CLF-estabilización con controles restringidos

Horacio Leyva Castellanos

Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, hleyva@mat.uson.mx

Resumen: En el marco de la teoría de funciones Lyapunov de control para sistemas afines, presento un algoritmo para generar estabilizadores admisibles (continuos) restringidos a la hipercaja. La formulación incluye el caso extremo $0 \in \partial U$, en particular el caso de controles positivos.

Palabras clave: Estabilización, control continuo, función Lyapunov de control.

1. INTRODUCCIÓN

Para sistemas afines, muchos problemas de robustez y de estabilización pueden resolverse a través de una *función Lyapunov de control* (CLF). Sin embargo, aún dada una función Lyapunov de control, la construcción del estabilizador no es inmediata. Los resultados en la teoría CLF para sistemas afines muestran la viabilidad de un diseño para algunos conjuntos de valores admisibles para el control (CVS), pero son formulaciones poco prácticas para generar explícitamente un estabilizador continuo, ver los trabajos Sontag (1989), Lin y Sontag (2004), Malisoff y Sontag (2000), Suárez et al. (2001), Solís-Daun and Leyva (2011), Solís (2011). Con base en los trabajos Artstein (1983), Leyva et al. (2013) y Leyva and Solís-Daun (2014), presento un Algoritmo (un mínimo de operaciones suficientes) para generar un estabilizador explícito para el caso de la hipercaja (cualquier hipercaja que contenga al origen) como conjunto admisible de valores del control, que incluye el caso de control positivo. Adicionalmente, resuelvo un problema de estabilización para sistemas con control restringido a un subconjunto de la hipercaja.
Considere el sistema $dx/dt = f(x, u)$, donde x es el estado del sistema, u es la entrada de control, tal que nos proponemos estabilizar las soluciones en $x = 0$. Es decir, queremos diseñar una ley de control $u = k(x)$ de forma que el punto de equilibrio $x = 0$ sea *global asintóticamente estable* (GAS) bajo el sistema a lazo cerrado $dx/dt = f(x, k(x))$. Para mostrar el comportamiento GAS necesitamos una función de Lyapunov $V(x)$ que satisfaga las condiciones de los teoremas de Lyapunov. De acuerdo a estos teoremas, el *diseño de control basado en la teoría de Lyapunov* consiste en construir una ley de control $k(x)$ y una función de Lyapunov $V(x)$. Un enfoque para encontrar $k(x)$ consiste en escoger una función $V(x)$ radialmente no acotada y definida positiva, y luego elegir $k(x)$ tal que

$$\nabla V(x) \cdot (f(x, k(x))) < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

Para que este enfoque tenga éxito, la función V debe escogerse de manera que la desigualdad anterior tenga solución.
El problema de CLF-estabilización anteriormente descrito es menos difícil para el caso de sistemas afines. De manera que en la literatura predominan resultados sobre la estabilización de sistemas afines, continuando con esta tendencia, restringiremos nuestro objetivo de estabilización a tales sistemas. Consideremos el sistema afín con entrada multivariable

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \tag{1}$$

con $x \in R^n$, f, $g_i : R^n \to R^n$, para $i = 1, \ldots, m$, son $\mathcal{C}^s(R^n)$ $(s \geq 0)$ y $f(0) = 0$. El *conjunto de valores admisibles para el control* (CVS) es un conjunto convexo y compacto $U \subset R^m$, con $0 \in U$.

El conjunto de funciones de retroalimentación admisibles es definida por

$$\mathcal{U} := \{u : R^n \to U : u(x) \text{ es regular}\}. \tag{2}$$

donde *regular* significa al menos continua para cada x, o de clase $\mathcal{C}^s$ $(s \geq 0)$.

2. FUNCIONES LYAPUNOV DE CONTROL PARA SISTEMAS AFINES

Sea el CVS $U \subset R^m$. Una función $V : R^n \to R$ es *función Lyapunov de control* [respecto al sistema (1) con controles en U] si y sólo si (*ssi*) es una función $\mathcal{C}^k(R^n)$ $(k \geq 1)$ la cual es *definida positiva* ($V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ *ssi* $x \neq 0$) y *propia* (para $c \geq 0$, su preimagen $V^{-1}(c)$ es un compacto), tal que

$$\inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0, \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} &a(x) := L_f V(x) \;\&\; b(x) := (b_1(x), \ldots, b_m(x)), \\ &\text{con } b_i(x) := -L_{g_i} V(x), \;\; i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{4}$$

denota la derivada direccional de $V(x)$ con respecto a los campos vectoriales que definen el sistema (1).

Consideremos la ley de control óptima $\overline{\omega}(x)$, con respecto a la CLF $V(x)$ [para sistemas (1) con controles tomando valores en U] *si* satisface la ecuación

$$a(x) - b(x) \cdot \overline{\omega}(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \tag{5}$$

para toda $x \neq 0$. La expresión de la fórmula $\overline{\omega}(x)$ depende de la frontera del CVS convexo U. En general, el problema (3) es satisfecho *si* existe un control de retroalimentación $\overline{\omega}(x)$, una función *singular* $\overline{\omega} : R^n \backslash \mathcal{N}_b \to \partial U$, donde

$$\mathcal{N}_b := \{x \in R^n : b(x) = 0\}, \tag{6}$$

ya que si $b(x) = 0$ entonces $\overline{\omega}(x)$ es arbitraria. Por lo tanto, $\overline{\omega}(x)$ no es admisible por ser una función discontinua.

Para el diseño de las funciones de control de retroalimentación continua en el origen, Zvi Artstein introduce en Artstein(1983) el concepto de *propiedad del control pequeño* (SCP):
Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se tiene la desigualdad $a(x) - b(x) \cdot u < 0$ para una u con $\|u\|_U < \epsilon$, siempre que $0 < \|x\|_{R^n} < \delta$. Dada una CLF para el sistema, podemos encontrar una ley de control globalmente estabilizante. De hecho, la existencia de una ley de control globalmente estabilizante es equivalente a la existencia de una CLF. Esto significa que por cada función de control globalmente estabilizante, puede encontrarse una correspondiente CLF, y viceversa. Esto se conoce como el teorema de Artstein, que enunciamos a continuación.

Teorema 1. Suponga que el CVS $U \subset R^m$ es convexo y el sistema (1) tiene parte derecha continua respecto a x y u. [i.e. la aplicación $(x, u) \mapsto f(x) + G(x)u$ es continua]. Entonces existe un control continuo $u : R^n \to U$ tal que (1) es GAS ssi existe una CLF $V(x, u)$ que satisface la SCP.

Una vez conocida una función Lyapunov de control para un sistema, el teorema de Artstein asegura la existencia de un estabilizador, no necesariamente explícito. Pero hay dos inconvenientes para aplicar este resultado:

1. No existen métodos generales para construir CLF.

2. La demostración del teorema de Artstein no es constructiva (éste usa particiones de la unidad). Por lo tanto, el problema que supone la síntesis del teorema de Artstein es muy difícil de resolver, incluso si tenemos una CLF apropiada.

Como consecuencia de los inconvenientes anteriores, se considera relevante el siguiente problema propuesto por Eduardo Sontag (ver Sontag et al.(2001)):

Encontrar fórmulas universales para la CLF-estabilización de sistemas con respecto a conjutos CVS generales (convexos) U.

Es decir, encontrar fórmulas de control casi-suaves de clase C^s $(s \geq 1)$, continua en R^n para tener la propiedad GAS del sistema con respecto a CVS U generales.

2.1 Antecedentes de CLF-estabilizadores restringidos

Aunque la prueba del teorema de Z. Artstein no es constructiva, ha habido una gran actividad en el diseño de controles de retroalimentación por medio de la teoría CLF para cada CVS U, los últimos trabajos siguen el siguiente método:
Dado un CVS $U \subset R^m$ estritamente convexo con $0 \in \operatorname{int}U$, para estabilizar el sistema (1) mediante una función CLF $V(x, u)$, en la literatura (ver Lin and Sontag(2004), Malisoff and Sontag(2000), Solis(2011)), predomina la propuesta de funciones $u(x)$ admisibles de la forma

$$u(x) = \rho(x)\,\overline{\omega}(x)$$

tal que se cumple la desigualdad

$$\frac{dV(x, u(x))}{dt} < 0, \quad \forall x \neq 0$$

donde $\overline{\omega}(x)$ es el control óptimo y $\rho(x) = \rho(a(x), b(x))$ es una función escalar de regularización.
En cambio, el resultado presentado en Leyva et al.(2013) con CVS la hipercaja, corresponde a un diseño vectorial de $\rho(x)$; tal que el control resultante es llamado *control descentralizado*. En general, existen dos clases de conjuntos $U \subset R^m$ convexos y acotados cuya estructura facial está bien estudiada: Conjuntos estrictamente convexos y Politopos. En la literatura predominan resultados para conjuntos estrictamente convexos como CVS.

2.2 La hipercaja como CVS

Consideremos como CVS a la hipercaja m-dimensional y **r**-ponderada:

$$U := [-r_1^-, r_1^+] \times \ldots \times [-r_m^-, r_m^+], \tag{7}$$

con $r_j^\pm \geq 0$, para $j = 1, \ldots, m$; tal que U es un conjunto convexo compacto con $0 \in U$. De manera que el control óptimo correspondiente a la hipercaja es dado por

$$\omega(b) = \left(r_1(b_1)\operatorname{sign} b_1, \ldots, r_m(b_m)\ \operatorname{sign} b_m\right)^\top, \tag{8}$$

donde

$$r_i(b_i) = \begin{cases} r_i^+ & \text{si} \quad b_i > 0, \\ r_i^- & \text{si} \quad b_i \leq 0. \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, m$, con $\omega(b)$ representando los vértices del rectángulo.

3. EL DISEÑO Y EL ALGORITMO

3.1 El diseño

A continuación proponemos funciones de control de forma descentralizada

$$u(x) := (u_1(x), \ldots, u_m(x))^\top, \text{ con } u_i(x) := \rho_i(x)\overline{\omega}_i(x), \tag{9}$$

para $i = 1, \ldots, m$, donde $\overline{\omega}(x)$ es la función de control definida por (5); $a(x)$ y $b(x)$ son definidas en (4), y $\rho(x) = (\rho_1(x), \ldots, \rho_m(x))$ es una *función vectorial de reescalamiento* por determinar.
Para garantizar la existencia de un control de retroalimentación *admisible* $u(x)$ de la forma (9), la función $\rho(x)$, $\rho : R^n \to R^m$ es una función regular, debe ser tal que el sistema a lazo cerrado resultante (1)-(9) es GAS.

(i) $\forall x \in R^n$, $0 \leq \rho_j(x) \leq 1$, para $j = 1, \ldots, m$.
(ii) $\rho_j(x) = 0$ *ssi* $x \in \mathcal{N}_j$, para $j = 1, \ldots, m$, y

Consideremos la familia (ver Leyva et al.(2013)) de controles de retroalimentación ε-parametrizada $(\varepsilon > 0)$ $u^\varepsilon(x) := (u_1^\varepsilon(x), \ldots, u_m^\varepsilon(x))$, con

$$u_j^\varepsilon(x) = \rho_j^\varepsilon(a(x), \beta(x))\,\overline{\omega}_j(x) \tag{10}$$

donde $\overline{\omega}(x)$ es el control óptimo dado por (8), $\rho_j^{\varepsilon} : R \times [0, \infty] \to R$ es definido por

$$\rho_j^{\varepsilon}(a, \beta) = \begin{cases} \varrho_j^{\varepsilon}(a, \beta) & \text{si } |b_j| r_j > 0, \\ 0, & \text{si } |b_j| r_j = 0, \end{cases} \tag{11}$$

donde $\varrho_j^{\varepsilon}(a, \beta) = 1 - \left(1 - \frac{|a|+a}{2\beta} \frac{|b_j| r_j}{\beta}\right) \exp(\tau_j^{\varepsilon} \frac{|b_j| r_j}{\beta})$

y $\tau_j^{\varepsilon}(x)$ es una función no positiva definida como

$$\tau_j^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} m \dfrac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \varepsilon |b_j| r_j, & \text{si } \beta > 0, \\ 0, & \text{si } \beta = 0, \end{cases} \tag{12}$$

para $j = 1, \ldots, m$, donde $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a(x)| + a(x))/\beta(x)$, $\beta(x) = b(x)\overline{\omega}(x)$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro de tono. El control (10) (referimos 10 en lugar de 10-11-12) es una función de control admisible que hace que el sistema (1) sea GAS.

Este diseño de control presenta una solución intermedia: Por un lado, permite utilizar casi todos los recursos disponibles de control debido a que puede tomar valores tan cerca como se desee de la frontera de la hipercaja y también se puede aplicar al caso de los controles positivos. Con el fin de demostrar la estabilidad GAS del sistema de lazo cerrado (1)-(10), en el siguiente lema definimos una función que es esencial para este propósito.

Teorema 2. (teorema 14 de Leyva et al.(2013)) Supongamos que el CVS es la hipercaja $U = [-r_1^-, r_1^+] \times \ldots \times [-r_m^-, r_m^+]$, con $r_i^- \geq 0$, $r_i^+ > 0$, $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (1) y los controles tomando valores en U] y satisface la propiedad SCP. Entonces $u^{\varepsilon}(x)$ dada por (10) es una fórmula de una ε-familia ($\varepsilon > 0$) de controles admisibles sub-óptimos que hacen al sistema (1) GAS.

3.2 El algoritmo

Dado un sistema afín (1), con parámetro de control u restringido al CVS dado por la hipercaja, presento un mínimo de pasos para obtener un estabilizador $u^{\varepsilon}(x)$ admisible (continuo) y con robustez del tipo *estabilidad robusta marginal.*

Paso 1. Dado un sistema afín (1) con el CVS $U := [-r_1^-, r_1^+] \times \ldots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset R^m$, $r_i^- \geq 0$, $r_i^+ > 0$, por determinar una función V candidata a CLF (válida en una vecindad Ω del origen $x = 0$, ó global si $\Omega = R^n$), de manera que calculamos las funciones definidas en (4):

$$a(x) := L_f V(x) \;\&\; b_i(x) := -L_{g_i} V(x), \; i = 1, \ldots, m,$$

así como la función

$$r_i(b_i) = \begin{cases} r_i^+ & \text{si} \quad b_i > 0, \\ r_i^- & \text{si} \quad b_i \leq 0. \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, m$; tal que ahora definimos la función no-negativa $\beta(x) := \sum_{i=1}^{m} |b_i(x)| r_i(b_i(x))$.

Paso 2. Las condiciones CLF y SCP establecidas en el teorema de Zvi Artstein pueden resumirse como sigue:

a) La condición CLF es equivalente a la desigualdad

$$a(x) < \beta(x), \; \forall x \neq 0.$$

b) Para tener la condición SCP es suficiente el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Paso 3. Una vez satisfechas las condiciones CLF y SCP procedemos a calcular las funciones $\lambda(x)$, $\tau_i^{\varepsilon}(x)$ para $i = 1, \ldots, m$,

$$\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a(x)| + a(x))/\beta(x)$$

$$\tau_i^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} m \dfrac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \varepsilon |b_i| r_i, & \text{si } \beta > 0, \\ 0, & \text{si } \beta = 0, \end{cases}$$

con tales funciones defininimos el control formulado en (10); que representa un estabilizador continuo para cualquier valor del parámetro $\varepsilon > 0$.

Ejemplo 1

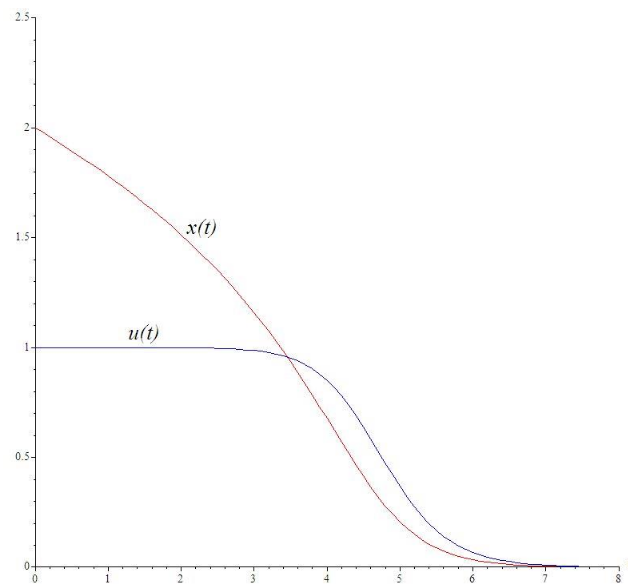

Fig. 1. Control positivo y continuo.

Consideremos el sistema con dos entradas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} - u_1 \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} - u_2 \end{aligned} \tag{13}$$

con $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$. Consideremos $V = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ como una candidata a CLF. Tal que

$$\begin{aligned} a(x, y) &:= L_f V = x \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) + y \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}, \\ b &:= (b_1, b_2), \quad b_1 = L_{g_1} V = -x, \quad b_2 = L_{g_2} V = -y. \end{aligned}$$

En este ejemplo, la desigualdad $a(x, y) < |x| r_1 + |y| r_2$ para toda $(x, y) \neq (0, 0)$, representa la condición CLF. de forma que al agregar el límite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{a(x, y)}{\beta(x, y)} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{a(x, y)}{|x| r_1 + |y| r_2} = 0,$$

implica que $V(x)$ es una CLF que satisface la propiedad SCP. De manera que el siguiente control de retroalimentación acotado, positivo y continuo estabiliza globalmente el sistema (13):

$$u_1^{\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} 1 - k_1(x,y), & \text{si} \quad x > 0, \\ 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

similarmente

$$u_2^{\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} 1 - k_2(x,y), & \text{si} \quad y > 0, \\ 0, & \text{si} \quad y \leq 0, \end{cases}$$

donde

$$k_i(x,y) = \lambda\,(a,b)^{\left(1+\frac{1}{\lambda(a,b)}\right)} \exp(-\varepsilon y),$$

con $\lambda(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left(|a| + a\right)/\beta$, $\varepsilon > 0$ es una constante y

$$r_1 = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad y > 0, \\ 0, & \text{si} \quad y \leq 0, \end{cases}$$

donde $\beta(x,y) = |b_1(x,y)|\, r_1 + |b_2(x,y)|\, r_2$.

4. SUBCONJUNTOS DE LA HIPERCAJA

Dado el sistema afin (1) con control $u = (u_1, ..., u_m)^T$ restringido al CVS representado por la hipercaja

$$U^+ := [-r_1^-, r_1^+] \times \ldots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset R^m,$$

con $r_i^- \geq 0$ y $r_i^+ > 0$, para $i = 1, \ldots, m$, que representa el caso de controles positivos. Dada una función norma, $\phi(u) := \|u\|$, tal que $\phi : U^+ \to R_+$, podemos definir el conjunto $U_\phi := \{u \in U^+ / \ \phi(u) \leq 1\}$ y considerarlo como un nuevo CVS, donde $U_\phi \subset U^+$. Podemos preguntarnos por los sistemas afines estabilizables con controles admisibles restringidos al CVS U_ϕ.

Por ejemplo, escogiendo $\phi(u) := \|u\|_T = \frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} + \cdots + \frac{u_m}{r_m}$, definimos el conjunto $U_T = \{u \in U^+ \subset R^m \ / \ \phi(u) \leq 1\}$ que representa un hipertetraedro contenido en la hipercaja positiva U^+.

Con base en el diseño de la función admisible y estabilizante $u_\varepsilon(x) = \rho(x)\overline{\omega}(x) \in U$, presentado en (9) para resolver el problema de estabilización de (1), definimos una función continua $v(x)$ restringido al conjunto U_ϕ, como sigue

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si } \ \phi(u_\varepsilon(x)) \leq 1 \\ \dfrac{1}{\phi(u_\varepsilon)} u_\varepsilon(x) & \text{si } \ \phi(u_\varepsilon(x)) \geq 1, \end{cases} \quad u_\varepsilon \in U. \tag{14}$$

de manera que $v \in U_\phi = \{u \in U^+ / \ \phi(u) \leq 1\}$, ya que $\phi(v) \leq 1$.

Semejante al sistema *(1),* consideremos el problema de estabilización del sistema

$$\dot{x} = \frac{1}{m} f(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x), \tag{15}$$

Proposición 3. Dado un sistema afin con las propiedades CLF y SCP en U, entonces el control $v(x)$, dado por (14) es admisible con CVS U_ϕ y el sistema retroalimentado $(14) - (15)$ es GAS.

Demostración. La continuidad de (14) es inmediata, ya que si $\phi(u) \leq 1$, entonces $v(x) = u(x)$. Si $\phi(u) > 1$, la función cociente $\dfrac{u_i(x)}{\phi(u(x))}$, $i = 1, ..., m$, es continua.

Sea $m > 0$, tal que $1 \leq \max\limits_{U} \phi(u) \leq m$; consideremos los casos

$$\begin{aligned} &0 \leq \phi(u) \leq 1 \quad \text{para } u \in U_\phi \\ \text{y} \quad &1 \leq \phi(u) \leq m \quad \text{para } u \in U \backslash U_\phi \end{aligned}$$

la segunda desigualdad implica que

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{\phi(u)} \leq 1,$$

de manera que al considerar

$$\dot{V} = a(x) + b_1(x)\, u_1(x) + \cdots + b_m(x)\, u_m(x) < 0,$$

para $u(x) \in U$y $x \neq 0$, tenemos que

$$\frac{\dot{V}}{\phi(u)} = \frac{a(x)}{\phi(u)} + \frac{b_1(x)\, u_1(x)}{\phi(u)} + \cdots + \frac{b_1(x)\, u_1(x)}{\phi(u)} < 0,$$

por lo tanto, para el caso $a(x) \geq 0$, tenemos que

$$\frac{a(x)}{m} + \frac{b_1(x)\, u_1(x)}{\phi(u)} + \cdots + \frac{b_1(x)\, u_1(x)}{\phi(u)} \leq \frac{\dot{V}}{\phi(u)} < 0,$$

por lo que tenemos la estabilidad global del sistema retroalimentado (14)-(15).

Observamos que para $u \in U$, con $\phi(u) \geq 1$, entonces

$$v = \frac{1}{\phi(u)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \partial U_T.$$

Para el caso $0 \in \partial U$ necesitamos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$; una vez que $u_\varepsilon(x)$ es continua, la continuidad de $v(x)$ es inmediata.

Ejemplo 2

Consideremos el problema de estabilizar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} - v_1 \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} - v_2 \end{aligned} \tag{16}$$

con control admisible v restringido al CVS representado por el politopo

$$U_T = \left\{u \in R_+^2 \ / \ \phi(u) \leq 1\right\},$$

donde

$$\phi(u) = \frac{u_1}{r_1^+} + \frac{u_2}{r_2^+} = u_1 + u_2.$$

Para resolver el problema anterior consideremos el sistema (16), donde presentamos la solución $u_\varepsilon(x) \in U^+ :=$

$\left[0, r_1^+\right] \times \left[0, r_2^+\right]$ al problema de estabilizar el sistema afin definido en el plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} - u_1 \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} - u_2 \end{aligned} \tag{17}$$

con restricción $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$. De manera que la función de retroalimentación

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si} \quad u_{\varepsilon 1} + u_{\varepsilon 2} \leq 1 \\ \dfrac{1}{u_{\varepsilon 1}(x) + u_{\varepsilon 2}(x)} u_\varepsilon(x) & \text{si} \quad u_{\varepsilon 1} + u_{\varepsilon 2} \geq 1 \end{cases},$$

es admisible ($v(x)$ es continuo y pertenece al triángulo U_T) tal que el sistema retroalimentado (16) con $v(x)$ es global asintóticamente estable. Observación. Para este ejemplo (16), podemos definir otro conjunto retricción:

$$U_S = \left\{ u \in R_+^2 \; / \; \phi_2(u) \leq 1 \right\},$$

donde $\phi_2(u) := u_1^2 + u_2^2$. Tal que para $\phi_2(u) \geq 1$, es decir $2 \geq \phi_2(u) \geq 1$, implica que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\phi_2(u)} \leq 1,$$

de manera que $U_T \subset U_S \subset U^+$. La función $\phi(u)$ que determina el nuevo CVS U_ϕ no necesariamente debe ser una norma.

5. CONCLUSIONES

Bajo las hipótesis clásicas de la teoría de funciones Lyapunov de control, describimos un algoritmo para obtener estabilizadores globales continuos para sistemas afines, con el objetivo de anular discontinuidades del control óptimo. Extendemos el resultado de síntesis de estabilizadores continuos a una familia de CVS que son subconjuntos de la hipercaja. Algunas características relevantes de estas funciones de control estabilizantes son: la continuidad respecto a la variable de estado x; representan controles descentralizados (regularizada por componente); son controles robustos (marginalmente estable) e incluye el caso $0 \in \partial U$, en particular el control positivo.