_{2i}}\,, \tag{4}$$

donde p_1,p_2,q_{1i},$q_{2i} \in \mathbb{Z}_{>0}$, para alguna $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tenga en cuenta que todos los polinomios homogéneos de grado m con pesos $\mathbf{r} = [1, 3]^\top$ están descritos por (4) si

$$p_1 = m\,, \quad 3p_2 = m\,, \quad q_{1i} + 3q_{2i} = m\,. \tag{5}$$

Con el fin de que (4) sea positiva definida es necesario que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Además p_1 y p_2 deben ser pares. Así, de (5) podemos concluir que m debe ser un entero par, múltiplo de tres y mayor que seis, i. e., $m \in \{6n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. La derivada de (4) a lo largo de las trayectorias de (3) es

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -p_1\alpha_1 k_1 x_1^{p_1+2} + p_1\alpha_1 x_1^{p_1-1}x_2 - p_2\alpha_2 k_2 x_1^5 x_2^{p_2-1} + \\ & + \sum_{i=1}^{N} \beta_i \Big(-q_{1i}k_1 x_1^{q_{1i}+2} x_2^{q_{2i}} + q_{1i} x_1^{q_{1i}-1} x_2^{q_{2i}+1} - \\ & - q_{2i}k_2 x_1^{q_{1i}+5} x_2^{q_{2i}-1} \Big)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

El primer término de (6) es negativo definido en x_1 pero es necesario tener también un término negativo definido en x_2. Note que este se puede obtener del término $\beta_i q_{1i} x_1^{q_{1i}-1} x_2^{q_{2i}+1}$ si $\beta_i < 0$ y $q_{1i} = 1$ para alguna i. Sin embargo, $q_{2i} = (m - q_{1i})/3$ y $m = 6n$, así que

$$q_{2i} = (6n - 1)/3 = 2n - 1/3\,,$$

así q_{2i} no puede ser entero, lo que concluye la prueba.

Observe que, con $q_{1i} = 1$ y $m = 6$, $q_{1i} = 5/3$. Podemos elegir, por ejemplo, la siguiente candidata a FL para (3)

$$V(x) = \alpha_1 x_1^6 - \alpha_{12} x_1 \lceil x_2 \rfloor^{\frac{5}{3}} + \alpha_2 x_2^2\,. \tag{7}$$

Con el método desarrollado en este artículo, probamos que esta es una FL estricta para (3) para algunas k_1, k_2, α_1, α_{12} y α_2. De aquí es claro que vale la pena estudiar la clase de funciones a la que pertenece (7).

2.3 Formas generalizadas

En la literatura, un polinomio homogéneo es llamado comúnmente *forma*, vea por ejemplo (Lang, 2002, Capítulo

IX). En esta sección definimos y estudiamos las FG, que extienden la clase de formas. Estas funciones y sus propiedades conforman el núcleo del presente artículo.

***Definición** 2.2.* La función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es llamada forma generalizada de grado m si:

a) Es una función homogénea de grado m para algún vector de pesos $\mathbf{r}$
b) Consiste en sumas, productos y sumas de productos de términos como

$$a\lceil x_k\rfloor^p,\quad b|x_k|^q,\quad a,b\in\mathbb{R},\ p,q\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

***Ejemplo** 2.1.*
- La función $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por (7) es una FG de grado $m=6$ con los pesos $\mathbf{r}=[1,3]^\top$.
- Considere la función $f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x_1,x_2)=\kappa_1\lceil x_1\rfloor^{\frac{5\pi}{2}}\lceil x_2\rfloor^0+\kappa_2|x_1|^{\frac{\pi}{2}}\lceil x_2\rfloor^{\frac{4\pi}{3}},\ \kappa_i\in\mathbb{R}.$$

Esta función es una FG de grado $m=5\pi$ con los pesos $\mathbf{r}=[2,3]^\top$. Sin embargo es también FG de grado $m=5$ con los pesos $\mathbf{r}=[2/\pi,3/\pi]^\top$.

Es importante que subrayemos que las formas clásicas están contenidas en el conjunto de FG. Además las FG pueden ser funciones discontinuas en los hiperplanos coordenados de $\mathbb{R}^n$, como f_1 en el ejemplo anterior que es discontinua en el conjunto $\{x_2=0\}$. El siguiente resultado proporciona algunas características importantes de las FG.

***Teorema** 2.2.* Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dos FG de grado m_1, m_2 respectivamente, ambas con el vector de pesos $\mathbf{r}$.

(1) Si $m_1=m_2$, entonces $f+g$ es una FG de grado m_1 con los pesos $\mathbf{r}$.
(2) El producto fg es una FG de grado m_1+m_2 con los pesos $\mathbf{r}$.
(3) Si f es diferenciable sus derivadas parciales $\partial f/\partial x_i$, $i=1,2,\dots,n$ son FG de grado m_1-r_i respectivamente.

La prueba de este teorema se obtiene fácilmente de la definición de FG y de las propiedades de las funciones homogéneas.

***Corolario** 2.1.* Sea $\dot{x}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ un sistema homogéneo grado k con los pesos $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^n$, tal que cada f_i en $f=[f_1,\dots,f_n]^\top$ es una FG. Si $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una FG diferenciable de grado m con los mismos pesos $\mathbf{r}$, entonces $W(x)=-(\partial V/\partial x)\cdot f(x)$ es una FG de grado $m+k$ con los pesos $\mathbf{r}$.

Note que si f es un campo discontinuo, entonces en general W será una FG discontinua. Del Corolario 2.1 podemos ver que si un sistema está descrito por FG y se propone una FG V como candidata a FL, entonces su derivada $-W$ será también una FG. Por lo tanto, el problema de verificar que V es una FL estricta se reduce a determinar que las FG V y W son positivas definidas.

***Observación** 2.1.* Mas adelante en el texto proporcionamos un método para verificar la positividad definida de FG con exponentes conmensurables por pares. Recordamos que $p,q\in\mathbb{R}$, $p,q\neq 0$, son conmensurables si $p/q\in\mathbb{Q}$. Por esta razón la mayoría de los resultados en el resto del artículo solo son válidos para FG con exponentes conmensurables por pares. Sin embargo, para hacer mas sencilla la explicación, restringimos la atención a FG con exponentes racionales. Abajo damos el argumento por el cual no se pierde generalidad con esta restricción.

***Lema** 2.1.* Sea $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función con componentes $\phi_i(y_i)=\lceil y_i\rfloor^{\frac{1}{\iota}}$, $i=1,\dots,n$, $\iota\neq 0$. Para toda FG $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de grado m con pesos $\mathbf{r}$ y cuyos exponentes son conmensurables a pares, existe una $\iota\in\mathbb{R}_{>0}$ tal que ϕ es un isomorfismo y $f\circ\phi$ es una FG cuyos exponentes son racionales.

La prueba de este lema se omite por falta de espacio. Observe que el isomorfismo ϕ, solo *expande* o *contrae* a $\mathbb{R}^n$. De manera que para cada x_0, ϕ determina un único y_0 tal que $(f\circ\phi)(y_0)=f(x_0)$. Así, por ejemplo, si f es positiva definida, entonces $f\circ\phi$ también lo será.

Para continuar definimos lo siguiente. Se entiende por *hiperoctante* a la generalización a $\mathbb{R}^n$ del concepto de cuadrante en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^4$ uno de los dieciséis hiperoctantes es $\bar{\mathcal{D}}_1=\{x_1\geq 0,x_2\geq 0,x_3\geq 0,x_4\geq 0\}$. Decimos que un *hiperoctante abierto* es aquel que no contiene los conjuntos $\{x_i=0\}$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$, por ejemplo, $\mathcal{D}_1=\{x_1>0,x_2>0,x_3>0\}$ es un hiperoctante abierto de $\mathbb{R}^3$. Denotaremos al hiperoctante positivo abierto (cerrado) de $\mathbb{R}^n$ como $\mathcal{P}=\{x_1>0,\dots,x_n>0\}$ ($\bar{\mathcal{P}}=\{x_1\geq 0,\dots,x_n\geq 0\}$).

Sea $\{\bar{\mathcal{D}}_i\}$ el conjunto de los 2^n hiperoctantes de $\mathbb{R}^n$, dada una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, denotamos a la restricción de f al hiperoctante $\bar{\mathcal{D}}_i$ como $f_{\bar{\mathcal{D}}_i}:\bar{\mathcal{D}}_i\to\mathbb{R}$. Así, de la definición de función positiva definida se obtiene directamente el siguiente lema.

***Lema** 2.2.* Una FG $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es positiva definida si y solo si para toda $i\in\{1,2,\dots,2^n\}$, $f_{\bar{\mathcal{D}}_i}$ es positiva definida.

El siguiente lema establece que una FG es equivalente a un conjunto de formas clásicas definidas por hiperoctantes.

***Lema** 2.3.* Para cada hiperoctante $\bar{\mathcal{D}}_i\subset\mathbb{R}^n$, $i\in\{1,\dots,2^n\}$, defina la función $d^i:\bar{\mathcal{P}}\to\bar{\mathcal{D}}_i$ como

$$d^i(y)=[\sigma_1 y_1^{\mu_1},\dots,\sigma_n y_n^{\mu_n}]^\top,\ \mu_j\in\mathbb{Q},\ j=1,\dots,n,\quad (8)$$

donde σ_j es el signo de la variable x_j en $\bar{\mathcal{D}}_i$. Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una FG de grado m, pesos $\mathbf{r}$ y exponentes racionales, entonces existen $\mu_j\in\mathbb{Q}_{\geq 0}$ tales que cada $f_{\bar{\mathcal{D}}_i}\circ d^i:\bar{\mathcal{P}}\to\mathbb{R}$ es una forma clásica restringida a $\bar{\mathcal{P}}$.

La prueba de este lema se omite por falta de espacio, sin embargo, de dicha prueba se obtiene la forma de elegir cada μ_i. Denote con CD_i al mínimo común denominador de todos los exponentes de la variable x_i en f. Defina

$$\mu_i=c_iCD_i,\quad c_i\in\mathbb{Z}_{>0}.\quad (9)$$

Las c_i deben elegirse tales que para cualesquiera i, j,

$$\mu_i/r_i=\mu_j/r_j=cte.\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

El lema anterior nos proporciona un procedimiento para representar una FG $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a través de un conjunto de 2^n formas clásicas $f_i:\bar{\mathcal{P}}\to\mathbb{R}$. Sin embargo, note que si f es una función simétrica respecto al origen, entonces el número de formas clásicas se puede reducir a la mitad, esto es, a 2^{n-1} formas. En adelante nos referiremos al conjunto de las f_i como las *formas asociadas* de la FG f. El siguiente ejemplo clarifica el el Lema 2.3.

***Ejemplo** 2.2.* Considere la función (7) que es homogénea de grado $m=3$ con pesos de homogeneidad $\mathbf{r}=[1,3]^\top$. Para esta función $CD_1=1$ y $CD_2=3$. Eligiendo $\mu_1=1$ y $\mu_2=3$ se tiene que

$$d^i:\bar{\mathcal{P}}\to\bar{\mathcal{D}}_i,\ d^i(z)=[\sigma_1 y_1^1,\sigma_2 y_2^3]^\top.\quad (10)$$

Aplicando (10) a (7) obtenemos que las formas asociadas $V_i = V \circ d_i : \bar{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}$ son

- para $\bar{\mathcal{D}}_1 = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$
$$V_1(y) = \alpha_1 y_1^6 - \alpha_{12} y_1 y_2^5 + \alpha_2 y_2^6\,, \qquad (11)$$
- para $\bar{\mathcal{D}}_2 = \{x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$
$$V_2(y) = \alpha_1 y_1^6 + \alpha_{12} y_1 y_2^5 + \alpha_2 y_2^6\,, \qquad (12)$$
- para $\bar{\mathcal{D}}_3 = \{x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$
$$V_3(y) = \alpha_1 y_1^6 - \alpha_{12} y_1 y_2^5 + \alpha_2 y_2^6\,, \qquad (13)$$
- para $\bar{\mathcal{D}}_4 = \{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$
$$V_4(y) = \alpha_1 y_1^6 + \alpha_{12} y_1 y_2^5 + \alpha_2 y_2^6\,. \qquad (14)$$

Note que (11-14) son formas de grado $m = 6$ restringidas a $\bar{\mathcal{P}}$. Como V es simétrica, puede ser completamente caracterizada por solo dos formas, es decir, V_1 para $\bar{\mathcal{D}}_1$, $\bar{\mathcal{D}}_3$, y V_2 para $\bar{\mathcal{D}}_2$, $\bar{\mathcal{D}}_4$.

Observación *2.2.* De los lemas 2.1–2.3 podemos concluir que es posible verificar la positividad definida de una FG (con exponentes conmensurables) a través de la positividad definida de sus formas asociadas.

2.4 Formas generalizadas positivas

Considere una forma $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de grado $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Una manera de determinar su no-negatividad es reescribiéndola tal que en la nueva representación la no-negatividad sea obvia. A continuación mencionamos dos maneras (equivalentes) de reescribir $F(x)$ cuando m es par.

- Suponga que F puede ser reescrita como la forma cuadrática $F(x) = X^\top PX$, donde $X = X(x)$ es un vector de monomios de grado $m/2$ en las variables x. Así, la no-negatividad de F es evidente si la matriz P es positiva semidefinida.
- Una forma F es llamada suma de cuadrados(SOS) (vea por ejemplo (Reznick, 2000) y sus referencias) si existe un número finito de polinomios f_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ de grado $m/2$ tales que $F(x) = \sum_{i=1}^{N} [f_i(x)]^2$. Note que la no-negatividad de un polinomio es evidente si este es SOS.

En (Choi et al., 1995) se demuestra que una forma es SOS si y solo si existen P positiva semidefinida y X tales que $F(x) = X^\top PX$. De manera que esta relación ha permitido reducir el problema de análisis de formas no-negativas a resolver la desigualdad matricial lineal $P \geq 0$. Para esto se han aprovechado todas la herramientas de la optimización convexa, vea (Parrilo, 2000) y (Blekherman et al., 2012). A continuación discutimos algunas características de la representación en SOS.

- Si una forma es SOS, entonces es no-negativa. Sin embargo si una forma es no-negativa no necesariamente es SOS, vea por ejemplo (Marshall, 2008).
- El hecho de que una forma $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de grado m sea SOS solo garantiza que es positiva semidefinida. Sin embargo, si se verifica que la forma $\bar{F}(x) = F(x) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^m$ es SOS, para alguna $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ suficientemente pequeña, entonces F es positiva definida, vea por ejemplo (Blekherman et al., 2012, Sección 3.6.2).
- Note que para verificar que una forma F es SOS, la representación explícita no es necesaria. De hecho, solo es necesario encontrar una matriz positiva definida P para la representación en forma cuadrática.
- Lo dicho en el punto anterior es lo que permite involucrar a la optimización convexa para determinar si una forma es SOS. Esto ha posibilitado el desarrollo de *software* para certificar si una forma es SOS, por ejemplo SOSTOOLS (Prajna et al., 2002–2005).

Suponga que se tiene una forma $F = F(x, \alpha)$ donde x es el vector de variables y α es un vector que contiene los coeficientes (no necesariamente todos) de los términos de F. Si el vector α no está fijo, la representación SOS pude ser usada como herramienta de diseño de los valores de α que permitan a F ser positiva definida. Esta idea es aclarada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo *2.3.* Sea la forma $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$V(y) = \alpha_1 y_1^{10} - \alpha_{12} y_1^6 y_2^4 + \alpha_2 y_2^{10}\,, \qquad (15)$$
el grado de esta forma es $m = 10$. Sea $Y = [y_1^5,\ y_1^4 y_2,\ y_1^3 y_2^2,\ y_1^2 y_2^3,\ y_1 y_2^4,\ y_2^5]^\top$ y defina $\alpha = [\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2]^\top$. Para verificar que (15) es positiva definida, es suficiente ver que la forma $\bar{V}(y) = V(y) - \epsilon(y_2^{10} + y_2^{10})$ es SOS. Esto es equivalente a buscar una matriz positiva semidefinida $P = P(\alpha)$ tal que $\bar{V}(y) = Y^\top PY$. El *software* SOSTOOLS está diseñado para tratar de resolver este problema. Si α no está fija, SOSTOOLS la considera como variable de decisión y entonces busca valores para α tales que $\bar{V}$ sea SOS. Para nuestro ejemplo, considerando α libre y $\epsilon = 0.1$, SOSTOOLS determina una matriz P que satisface $\bar{V}(y) = Y^\top PY$ y cuyos valores propios son $\{1.7,\ 0.4,\ 1.1,\ 1.6,\ 0.4,\ 1.2\}$. Para tal matriz SOSTOOLS devuelve $\alpha = [1.32\,,\ 0.56\,,\ 1.25]^\top$. Así, con estos valores de α, (15) es positiva definida.

Observación *2.3.* Con la finalidad de que las formas F_i asociadas a una FG F sean de grado par y definidas en todo $\mathbb{R}^n$ se puede elegir el isomorfismo (8) tal que todos los exponentes de F_i sean pares. Esto siempre es posible ya que de acuerdo a la prueba del Lema 2.3, los exponentes μ_i en (8) se deben elegir como $\mu_i = c_i CD_i$, por lo tanto basta elegir los parámetros c_i como números pares. Ahora, note que si γ es un número par positivo, el conjunto de valores que toma y_i^γ con $y_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ no se altera si $y_i \in \mathbb{R}$. Esto nos permite extender libremente el dominio $\bar{\mathcal{P}}$ a todo $\mathbb{R}^n$ para cada F_i. En adelante diremos que una FG F es SOS si todas sus formas asociadas F_i son SOS.

Con las herramientas desarrolladas hasta este punto estamos listos para describir el método para construir FL usando las FG.

3. DISEÑO DE FUNCIONES DE LYAPUNOV

Dado un sistema homogéneo descrito por FG, el método consiste en proponer como candidatas a FL a una familia de FG parametrizadas en sus coeficientes. La derivada de la familia de FG (a lo largo de las trayectorias del sistema) también es una familia de FG parametrizadas en sus coeficientes. Estas FG pueden ser asociadas a un conjunto de formas clásicas como se vio en la sección anterior. Así, el problema de verificar la positividad definida de la función candidata y la negatividad definida de su derivada, se reduce a encontrar un conjunto de parámetros tales que el conjunto de formas asociadas sean SOS.

Considere el sistema homogéneo

$$\dot{x} = f(x,k)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{16}$$

de grado s con pesos $\mathbf{r} = [r_1,\dots,r_n]^\top$, cuyo campo vectorial $f = [f_1,\dots,f_n]^\top$ está descrito por FG (no necesariamente continuo) con potencias conmensurables. Los elementos del vector $k \in \mathbb{R}^r$ son las ganancias del sistema, i.e., algunos de los coeficientes de las FG f_i. Suponga que $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema para algún k. Considere también la FG

$$V(x,\alpha) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i|x_i|^{\frac{m}{r_i}} + \sum_{j=1}^{q}\bar{\alpha}_j\prod_{i=1}^{n}\upsilon_{ij}(x_i,\rho_{i,j}), \tag{17}$$

donde $\upsilon_{ij}(x_i,\rho_i)$ denota a cualquiera de los términos $|x_i|^{\rho_{i,j}}$ o $\lceil x_i\rfloor^{\rho_{i,j}}$ con $\rho_{i,j} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ y algún $q \in \mathbb{Z}\geq 0$ finito. Los elementos del vector $\alpha \in \mathbb{R}^{n+q}$ son los coeficientes α_i, $\bar{\alpha}_j$. Las α_i se restringen a ser estrictamente positivas. Para garantizar que (17) sea homogénea de grado m con los pesos del sistema se debe satisfacer para toda j,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\rho_{i,j} = m\,. \tag{18}$$

Para que (17) sea diferenciable se requiere que

$$\begin{cases} m > \max_i\{r_i\} \\ \rho_{i,j} \geq 1\,,\ \text{para } \upsilon_i(x_i,\rho_{i,j}) = \lceil x_i\rfloor^{\rho_{i,j}} \\ \rho_{i,j} > 1\,,\ \text{para } \upsilon_i(x_i,\rho_{i,j}) = |x_i|^{\rho_{i,j}} \end{cases} ,\ \forall i,j\,. \tag{19}$$

La derivada de (17) a lo largo de las trayectorias de (16) es $(\partial V(x)/\partial x)\cdot f(x) = -W(x,\beta)$ donde

$$W(x,\beta) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\beta_i|x_i|^{\frac{\bar{m}}{r_i}} + \sum_{j=1}^{\bar{q}}\bar{\beta}_j\prod_{i=1}^{n}\bar{\upsilon}_{i,j}(x_i,\bar{\rho}_{i,j})\,, \tag{20}$$

para alguna $\bar{q} \in \mathbb{Z}_{>0}$ y algún vector β que contiene los coeficientes β_i y $\bar{\beta}_j$. Note que (20) es homogénea de grado $\bar{m} = m + s$ y que β es una función lineal de los coeficientes de V y una función afín de las ganancias del sistema.

Con esto, el diseño de una FL para (16) se puede realizar usando el algoritmo que se propone a continuación.

3.1 Algoritmo de construcción

Paso 1 Para $q = 1$, elegir los términos $\upsilon_{ij}(x_i,\rho_i)$ en (17).

Paso 2 Tomar la derivada de (17) a lo largo de las trayectorias de (16) y obtener W dada por (20).

Paso 3 Considerando (18) y (19), verificar las condiciones sobre $\rho_{i,j}$ y los signos de $\bar{\alpha}_j$ tales que en W las β_i puedan ser positivas. Si no, regresar al **Paso 1** y aumentar q o cambiar $\upsilon_{ij}(x_i,\rho_i)$.

Paso 4 Teniendo éxito en el paso anterior y considerando las restricciones encontradas, fijar el grado de homogeneidad m y los exponentes $\rho_{i,j}$. Con esto quedan determinadas las potencias de los términos en V y W.

Paso 5 Fije los exponentes μ_i en el isomorfismo (8) de acuerdo con (9) y eligiendo las c_i pares. Calcule el conjunto de formas asociadas a V y W, i. e., $\{V_1,\dots,V_{2^n}\}$ y $\{W_1,\dots,W_{2^n}\}$. Defina las formas

$$\bar{V}_j(y) = V_j(y) - \epsilon\sum_{i=1}^{n} y_i^{\delta}\,,\ \bar{W}_j(y) = W_j(y) - \epsilon\sum_{i=1}^{n} y_i^{\bar{\delta}}\,,$$

donde δ y $\bar{\delta}$ son los grados de V_i y W_i, respectivamente.

Paso 6 Determinar los valores de α tales que todas las $\bar{V}_i$ y todas las $\bar{W}_i$ sean SOS.

En este punto el procedimiento se puede hacer iterativo para encontrar más valores de k como sigue.

Paso 7 Con los valores obtenidos para α, dejar a k como variable de decisión y determinar los valores de k tales que todas las $\bar{V}_i$ y todas las $\bar{W}_i$ sean SOS.

Debido a que (16) es homogéneo, se sabe que existe una FL homogénea suave para este sistema (Rosier, 1992), (Bernuau et al., 2014). De aquí, parece natural buscar tal función entre las FG, desafortunadamente no tenemos garantía de que exista una FL que sea FG. Sin embargo, a continuación daremos un teorema que asegura la existencia de una FL que es una FG SOS, esto bajo la suposición de que existe una FG que es FL. El teorema es una extensión a FG de (Ahmadi and Parrilo, 2011, Teorema 4.3). La demostración está basada en el siguiente resultado de (Scheiderer, 2012): Dadas dos formas positivas definidas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para cualquier $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ suficientemente grande, la forma fg^q es SOS.

***Teorema** 3.1.* Considere (16). Si existe una FG $\bar{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que es una FL estricta para el sistema, entonces existe una FG $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que es una FL estricta para el sistema y es SOS. Además, la FG W dada por $W(x) = -\dot{V}$ es también SOS.

Demostración. Denote $\bar{W}(x) = -\dot{\bar{V}}$. Como $\bar{V}$ es una FG y es FL estricta para el sistema, tenemos que $\bar{V}$ y $\bar{W}$ tienen un conjunto de formas asociadas $\{\bar{V}_i, \bar{W}_i\}$ positivas definidas. Defina $V(x) = \bar{V}^{2q+2}(x)$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Note que las formas asociadas de V están dadas por $V_i(z) = \bar{V}_i^{2q+2}(z)$. Ya que $2q+2$ es par, cada V_i es SOS y por lo tanto la FG V es SOS. Ahora, $\dot{V} = (2q+2)\bar{V}^{2q+1}(x)\dot{\bar{V}}$, de manera que

$$W(x) = (2q+2)\bar{V}^{2q}(x)\bar{V}(x)\bar{W}(x)\,,$$

por lo tanto las formas asociadas de W están dadas por

$$W_i(z) = (2q+2)[\bar{V}_i^2(z)]^q[(\bar{V}_i\bar{W}_i)(z)]\,.$$

Ahora, para cada i (del teorema de Scheiderer) existe una $q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $[\bar{V}_i^2(z)]^{q_i}[(\bar{V}_i\bar{W}_i)(z)]$ es SOS. Eligiendo $\bar{q} = \max_i\{q_i\}$ podemos afirmar que toda W_i es SOS para cualquier $q \geq \bar{q}$, y por lo tanto la FG W es SOS.

3.2 Ejemplo de diseño de una función de Lyapunov

Considere (3) que es un sistema homogéneo de grado $s = 2$ con los pesos $\mathbf{r} = [1,3]^\top$ y está descrito por FG.

Paso 1. De (17) tenemos la función candidata

$$V(x,\alpha) = \alpha_1|x_1|^m + \alpha_2|x_2|^{\frac{m}{3}} + \bar{\alpha}_1\lceil x_1\rfloor^{\rho_1}\lceil x_2\rfloor^{\rho_2}\,.$$

Paso 2. De la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema obtenemos

$$\begin{aligned} W(x) = {} & m\alpha_1k_1|x_1|^{m+2} - m\alpha_1\lceil x_1\rfloor^{m-1}x_2 + \\ & + \tfrac{m}{3}\alpha_2k_2x_1^5\lceil x_2\rfloor^{\frac{m}{3}-1} + \rho_1\bar{\alpha}_1k_1\lceil x_1\rfloor^{\rho_1+2}\lceil x_2\rfloor^{\rho_2} - \\ & - \rho_1\bar{\alpha}_1|x_1|^{\rho_1-1}|x_2|^{\rho_2+1} + \rho_2\bar{\alpha}_1k_2|x_1|^{\rho_1+5}|x_2|^{\rho_2-1}\,. \end{aligned}$$

Paso 3. Para la positividad definida de W, de su quinto término es necesario que $\rho_1 = 1$ y que $\bar{\alpha}_1 < 0$.

Paso 4. Considerando (18) com $m = 6$ y definiendo $\alpha_{12} = -\bar{\alpha}_1$, se obtiene la función candidata

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^6 - \alpha_{12}x_1\lceil x_2\rfloor^{\frac{5}{3}} + \alpha_2|x_2|^2\,, \tag{21}$$

que es equivalente a la función dada en (7). Su derivada a lo largo de las trayectorias de (3) es

$$W(x) = \beta_1|x_1|^8 - \beta_2|x_1|^6|x_2|^{\frac{2}{3}} - \beta_3\lceil x_1\rfloor^5 x_2 \\ -\beta_4\lceil x_1\rfloor^3\lceil x_2\rfloor^{\frac{5}{3}} + \beta_5|x_2|^{\frac{8}{3}} .$$

$$\beta_1 = 6\alpha_1 k_1 , \quad \beta_2 = \tfrac{5}{3}\alpha_{12}k_2 , \quad \beta_3 = 6\alpha_1 - 2\alpha_2 k_2 , \\ \beta_4 = \alpha_{12}k_1 , \quad \beta_5 = \alpha_{12} ,$$

Paso 5. Con el isomorfismo $d^i(z) = [\sigma_1 y_1^2, \sigma_2 y_2^6]^\top$ calculamos las formas asociadas de V y W, note que estas son simétricas respecto al origen por lo tanto el número de formas necesarias se reduce a la mitad. Así, para el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x_1 x_2 \geq 0\}$ obtenemos

$$V_1(y) = \alpha_1 y_1^{12} - \alpha_{12} y_1^2 y_y^{10} + \alpha_2 y_2^{12} ,$$

$$W_1(y) = \beta_1 y_1^{16} - \beta_2 y_1^{12} y_2^4 - \beta_3 y_1^{10} y_2^6 - \beta_4 y_1^6 y_2^{10} + \beta_5 y_2^{16} ,$$

y para el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x_1 x_2 \leq 0\}$ obtenemos:

$$V_2(y) = \alpha_1 y_1^{12} + \alpha_{12} y_1^2 y_2^{10} + \alpha_2 y_2^{12} ,$$

$$W_2(y) = \beta_1 y_1^{16} - \beta_2 y_1^{12} y_2^4 + \beta_3 y_1^{10} y_2^6 + \beta_4 y_1^6 y_2^{10} + \beta_5 y_2^{16} .$$

Ahora definimos para $i = 1, 2$,

$$\bar{V}_i(y) = V_i(y) - \epsilon(y_1^{12} + y_2^{12}) ,$$

$$\bar{W}_i(y) = W_i(y) - \epsilon(y_1^{16} + y_2^{16}) .$$

Paso 6. Fijamos $k_1 = k_2 = 1$. Entregamos a SOSTOOLS las formas $\bar{V}_i(y), \bar{W}_i(y)$ con las restricciones sobre sus coeficientes determinadas en los pasos anteriores. Con $\epsilon = 0.1$, SOSTOOLS determina que $\bar{V}_i, \bar{W}_i$ son SOS con $\alpha = [1.3,\ 0.5,\ 1.2]^\top$. Por lo tanto $V(x) = 1.3|x_1|^6 - 0.5x_1\lceil x_2\rfloor^{\frac{5}{3}} + 1.2|x_2|^2$ es una FL para (3) con $k_1 = k_2 = 1$.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se puede ver la utilidad de extender la clase de formas a la clase de FG y estudiar las propiedades de estas últimas. El estudio de las FG ha permitido desarrollar el método propuesto en (Sanchez and Moreno, 2014) para construir FL. Aquí lo hemos descrito en forma más detallada y lo hemos flexibilizado incluyendo el análisis por SOS. A través de varios ejemplos realizados por los autores (aunque no reportados aquí por falta de espacio) se observa que el método es útil para diseñar FL. La característica algorítmica del método nos ha permitido implementar varios pasos en MATLAB®, lo que facilita, por ejemplo, el cálculo de las formas asociadas a una FG.

ACKNOWLEDGEMENTS

Los autores agradecen el apoyo financiero del Fondo de Colaboración II-FI UNAM, proyecto IISGBAS-100-2015; y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, proyecto 241171 y CVU 371652.

BIBLIOGRAFÍA

Ahmadi, A.A. and Parrilo, P.A. (2011). Converse results on existence of sum of squares Lyapunov functions. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 6516–6521.

Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory.* Communications and Control Engineering. Springer, Berlin, 2nd edition.

Baier, R., Grüne, L., and Hafstein, S.F. (2012). Linear programming based Lyapunov function computation for differential inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B*, 17(1), 33–56.

Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of The Franklin Institute*, 351(4), 1866–1901.

Blekherman, G., Parrilo, P., and Thomas, R. (2012). *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Choi, M.D., Lam, T.Y., and Reznick, B. (1995). Sum of squares of real polynomials. In *Proceedings of Symposia in Pure mathematics*, volume 58, 103–126. American Mathematical Society.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G. (1988). *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library, 2nd edition.

Krasovskii, N.N. (1963). *Problems of the Theory of Stability of Motion.* Stanford Univ. Press, Stanford, CA.

Lang, S. (2002). *Algebra.* Springer–Verlag, New York, 3rd edition.

Levant, A. (2005). Homogeneity approach to High–Order Sliding Mode design. *Automatica*, 41, 823–830.

Marshall, M. (2008). *Positive Polynomials and Sums of Squares*, volume 146 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, United States of America.

Orlov, Y. (2005). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.

Parrilo, P.A. (2000). *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization.* Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.

Polyakov, A. and Poznyak, A. (2012). Unified Lyapunov function for a finite–time stability analysis of relay second–order sliding mode control systems. *IMA J. of Mathematical Control and Information*, 29(4), 529–550.

Prajna, S., Papachristodoulou, A., and Parrilo, P.A. (2002–2005). *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB.* Available from www.cds.caltech.edu/sostools and www.mit.edu/~parrilo/sostools.

Reznick, B. (2000). Some concrete aspects of Hilbert's 17th Problem. In *Real algebraic geometry and ordered structures*, volume 253 of *Contemp. Math.*, 251–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Rosier, L. (1992). Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6), 467–473.

Sanchez, T. and Moreno, J.A. (2014). A constructive Lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. In *IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 5500–5505.

Scheiderer, C. (2012). A positivstellensatz for projective real varieties. *Manuscripta Mathematica*, 138(1), 73–88.

Schultz, D.G. and Gibson, J.E. (1962). The Variable Gradient Method for generating Liapunov Functions. *Trans. of the Am. Inst. of Elec. Eng.*, 81(4), 203–210.

Zubov, V.I. (1964). *Methods of A. M. Lyapunov and their applications.* Groningen: P. Noordho: Limited.