

Identificación de un edificio de cortante usando el método de variable instrumental

Antonio Concha * Rubén Garrido ** Luis Alvarez-Icaza ***,*

* *Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad de Colima,
Coquimatlán Colima 28400, México (e-mail: aconcha@uclm.mx)*

** *Departamento de Control Automático, Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 07360 Gustavo
A. Madero D.F, México (e-mail: garrido@ctrl.cinvestav.mx)*

*** *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
Coyoacán D.F. 04510, México (e-mail: alvar@pumas.iingen.unam.mx)*

Resumen: Se presenta un algoritmo de identificación que combina el método de Variable Instrumental (VI) con Filtros Integrales Lineales (FIL) para la estimación de los parámetros de un edificio de cortante excitado sísmicamente. El algoritmo propuesto emplea las mediciones de aceleración del terreno y de los pisos del edificio, las cuales están contaminadas por perturbaciones constantes y ruido de medición. Los instrumentos del método de VI se construyen empleando un modelo auxiliar de la estructura, el cual se estima previamente por el método de Mínimos Cuadrados (MC). Además, el algoritmo propuesto es capaz de estimar directamente el modelo en tiempo continuo de la estructura usando datos en tiempo discreto sin recurrir a transformaciones de tiempo continuo a discreto, y viceversa. Simulaciones numéricas en un edificio de cinco pisos muestran que el método de VI tiene mejor desempeño que el de MC.

Palabras clave: variable instrumental, Mínimos Cuadrados, edificio de cortante, mediciones de aceleración, filtros integrales lineales.

1. INTRODUCCIÓN

La identificación del modelo de un edificio de cortante ha sido un tópico de interés en las últimas décadas, ya que su estimación permite verificar la salud de la estructura y diseñar técnicas de control que atenúen vibraciones en la misma (Concha y Alvarez-Icaza, 2015). En la literatura se han propuesto varias técnicas de identificación que estiman el modelo de un edificio de cortante, algunas de las cuales se mencionan a continuación. Wang y Chen (2014); Mahato et al. (2015) presentan métodos de identificación que emplean las transformadas de Hilbert o de Hilbert-Huang, mientras que Huang y Su (2007); Tarinejad y Damadipour (2014) desarrollan técnicas de estimación basadas en ondeletas. Por otro lado, Juang et al. (1993); Vicario et al. (2015) calculan los parámetros de Markov de un filtro de Kalman, los cuales permiten obtener las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento de un edificio de cortante. Chu y Lo (2011) aplican una técnica de identificación paramétrica basada en el método de Mínimos Cuadrados con la finalidad de detectar daño estructural. Sin embargo, esta técnica no filtra el ruido de medición lo cual puede producir parámetros con sesgo. Zhang y Johnson (2014) proponen un método de identificación sub-estructural que divide un edificio de cortante en sub-estructuras. En Hoshiya y Saito (1984); Jiménez y Alvarez-Icaza (2007); Concha et al. (2016) se desarrollan observadores adaptables para estimar los parámetros, desplazamientos y velocidades de edificios de

cortante. Hoshiya y Saito (1984) presentan un observador adaptable que emplea el filtro extendido de Kalman, y los métodos estudiados en Jiménez y Alvarez-Icaza (2007); Concha et al. (2016) usan observadores adaptables basados en el método de Mínimos Cuadrados. La diferencia entre estas dos técnicas es que en Jiménez y Alvarez-Icaza (2007) el método de identificación paramétrica depende del algoritmo de estimación de estados, mientras que en Concha et al. (2016) no existe tal dependencia.

En este artículo se propone un algoritmo que combina el método de VI con FIL para la estimación de las relaciones amortiguamiento/masa y rigidez/masa del modelo de un edificio de cortante excitado mediante actividad sísmica. Los instrumentos del método de VI se construyen con base en un modelo auxiliar de la estructura, el cual se estima previamente por el método de MC. Entre más preciso sea el modelo auxiliar, mejor es el desempeño del método de VI. Se supone que las mediciones de aceleración empleadas para la estimación paramétrica están afectadas por ruido de medición y por perturbaciones constantes. El algoritmo propuesto tiene las siguientes características: 1) puede producir estimados consistentes (buenos) aún cuando la relación ruido-sígnal es muy alta, y (2) emplea los FIL con la finalidad de atenuar el ruido de medición y eliminar las perturbaciones constantes en tiempo finito. Simulaciones numéricas permiten verificar que el método de VI tiene un mejor desempeño que el método de MC y que es menos sensible a la selección del período de integración de los FIL que el método de MC.

* Autor corresponsal

El artículo está organizado como sigue. La Sección 2 muestra el modelo de un edificio de cortante. La Sección 3 presenta la parametrización de dicho modelo usando los FIL. La Sección 4 describe brevemente al método de MC que se compara con el método de VI, el cual se describe en la Sección 5. La Sección 6 muestra los resultados de simulaciones obtenidos con ambos métodos. Finalmente, la Sección 7 establece las conclusiones de este trabajo.

2. MODELO DE UN EDIFICIO DE CORTANTE

El modelo de un edificio de cortante de n grados de libertad está dado por (Chopra, 2001):

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\ddot{x}_g) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Estas matrices se definen como:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n) \text{ (kg)}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \text{ (Ns/m)}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

El término n es el número de pisos del edificio, y los parámetros c_i y k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son el amortiguamiento y rigidez entre el i -ésimo y el $(i - 1)$ -ésimo piso, respectivamente. Los componentes del vector $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T$ son los desplazamientos de cada piso, medidos con respecto a la base. Los vectores $\dot{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$ son respectivamente los vectores de velocidad y de aceleración. El término \ddot{x}_g representa la aceleración absoluta del terreno inducida por un evento sísmico, finalmente $\mathbf{l} = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in R^n$.

Supóngase lo siguiente:

1. Las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso están disponibles y están contaminadas por perturbaciones constantes y por ruido de medición, i.e:

$$\ddot{\mathbf{x}}_m = \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d} + \boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

$$\ddot{x}_{gm} = \ddot{x}_g + d_g + \xi_g \quad (3)$$

donde $\ddot{\mathbf{x}}_m = [\ddot{x}_{1m} \ \ddot{x}_{2m} \ \ddot{x}_{3m} \ \dots \ \ddot{x}_{nm}]^T$ es el vector de aceleraciones medidas, \ddot{x}_{gm} es la aceleración medida del terreno, $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_n]^T$ y d_g son perturbaciones constantes, $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \dots \ \xi_n]^T$ y ξ_g son ruidos de medición de tipo Gaussiano. En la práctica, las mediciones de los acelerómetros están contaminadas de esta manera (Lyshevski, 2001).

2. Las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, $\dot{\mathbf{x}}(0)$, $x_g(0)$ y $\dot{x}_g(0)$ son cero. Esta suposición es razonable porque el terreno y la estructura están en reposo antes de un sismo.

La expresión (1) es equivalente al siguiente modelo del edificio:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\ddot{x}_g = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (4)$$

Defínanse las siguientes parametrizaciones:

$$-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}}\boldsymbol{\Theta}_c, \quad -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{u}\boldsymbol{\Theta}_k \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\Theta}_c, \boldsymbol{\Theta}_k \in R^{2n-1}$ y $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \in R^{n \times 2n-1}$,

$$\boldsymbol{\Theta}_c = [\theta_{c1}, \theta_{c2}, \theta_{c3}, \theta_{c4}, \theta_{c5} \dots, \theta_{c(2n-1)}]^T$$

$$= \left[\frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_1}, \frac{c_2}{m_2}, \frac{c_3}{m_2}, \frac{c_3}{m_3}, \frac{c_4}{m_3}, \dots, \frac{c_n}{m_n} \right]^T \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_k = [\theta_{k1}, \theta_{k2}, \theta_{k3}, \theta_{k4}, \theta_{k5} \dots, \theta_{k(2n-1)}]^T$$

$$= \left[\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{k_3}{m_2}, \frac{k_3}{m_3}, \frac{k_4}{m_3}, \dots, \frac{k_n}{m_n} \right]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

El término $\dot{\mathbf{u}}$ es el primera derivada de \mathbf{u} con respecto del tiempo. Entonces, la expresión (4) es equivalente a:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\ddot{x}_g = \dot{\mathbf{u}}\boldsymbol{\Theta}_c + \mathbf{u}\boldsymbol{\Theta}_k \quad (9)$$

El modelo anterior será usado en la siguiente sección para obtener una parametrización basada sólo en mediciones de aceleración.

3. PARAMETRIZACIÓN DEL MODELO DEL EDIFICIO

El primer paso para obtener la parametrización del modelo del edificio consiste en aplicar la transformada Laplace al modelo (9)

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} + \mathbf{l}\mathcal{L}\{\ddot{x}_g\} = s\mathbf{U}(s)\boldsymbol{\Theta}_c + \mathbf{U}(s)\boldsymbol{\Theta}_k \quad (10)$$

donde $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}\}$ es la transformada de Laplace de \mathbf{u} , y s es la variable compleja de Laplace. Nótese que en la ecuación anterior, las señales $s\mathbf{U}(s)$ y $\mathbf{U}(s)$ que multiplican los vectores de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\Theta}_c$ y $\boldsymbol{\Theta}_k$ dependen de la posición y de las velocidades de los pisos, las cuales no están disponibles.

En el segundo paso se multiplica la ecuación (10) por s^3 para que el lado derecho de esta ecuación dependa sólo de aceleraciones. Esta operación es equivalente a aplicar la tercera derivada en el dominio del tiempo. Nótese que la segunda derivada de \mathbf{u} tiene la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}\} = s^2\mathbf{U}(s)$, y por lo tanto:

$$(\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} + \mathbf{l}\mathcal{L}\{\ddot{x}_g\})s^3 = \mathbf{U}(s)s^4\boldsymbol{\Theta}_c + \mathbf{U}(s)s^3\boldsymbol{\Theta}_k$$

$$= \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}\}s^2\boldsymbol{\Theta}_c + \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}\}s\boldsymbol{\Theta}_k \quad (11)$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{u}} = - \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddot{x}_n - \ddot{x}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Substituyendo (2) en (12) produce la siguiente relación

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_m - \mathbf{D} - \boldsymbol{\sigma} \quad (13)$$

El término $\ddot{\mathbf{u}}_m$ corresponde a las mediciones de aceleración y tiene la misma estructura que $\ddot{\mathbf{u}}$. Las definiciones de \mathbf{D} y $\boldsymbol{\sigma}$ son las siguientes:

$$\mathbf{D} = - \begin{bmatrix} d_1 & d_1 - d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 & d_2 - d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n - d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = - \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 - \xi_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_2 - \xi_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_n - \xi_{n-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

La transformada de Laplace de (13) está dada por:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}\} = \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}_m\} - \frac{1}{s}\mathbf{D} - \boldsymbol{\Sigma}(s) \quad (16)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}(s) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{\sigma}\}$. Por otro lado, las transformadas de Laplace $\ddot{\mathbf{x}}$ y \ddot{x}_g en (2) y (3) son iguales a:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} = \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}_m\} - \frac{1}{s}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Xi}(s), \quad (17)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}_g\} = \mathcal{L}\{\ddot{x}_{gm}\} - \frac{1}{s}d_g - \Xi_g(s)$$

con $\boldsymbol{\Xi}(s) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{\xi}\}$ y $\Xi_g(s) = \mathcal{L}\{\xi_g\}$. Sustituyendo (16) y (17) en (11) resulta:

$$\mathbf{Z}(s)s^3 = \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}_m\}s^2\boldsymbol{\Theta}_c + \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{u}}_m\}s\boldsymbol{\Theta}_k + \mathbf{R}(s) + \boldsymbol{\Lambda}(s) \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{Z}(s) = \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}_m\} + \mathbf{1}\mathcal{L}\{\ddot{x}_{gm}\} \quad (19)$$

$$\mathbf{R}(s) = -\mathbf{D}(s\boldsymbol{\Theta}_c + \boldsymbol{\Theta}_k) + (\mathbf{D} + \mathbf{1}d_g)s^2 \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = -\boldsymbol{\Sigma}(s)(s^2\boldsymbol{\Theta}_c + s\boldsymbol{\Theta}_k) + (\boldsymbol{\Xi}(s) + \mathbf{1}\Xi_g(s))s^3 \quad (21)$$

Defínense las siguientes expresiones en el dominio del tiempo:

$$\mathbf{z}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Z}(s)\}, \quad \mathbf{r}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{R}(s)\}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Lambda}(s)\} \quad (22)$$

El término $\mathbf{R}(s)$ en (20) depende de perturbaciones constantes y $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ en (21) depende de ruido de medición. Las definiciones en (22) permiten escribir (18) como:

$$\mathbf{z}^{(3)} = \mathbf{u}_m^{(4)}\boldsymbol{\Theta}_c + \mathbf{u}_m^{(3)}\boldsymbol{\Theta}_k + \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (23)$$

donde el superíndice representa la i -ésima derivada en el tiempo de la variable correspondiente. Nótese que la parametrización (23) es lineal en los parámetros desconocidos $\boldsymbol{\Theta}_c$ y $\boldsymbol{\Theta}_k$. Sin embargo, esta parametrización no se puede emplear para propósitos de identificación porque los términos $\mathbf{u}_m^{(4)}$, $\mathbf{u}_m^{(3)}$, y $\mathbf{z}^{(3)}$ dependen de las derivadas en el tiempo de las mediciones de aceleración, las cuales no están disponibles. Para evitar este problema se aplican los FIL a la ecuación (23) como se describe a continuación.

La siguiente expresión define un filtro integral lineal aplicado a la señal $\rho(t)$

$$I_n[\rho(t)] = \frac{\rho}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} \rho(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (24)$$

cuya transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{I_n[\rho(t)]\} = \rho \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^n \mathcal{L}\{\rho(t)\} \quad (25)$$

El término $\rho > 0$ es una constante y δ es el período de integración dado por $\delta = hT_s$, donde $h > 0$ se denomina factor de longitud y T_s es el período de muestreo de $\rho(t)$.

En el tercer paso se aplica el filtro integral lineal $I_5[\cdot]$ a ambos lados de (23) resultando:

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \phi_c(t)\boldsymbol{\Theta}_c + \phi_k(t)\boldsymbol{\Theta}_k + I_5[\mathbf{r}(t)] + I_5[\boldsymbol{\lambda}(t)] \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{\rho}{\delta^3} I_2 \left[\sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j \mathbf{z}(t - j\delta) \right] \quad (27)$$

$$\phi_c(t) = \frac{\rho}{\delta^2} I_3 \left[\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{\mathbf{u}}_m(t - j\delta) \right] \quad (28)$$

$$\phi_k(t) = \frac{\rho}{\delta} I_4 \left[\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \ddot{\mathbf{u}}_m(t - j\delta) \right] \quad (29)$$

donde $\boldsymbol{\chi} \in R^n$, $\phi_c, \phi_k \in R^{n \times 2n-1}$ y $\binom{n}{j}$ es el coeficiente binomial.

La integración desarrollada previamente produce las señales $\boldsymbol{\chi}(t)$, $\phi_c(t)$, y $\phi_k(t)$ construidas con $\mathbf{z}(t)$ y $\ddot{\mathbf{u}}_m(t)$, las cuales sólo dependen de mediciones de aceleración.

Proposición 3.1. El término $I_5[\mathbf{r}(t)]$ es cero para $t \geq 5\delta$, lo cual significa que los FIL eliminan las perturbaciones constantes en tiempo finito.

Prueba Véase en Concha et al. (2016).

La transformada de Laplace de $I_5[\boldsymbol{\lambda}(t)]$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{I_5[\boldsymbol{\lambda}(t)]\} = -\boldsymbol{\Sigma}(s)H_2(s)\boldsymbol{\Theta}_c - \boldsymbol{\Sigma}(s)H_1(s)\boldsymbol{\Theta}_k + (\boldsymbol{\Xi}(s) + \mathbf{1}\Xi_g(s))H_3(s) \quad (30)$$

$$H_1(s) = s\rho G(s), \quad H_2(s) = s^2\rho G(s), \quad H_3(s) = s^3\rho G(s) \quad (31)$$

donde $G(s)$ es el siguiente filtro de quinto orden:

$$G(s) = \left(\frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta s} \right)^5 \quad (32)$$

cuya magnitud está dada por:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_c)}{(\pi\omega/\omega_c)} \right|^5, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{\delta}, \quad f_c = \frac{1}{\delta} \quad (33)$$

El término ω_c en rad/s determina el ancho de banda del filtro $G(s)$. Esta frecuencia en Hz está dada por f_c .

De acuerdo a la ecuación (30), la señal $\boldsymbol{\lambda}(t)$ asociada al ruido de medición se filtra mediante $H_1(s)$, $H_2(s)$ y $H_3(s)$. Una regla para diseñar el parámetro δ de estos filtros es seleccionar la frecuencia $\omega_c = 2\pi/\delta$ en rad/s de manera que tome un valor de entre 2 y 5 veces la frecuencia máxima de la estructura. El parámetro ρ usualmente se selecciona igual a δ .

Usando la **Proposición 3.1** es posible reescribir (26) como:

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \phi(t)\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\mu}(t), \quad t \geq 5\delta \quad (34)$$

donde $\boldsymbol{\mu}(t) = I_5[\boldsymbol{\lambda}(t)]$ y

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [\phi_c(t) \quad \phi_k(t)] \in R^{n \times (4n-2)}, \\ \boldsymbol{\Theta} &= [\boldsymbol{\Theta}_k \quad \boldsymbol{\Theta}_c]^T \in R^{(4n-2) \times 1} \end{aligned} \quad (35)$$

Para aplicar los algoritmos de MC y VI es necesario considerar una versión en tiempo discreto de la parametrización (34). Defínase $t = kT_s$, $t \geq 5\delta$; $k = 0, 1, 2, \dots$, donde T_s es el período de muestreo. Esta definición permite escribir (34) como:

$$\boldsymbol{\chi}(kT_s) = \phi(kT_s)\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\mu}(kT_s), \quad kT_s \geq 5\delta \quad (36)$$

Omitiendo el período de muestreo finalmente resulta:

$$\chi(k) = \phi(k)\Theta + \mu(k), \quad k \geq 5\delta/T_s \quad (37)$$

4. ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS

La parametrización (37) permite emplear el método de MC (Söderström y Stoica, 1989), cuyo estimado está dado por:

$$\hat{\Theta}_N^{LS} = \left[\sum_{k=1}^N \phi^T(k)\phi(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \phi^T(k)\chi(k) \quad (38)$$

El término N es el número de muestras de las variables ϕ y χ . Nótese que el término $\mu(k)$ (37) no es ruido Gaussiano pues $\mu(k)$ se obtiene al filtrar este tipo de ruido. Por lo tanto, el método de MC proporcionará estimados con sesgo. Para relaciones señal/ruido favorables el método de MC proporciona buenos resultados. Esto significa que los parámetros estimados por este método se encontrarán cercanos a los parámetros nominales de la estructura.

5. MÉTODO DE VARIABLE INSTRUMENTAL

Es bien conocido que el algoritmo de MC proporciona estimados con sesgo si el ruido de medición no es Gaussiano. Entre mayor sea la relación señal-ruido, menor será el sesgo en los estimados, y viceversa. Una solución para el problema de estimaciones con sesgo del MC es el uso del método de VI, el cual no requiere conocimiento a priori de la estadística del ruido (Young, 1970). Para obtener estimados consistentes, la variable instrumental η tiene que estar altamente correlacionada con el regresor ϕ , pero no debe tener correlación con el término μ que depende del ruido. En esta sección se presenta el método de VI, el cual emplea una variable instrumental η que se construye de un modelo auxiliar del edificio.

El método de VI consiste de dos pasos; en el primero se calculan las matrices $(\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}})^{LS}$ y $(\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}})^{LS}$ usando los componentes del vector $\hat{\Theta}_N^{LS}$ dado en (38). En el segundo paso, se obtiene el vector $\hat{\mathbf{x}}_*$ de aceleración de los pisos del siguiente modelo auxiliar del edificio

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{x}}_*(t) + \mathbf{l}\ddot{x}_{gmf}(t)) = & - \left(\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}} \right)^{LS} \hat{\mathbf{x}}_*(t) \\ & - \left(\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} \right)^{LS} \mathbf{x}_*(t) \end{aligned} \quad (39)$$

donde \ddot{x}_{gmf} es la señal de excitación del modelo, la cual se genera mediante el filtrado de la aceleración de la base \ddot{x}_{gm} del edificio, es decir,

$$\ddot{x}_{gmf}(t) = \mathcal{L}^{-1}[B(s)] * \ddot{x}_{gm}(t) \quad (40)$$

El operador $*$ y la función de transferencia $B(s)$ denotan respectivamente al operador de convolución y a un filtro pasa bajas Butterworth de cuarto orden. Su frecuencia de corte es 25 Hz, debido a que el contenido frecuencial predominante de los sismos se encuentra entre 1 y 20 Hz (Kayal, 2008).

Nótese que el modelo auxiliar (39) tiene la misma estructura que el modelo del edificio (4). Las muestras de $\hat{\mathbf{x}}_*$ son empleadas para construir una matriz $\hat{\mathbf{u}}_*$, la cual tiene la misma estructura que $\hat{\mathbf{u}}$ en (12). La matriz $\hat{\mathbf{u}}_*$ permite definir la siguiente variable instrumental

$$\eta(t) = [\eta_c(t), \eta_k(t)] \quad (41)$$

$$\eta_c(t) = \frac{\rho}{\delta^2} I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \hat{\mathbf{u}}_*(t - j\delta) \right\} \quad (42)$$

$$\eta_k(t) = \frac{\rho}{\delta} I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \hat{\mathbf{u}}_*(t - j\delta) \right\} \quad (43)$$

La variable η se obtiene mediante una parametrización del modelo auxiliar (39) usando el procedimiento descrito en la Sección 3 que se emplea para obtener el vector regresor $\phi(t)$ en (35). Además, este procedimiento elimina la perturbación constante de \ddot{x}_{gmf} en el tiempo $t = 5\delta$ s (véase **Proposición 3.1**). Nótese que la correlación entre $\eta(t)$ y $\mu(t)$ se reduce significativamente pues $\eta(t)$ depende de señales de aceleración proporcionadas por el modelo auxiliar (39), las cuales son un estimado de las aceleraciones del modelo del edificio (4) que está libre de ruido.

Los parámetros estimados por el método de VI se obtienen al resolver la siguiente expresión (Söderström y Stoica, 1989):

$$\hat{\Theta}_N^{IV} = \left[\sum_{k=1}^N \eta^T(k)\phi(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \eta^T(k)\chi(k) \quad (44)$$

5.1 Estimación de los parámetros modales

Una vez que las matrices $[\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}}]^{IV}$ y $[\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}}]^{IV}$ se han estimado es posible emplear los métodos de MC y VI para calcular los parámetros modales de la estructura. Las frecuencias naturales y el amortiguamiento modal del edificio se obtienen por medio de las raíces del siguiente polinomio característico correspondiente al modelo (4)

$$\mathcal{I}_{n \times n} s^2 + [\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}}]^{IV} s + [\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}}]^{IV} = \mathbf{O}_{n \times n} \quad (45)$$

Los términos $\mathcal{I}_{n \times n}$ y $\mathbf{O}_{n \times n}$ son las matrices identidad y cero de tamaños $n \times n$, respectivamente. Las raíces del polinomio (45) están dadas por:

$$\gamma_i = -\hat{\alpha}_i + j\hat{\omega}_{di}, \quad \gamma_i^* = -\hat{\alpha}_i - j\hat{\omega}_{di}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i, \quad \hat{\omega}_{di} = \hat{\omega}_i \sqrt{1 - \hat{\zeta}_i^2} \quad (47)$$

donde $\hat{\omega}_i$ y $\hat{\zeta}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ son las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento estimados, respectivamente. Estos parámetros se calculan como:

$$\hat{\omega}_i = \sqrt{\hat{\alpha}_i^2 + \hat{\omega}_{di}^2}, \quad \hat{\zeta}_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

Por otro lado, la matriz de formas modales estimada de la estructura se obtiene a partir de los vectores propios de la matriz $[\widehat{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}}]^{IV}$.

6. SIMULACIONES NUMÉRICAS

El desempeño del algoritmo propuesto se evalúa por medio de la simulación numérica de un edificio de cinco pisos. Tanto el método de MC como el de VI se programaron usando el programa Matlab/Simulink. Todas las simulaciones emplean un período de muestreo de $T_s = 0.002$ s. El método de integración trapezoidal permite evaluar las integrales de las variables χ , ϕ_c , ϕ_k , η_c , y η_k mostradas en (27), (28), (29), (42), y (43), respectivamente. Para la

simulaciones se emplearon los siguientes parámetros del modelo del edificio:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(10, 10, 10, 10, 10, 10) \text{ (kg)}$$

$$\mathbf{K} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 2.42 & -1.21 & 0 & 0 & 0 \\ -1.21 & 2.42 & -1.21 & 0 & 0 \\ 0 & -1.21 & 2.42 & -1.21 & 0 \\ 0 & 0 & -1.21 & 2.42 & -1.21 \\ 0 & 0 & 0 & -1.21 & 1.21 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

$$\mathbf{C} = 1 \times 10^{-2} \mathbf{K} \text{ (Ns/m)}$$

Los vectores Θ_c y Θ_k obtenidos con estas matrices están dados por:

$$\Theta_c = 12.1 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$$

$$\Theta_k = 12.1 \times 10^2 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T \quad (49)$$

donde las unidades de Θ_c y Θ_k son N·s/(kg·m) y N/(kg·m), respectivamente. Las cinco frecuencias naturales del edificio son $\omega_1=9.9$ rad/s (1.57 Hz), $\omega_2=28.9$ rad/s (4.59 Hz), $\omega_3=45.55$ rad/s (7.25 Hz), $\omega_4=58.52$ rad/s (9.31 Hz), y $\omega_5=66.75$ rad/s (10.62 Hz). Las variables χ , ϕ_c , ϕ_k , ζ_c , y ζ_k se calculan sobre una ventana de longitud $\delta = lT_s=0.05s$, donde $l = 25$. Además, ρ es igual a δ . La componente Norte-Sur de la aceleración del sismo El Centro (California, 1940) excita al edificio. Las mediciones de aceleración de los pisos $\ddot{\mathbf{x}}_m = [\ddot{x}_{1m}, \ddot{x}_{2m}, \ddot{x}_{3m}, \ddot{x}_{4m}, \ddot{x}_{5m}]^T$ y del terreno \ddot{x}_{gm} se contaminan con las perturbaciones constantes $\mathbf{d} = [0.175, 0.2, 0.1, -0.175, -0.2]^T$ y $d_g=-0.2$, respectivamente. Además, se agregan los ruidos Gaussianos ξ_g y ξ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ a las señales \ddot{x}_{gm} y \ddot{x}_{im} , $i = 1, 2, \dots, 5$, respectivamente. Estos ruidos son de media cero y sus varianzas se ajustan para obtener la siguiente relación ruido señal (RRS) dada por

$$\text{RRS} = \frac{\text{DS de } \xi_j}{\text{DS de } \ddot{x}_j}, \quad j = g, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (50)$$

donde DS denota desviación estándar, y \ddot{x}_j , $j = g, 1, 2, 3, 4, 5$ son las aceleraciones nominales sin ruidos ni perturbaciones constantes.

Las Tablas 1 y 2 muestran los parámetros estimados por los algoritmos de MC y de VI cuando la RRS es igual a 5% y a 20%, respectivamente. El número de muestras N empleado por ambos algoritmos es $N = 7375$ y éstas son obtenidas durante el intervalo 5δ a 15s. La Fig. 1 presenta la aceleración medida \ddot{x}_{5m} del quinto piso para la RRS=20%.

Defínase el error e_i de identificación en porcentaje (%) para las frecuencias naturales estimadas $\hat{\omega}_i$ como:

$$e_i(\%) = \frac{|\hat{\omega}_i - \omega_i|}{\omega_i} \times 100, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (51)$$

El siguiente índice de desempeño E mide la calidad del modelo identificado al tomar en cuenta todos los errores de identificación e_i , es decir,

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (52)$$

Se considera que entre menor sea el valor de E , mejor es la calidad del modelo.

La Tablas 3 y 4 presentan las frecuencias naturales estimadas por ambos algoritmos cuando la RRS es 5%

y 20%, respectivamente. Estos resultados muestran que el método de VI tiene mejor desempeño que el de MC, y que el índice E es mayor conforme la RRS se incrementa.

La Fig. 2 muestra la calidad del modelo E obtenida con los métodos de MC y VI cuando δ varía de $\delta \in [0.02, 0.09]$ s y la RRS es igual a RRS=5%. Con base en esta Figura, es posible concluir que para un dado valor de δ , la calidad del modelo estimado por el método de VI es mejor que la calidad del modelo producido por el MC. Además, el método de VI es menos sensible al parámetro δ que el algoritmo de MC. Esto se debe a que el método de VI es más robusto al filtrado de datos que el método de MC (Janot et al., 2014).

Tabla 1. Parámetros estimados cuando la RRS es 5%.

	Real	MC	VI		Real	MC	VI
$\hat{\theta}_{c1}$	12.10	12.16	12.16	$\frac{\hat{\theta}_{k1}}{100}$	12.10	12.02	12.10
$\hat{\theta}_{c2}$	12.10	11.74	11.96	$\frac{\hat{\theta}_{k2}}{100}$	12.10	12.02	12.10
$\hat{\theta}_{c3}$	12.10	12.13	12.07	$\frac{\hat{\theta}_{k3}}{100}$	12.10	11.88	12.07
$\hat{\theta}_{c4}$	12.10	11.55	12.14	$\frac{\hat{\theta}_{k4}}{100}$	12.10	11.88	12.07
$\hat{\theta}_{c5}$	12.10	13.06	12.70	$\frac{\hat{\theta}_{k5}}{100}$	12.10	11.54	12.00
$\hat{\theta}_{c6}$	12.10	11.99	12.55	$\frac{\hat{\theta}_{k6}}{100}$	12.10	11.51	12.00
$\hat{\theta}_{c7}$	12.10	9.98	12.00	$\frac{\hat{\theta}_{k7}}{100}$	12.10	10.14	12.00
$\hat{\theta}_{c8}$	12.10	7.71	11.89	$\frac{\hat{\theta}_{k8}}{100}$	12.10	9.37	11.90
$\hat{\theta}_{c9}$	12.10	11.62	11.85	$\frac{\hat{\theta}_{k9}}{100}$	12.10	12.08	12.14

Tabla 2. Parámetros estimados cuando la RRS es 20%.

	Real	MC	VI		Real	MC	VI
$\hat{\theta}_{c1}$	12.10	11.98	11.96	$\frac{\hat{\theta}_{k1}}{100}$	12.10	12.11	12.23
$\hat{\theta}_{c2}$	12.10	11.71	12.23	$\frac{\hat{\theta}_{k2}}{100}$	12.10	12.08	12.30
$\hat{\theta}_{c3}$	12.10	12.71	11.87	$\frac{\hat{\theta}_{k3}}{100}$	12.10	10.74	11.90
$\hat{\theta}_{c4}$	12.10	7.94	12.05	$\frac{\hat{\theta}_{k4}}{100}$	12.10	10.68	12.05
$\hat{\theta}_{c5}$	12.10	14.63	13.50	$\frac{\hat{\theta}_{k5}}{100}$	12.10	6.99	11.69
$\hat{\theta}_{c6}$	12.10	5.58	12.99	$\frac{\hat{\theta}_{k6}}{100}$	12.10	6.84	11.68
$\hat{\theta}_{c7}$	12.10	4.04	14.70	$\frac{\hat{\theta}_{k7}}{100}$	12.10	11.59	11.56
$\hat{\theta}_{c8}$	12.10	3.17	15.10	$\frac{\hat{\theta}_{k8}}{100}$	12.10	11.75	11.03
$\hat{\theta}_{c9}$	12.10	11.00	11.35	$\frac{\hat{\theta}_{k9}}{100}$	12.10	12.32	12.22

7. CONCLUSIONES

Se presentó un método de VI para estimar los parámetros del modelo en tiempo continuo de un edificio de cortante excitado sísmicamente. El método de VI estima los parámetros de la estructura usando una parametrización basada en FIL, los cuales atenúan el efecto del ruido de medición y eliminan las perturbaciones constantes sin importar la magnitud de éstas. Se realizaron simulaciones

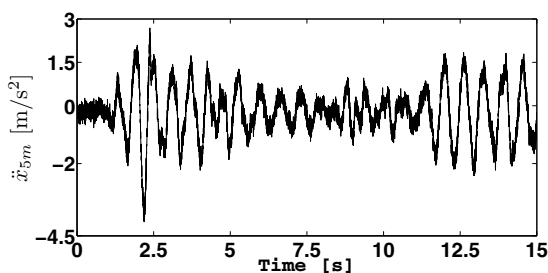
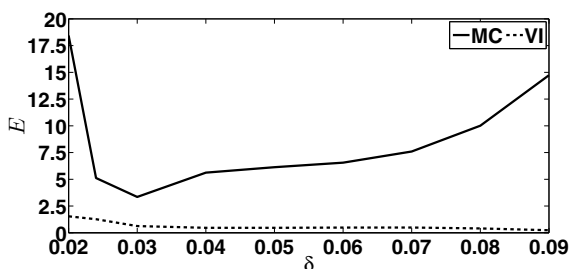
Tabla 3. Frecuencias naturales estimadas cuando RRS es 5%.

Frecuencia natural (rad/s)	MC	Error (%)	VI	Error (%)
$\omega_1=9.90$	9.69	$e_1=2.15$	9.89	$e_1=0.02$
$\omega_2=28.90$	28.72	$e_2=0.63$	28.89	$e_2=0.17$
$\omega_3=45.55$	44.42	$e_3=2.47$	45.46	$e_3=0.21$
$\omega_4=55.52$	55.97	$e_4=4.37$	58.37	$e_4=0.26$
$\omega_5=66.75$	64.96	$e_5=2.69$	66.55	$e_5=0.30$
		$E=6.13$		$E=0.46$

Tabla 4. Frecuencias naturales estimadas cuando RRS es 20%.

Frecuencia natural (rad/s)	MC	Error (%)	VI	Error (%)
$\omega_1=9.90$	9.18	$e_1=7.30$	9.84	$e_1=0.63$
$\omega_2=28.90$	27.33	$e_2=5.45$	28.91	$e_2=0.03$
$\omega_3=45.55$	41.31	$e_3=9.33$	45.21	$e_3=0.76$
$\omega_4=58.52$	57.12	$e_4=2.40$	57.81	$e_4=1.22$
$\omega_5=66.75$	60.91	$e_5=8.75$	65.93	$e_5=1.23$
		$E=15.89$		$E=1.99$

numéricas en una estructura de cinco pisos, las cuales permitieron comparar los resultados obtenidos por el método de VI con los producidos por el algoritmo de MC. Estas simulaciones demostraron que la calidad del modelo estimado por el método de VI es mejor que la calidad del modelo obtenido por el método de MC. Aún cuando la RRS es de 20%, los parámetros estimados por el método de VI se encuentran cerca de los parámetros reales de la estructura. Los resultados de simulación mostraron que el método de VI es menos sensible al período de integración δ de los FIL que el algoritmo de MC. El desempeño observado motiva la realización de futuras pruebas experimentales, donde se podrían emplear acelerómetros no tan precisos debido a la robustez del método de VI ante ruido de medición.


 Figura 1. \ddot{x}_{5m} .

 Figura 2. E vs δ .

REFERENCIAS

- Chopra, A. (2001). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Chu, S. y Lo, S. (2011). Application of the on-line recursive least-squares method to perform structural damage assessment. *Structural Control and Health Monitoring*, 18(3), 241–264.
- Concha, A. y Alvarez-Icaza, L. (2015). Identificación de edificios acoplados torsionalmente usando una parametrización vectorial y filtros integrales lineales. En *Congreso Nacional de Control Automático, Cuernavaca, Morelos*.
- Concha, A., Alvarez-Icaza, L., y Garrido, R. (2016). Simultaneous parameter and state estimation of shear buildings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70, 788–810.
- Hoshiya, M. y Saito, E. (1984). Structural identification by extended Kalman filter. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(12), 1757–1770.
- Huang, C.S. y Su, W.C. (2007). Identification of modal parameters of a time invariant linear system by continuous wavelet transformation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(4), 1642–1664.
- Janot, A., Vandanjon, P.O., y Gautier, M. (2014). An instrumental variable approach for rigid industrial robots identification. *Control Engineering Practice*, 25, 85–101.
- Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2007). A real-time estimation scheme for buildings with intelligent dissipation devices. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6), 2427–2440.
- Juang, J.N., Phan, M., Horta, L.G., y Longman, R.W. (1993). Identification of observer/Kalman filter Markov parameters-theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2), 320–329.
- Kayal, J.R. (2008). *Microearthquake Seismology and Seismotectonics of South Asia*. Springer, Dordrecht.
- Lyshevski, S.E. (2001). *Nano- and microelectromechanical systems: fundamentals of nano- and microengineering*. CRC Press, Boca Raton.
- Mahato, S., Teja, M.V., y Chakraborty, A. (2015). Adaptive HHT (AHHT) based modal parameter estimation from limited measurements of an RC-framed building under multi-component earthquake excitations. *Structural Control and Health Monitoring*, 22(7), 984–1001.
- Söderström, T. y Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall, New York.
- Tarinejad, R. y Damadipour, M. (2014). Modal identification of structures by a novel approach based on FDD-wavelet method. *Journal of Sound and Vibration*, 333(3), 1024–1045.
- Vicario, F., Phan, M.Q., Betti, R., y Longman, R.W. (2015). Output-only observer/Kalman filter identification (O³KID). *Structural Control and Health Monitoring*, 22(5), 847–872.
- Wang, Z. y Chen, G. (2014). Analytical mode decomposition with Hilbert transform for modal parameter identification of buildings under ambient vibration. *Engineering Structures*, 59, 173–184.
- Young, P.C. (1970). An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6(2), 271–287.

Zhang, D. y Johnson, E.A. (2014). Controlled loop substructure identification for shear structures. *Structural Control and Health Monitoring*, 21(6), 979–995.