

Control Fraccionario para un Péndulo Invertido ^{*}

Martínez-Alonso, Eder S. ^{*} González-Olvera, Marcos A. ^{**}

^{*} Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Colegio de Ciencia y Tecnología, Plantel San Lorenzo Tezonco. Ciudad de México, México
(eder.martinez@estudiante.uacm.edu.mx)

^{**} Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Colegio de Ciencia y Tecnología, Plantel San Lorenzo Tezonco. Ciudad de México, México
(marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx)

Resumen. En este trabajo se presenta el desarrollo de un controlador con términos integral y derivativo de orden fraccionario para un péndulo invertido basado en realimentación de las variables de estado, para estabilizar al sistema en torno de un punto de equilibrio inestable. Se presenta una panorámica de los fundamentos del cálculo fraccionario y su empleo en controladores tipo $PI^\alpha D^\lambda$ e $I^\alpha - PD^\lambda$. Además, se muestran resultados en simulación y experimentales para demostrar la efectividad y robustez del controlador propuesto.

Keywords: Control fraccionario, péndulo invertido, cálculo fraccionario.

1. INTRODUCCIÓN

A pesar de que la idea del cálculo fraccionario es tan antigua como la idea del cálculo diferencial de orden entero, ha sido en las últimas décadas cuando el uso de la teoría del cálculo fraccionario ha llegado a ser más popular entre muchos campos de investigación. El cálculo fraccionario generaliza el concepto de derivada fraccionaria $D^\alpha[f(x)]$ a valores no enteros de α y se remonta a principios de la teoría del cálculo diferencial. De hecho, Leibniz, en sus correspondencia con Bernoulli, L'Hopital y Wallis tuvo varias notas sobre el cálculo de la derivada de orden 0.5 ($D^{0.5}[f(x)]$). Sin embargo, el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario se debe a la contribución de muchos matemáticos como Euler, Liouville, Riemann y Letnikov. En la literatura [Caponetto et al. (2010); Shantanu (2011)] constituyen una rica fuente de referencias sobre el cálculo de orden fraccionario.

En teoría de control, varios autores se han interesado por este aspecto. Las primeras contribuciones [Axtell et al. (1990)] dan la generalización del análisis clásico para sistemas de orden fraccionario, posterior a esta contribución, un gran número de trabajos de investigación fueron publicados en el área de control [Bettayeb et al. (2014)].

Los sistemas de control pueden incluir tanto al sistema de orden fraccionario como al controlador de orden fraccionario. En aplicaciones, se suele emplear al control fraccionario sobre sistemas modelados con derivadas enteras, de modo que se exploten las propiedades de sistemas fraccionales. Esto es debido al hecho de que el modelo de la planta puede obtenerse como un modelo de orden entero en el sentido clásico, ya que, para la identificación

de sistemas dinámicos de orden fraccionario se utilizan una variedad de métodos numéricos para calcular las derivadas e integrales fraccionales, desde redes neuronales, métodos evolutivos o la combinación de varios de ellos.

Algunos trabajos previos han analizado a los sistemas fraccionarios y el control de los mismos. Por ejemplo, en [Bettayeb et al. (2014)] se presenta una estrategia de control de estados de orden fraccionario para sistemas de orden entero, basada en la transformación del sistema de ecuaciones de orden entero, en un conjunto de ecuaciones de orden fraccionario mediante el uso de sistema canónico. Igualmente, se han propuesto estrategias de control para sistemas de orden fraccionario empleando controladores de la misma naturaleza Machado et al. (2008).

En este trabajo se muestra el diseño de un controlador $PI^\alpha D^\lambda$ e $I^\alpha - PD^\lambda$ para estabilizar un péndulo invertido en su punto de equilibrio inestable. Dado que al estabilizar el péndulo se espera que las variaciones en el ángulo sean pequeñas, se utilizó un modelo linealizado del sistema para simplificar el diseño del control que lo estabilizará. Además se presenta la aplicación del controlador en una plataforma física, mostrando resultados tanto en simulación como experimentales. En la sección II se describe el sistema y sus ecuaciones dinámicas empleadas analizando en la sección III el control fraccionario empleado para su control. En la sección IV se muestran resultados en simulación y experimentales mostrando su efectividad y robustez ante perturbaciones. Por último, en la sección V se presentan conclusiones finales.

2. PÉNDULO INVERTIDO

El sistema físico conocido como péndulo invertido, mostrado en la Fig. 1, es uno de los problemas clásicos de la teoría de control debido a que es un sistema que presenta dinámicas y características que permiten explorar diversas

^{*} Los autores desean expresar su agradecimiento por su apoyo a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México mediante el proyecto UACM-PI2014-65.

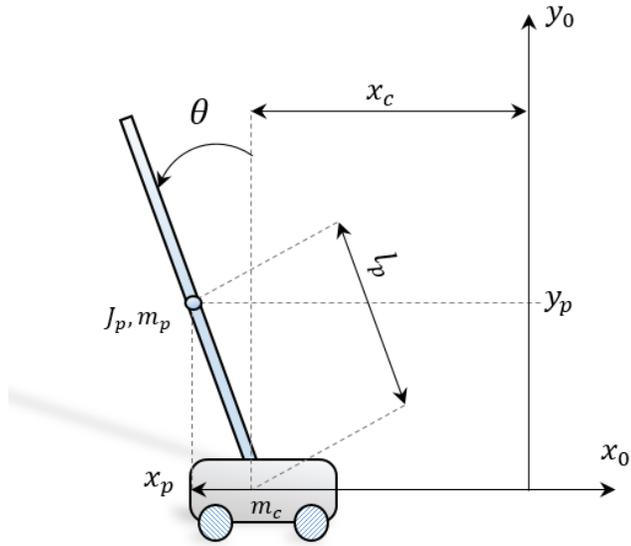


Fig. 1. Péndulo invertido.

propiedades de sistemas no lineales. El sistema se compone de un carro sobre el cual se monta un péndulo que puede girar libremente. El carro deberá moverse sobre un riel acotado para compensar el desplazamiento del péndulo y mantenerlo, así, en equilibrio.

Lo anterior indica que el péndulo invertido cuenta con dos grados de libertad, ángulo del péndulo θ y posición del carro x_c , y solo un actuador que gobierna el movimiento del carro, por lo tanto se dice que el péndulo invertido es un sistema subactuado, esto es, que el sistema posee menos actuadores que grados de libertad.

De esta forma, partiendo de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange, el modelo completo que describe el comportamiento dinámico del sistema está dado por

$$(m_c + m_p)\dot{v} - m_p l_p \cos(\theta)\dot{\omega} + m_p l_p \sin(\theta)\omega^2 + b_c v = F_c \quad (1)$$

$$(J_p + m_p l_p^2)\dot{\omega} - m_p l_p \cos(\theta)\dot{v} - g m_p l_p \sin(\theta) + b_p \omega = 0 \quad (2)$$

La relación que existe entre la fuerza aplicada al sistema y la señal de control real, V_m tensión suministrada al motor, esta dada por

$$F_c = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t (V_m(t) r_{mp} - k_g k_m v(t))}{R_m r_{mp}^2} \quad (3)$$

Los estados del sistema están dados por: $x_1 = x_c$, posición del carro, $x_2 = v$, velocidad del carro, $x_3 = \theta$, ángulo del péndulo respecto a la vertical y $x_4 = \omega$ la velocidad angular del péndulo. El sistema en espacio de estados descrito por (1) y (2), en el punto de equilibrio

$$X_{eq} = [0 \text{ m} \ 0 \text{ m/s} \ 0 \text{ rad} \ 0 \text{ rad/s}]^T$$

resulta en el sistema linealizado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4)$$

Para los resultados en simulación se emplean los parámetros del sistema del péndulo de Quanser *Inverted Pendulum System*, los parámetros se detallan en la Tabla 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.8593 & 2.2643 & -0.0073 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36.5415 & 27.8204 & -0.0896 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2734 \\ 0 \\ 5.2381 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Table 1. Parámetros del sistema

Símbolo	Descripción	Valor
m_p	Masa del péndulo	0.230 [kg]
m_c	Masa del carro	0.57 [kg]
J_p	Momento de inercia del péndulo	$7.8838e-3$ [kg m ²]
l_p	Longitud del péndulo	0.3302 [m]
b_p	Fricción viscosa del péndulo	0.0024 [N m s/rad]
b_c	Fricción viscosa del carro	4.3
g	Constante de gravedad	9.81 [m/s ²]

3. CONTROL FRACCIONARIO

El cálculo fraccionario es una herramienta matemática que permite la derivación e integración de funciones con órdenes no enteros. Esta teoría generaliza la noción de derivada D^α a aquellos casos en los cuales el orden de diferenciación α , presenta un orden negativo, irracional o incluso imaginario.

3.1 Fundamentos del cálculo fraccionario

Para $n \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$, la fórmula de Cauchy para la integración múltiple es

$$\begin{aligned} J^n f(t) &\triangleq \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau) d\tau \dots d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Si n ahora es un valor real (o incluso complejo) $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la fórmula obtenida es la llamada *integral fraccionaria de Riemann-Liouville*, dada por

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \quad (7)$$

donde $\Gamma(w)$ es la función Gamma de $w \in \mathbb{C}$.

Llamado D^α al operador derivada de orden α , e introduciendo el entero positivo n tal que, $n-1 < \alpha < n$, se obtiene la definición de Riemann-Liouville para la derivada fraccionaria [Shantanu (2011)].

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(1-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (8)$$

para $(n-1 < \alpha < n)$, donde a y t son los límites del operador, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\Gamma(n)$ es la función Gamma.

Una función alterna de la derivada fraccionaria es la introducida por Caputo [Shantanu (2011)]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n-1 \leq \pm \alpha < n), \quad (9)$$

donde n es un entero y α es un número real.

Esta definición para la derivada fraccionaria incorpora los valores iniciales de la función y sus derivadas de orden entero menor, es decir, condiciones iniciales que son físicamente interpretables de la manera tradicional.

Una definición muy apropiada para ser implementada en cálculos numéricos de tipo iterativo es la de Grünwald-Létnikov:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha-1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(t-mh). \quad (10)$$

3.2 Control fraccionario $PI^\alpha D^\lambda$

El control fraccionario PID, también llamado $PI^\lambda D^\alpha$ o $FOPID$ (fractional order, por sus siglas en inglés) introduce una realimentación de estados del tipo proporcional-integral-derivativo, Fig. 2.

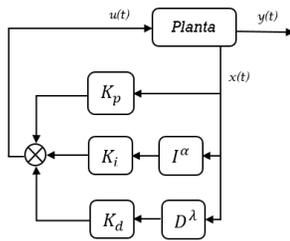


Fig. 2. Diagrama de bloques de un controlador FOPID.

La ley de control FOPID está descrita por 11.

$$u(t) = k_p x(t) + k_i I^\alpha x(t) + k_d D^\lambda x(t) \quad (11)$$

donde k_p , k_i y k_d son los vectores de ganancias diseñados para imponer el polinomio de diseño en lazo cerrado. I^α es un integrador de orden fraccionario α y D^λ es un derivador de orden fraccionario λ .

Aplicando la Transformada de Laplace a (11)

$$u(s) = k_p x(s) + k_i \frac{1}{s^\alpha} x(s) + k_d s^\lambda x(s) \quad (12)$$

Transformando el sistema descrito por (4) a su forma canónica controlable y cerrando el lazo con la ley de control (12).

$$A_{cl}(s) = sI - A_c - B_c k_{p_n} - B_c k_{i_n} \frac{1}{s^\alpha} - B_c k_{d_n} s^\lambda = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$z_0 = a_0 - k_{p_1} - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha} - k_{d_1} s^\lambda, \quad z_1 = a_1 - k_{p_2} - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha} - k_{d_2} s^\lambda$$

$$z_2 = a_2 - k_{p_3} - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha} - k_{d_3} s^\lambda, \quad z_3 = a_3 - k_{p_4} - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha} - k_{d_4} s^\lambda$$

a_0 , a_1 , a_2 y a_3 son los coeficientes pertenecientes al polinomio característico del sistema.

El polinomio característico del modelo en espacio de estados en lazo cerrado se calcula como $\Delta_{cl}(s) = \det(A_{cl}(s))$, y está dado por

$$\Delta_{cl}(s) = s^{\alpha+1} \left(s^3 + (a_3 - k_{p_4}) s^2 + (a_2 - k_{p_3}) s + (a_1 - k_{p_2}) \right) + (a_0 - k_{p_1}) s^\alpha - k_{i_4} s^3 - k_{i_3} s^2 - k_{i_2} s - k_{i_1} - \left(k_{d_4} s^3 + k_{d_3} s^2 + k_{d_2} s + k_{d_1} \right) s^{\alpha+\lambda} \quad (13)$$

Para calcular el valor de k_{p_n} , k_{i_n} y k_{d_n} , se requiere que $a_0 - k_{p_1} = 0$, por lo tanto: $k_{p_1} = a_0$, de esta manera, $\Delta_{cl}(s)$ puede ser escrito como:

$$\Delta_{cl}(s) = s^{\alpha+1} \Delta_{cl_1}(s) - \Delta_{cl_2}(s) - s^{\alpha+\lambda} \Delta_{cl_3}(s) \quad (14)$$

$\Delta_{cl_1}(s)$, $\Delta_{cl_2}(s)$ y $\Delta_{cl_3}(s)$ ahora son polinomios del mismo orden, y sus respectivos coeficientes k_{p_n} , k_{i_n} y k_{d_n} se calculan a partir de un polinomio deseado de orden $n-1$, con el fin permitir la elección de los polos del polinomio característico en lazo cerrado de $\Delta_{cl}(s)$.

El polinomio de diseño en lazo cerrado, $\Delta_d(s)$, está formado un polinomio entero con $n-1$ polos, mientras que el segundo polinomio es de valor fraccionario correspondiente a la acción integral ($s^{\alpha+1}$), y el tercer polinomio corresponde a la parte derivativa ($s^{\alpha+\lambda}$), teniendo relación directa con la acción integral.

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+1} + s^{\alpha+\lambda} + p_f)(s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0) \quad (15)$$

Igualando (14) con (15), y multiplicando por la matriz de transformación T , que lleva al sistema (4) a la forma canónica controlable, se obtienen las ganancias en la base original.

$$\begin{aligned} k_p &= [a_0 \ (a_1 - \beta_0) \ (a_2 - \beta_1) \ (a_3 - \beta_2)] T \\ k_i &= [-p_f \beta_0 \ -p_f \beta_1 \ -p_f \beta_2 \ -p_f] T \\ k_d &= [-\beta_0 \ -\beta_1 \ -\beta_2 \ -1] T \end{aligned} \quad (16)$$

donde $T = [Q' \ (QA)' \ (QA^2)' \ (QA^3)']'$, y Q está relacionada con la matriz de controlabilidad (Chen, 1995).

Por lo tanto, las ganancias resultantes son

$$\begin{aligned} k_p &= [0 \ 214.2091 \ -306.4356 \ -109.5450] \\ k_i &= [552.9636 \ 79.4439 \ -276.3303 \ -34.9557] \\ k_d &= [26.8572 \ 0.1045 \ -12.0892 \ -0.1974] \end{aligned} \quad (17)$$

Análisis de estabilidad. Para garantizar la estabilidad del controlador, se debe cumplir que $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ (Caponetto et al., 2010). Sustituyendo (17) en (13) y resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} \arg(s_1) &= 3.14061 & \arg(s_3) &= 2.95014 \\ \arg(s_2) &= -3.14061 & \arg(s_4) &= -2.95014 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable ya que todas las soluciones cumplen con $|\arg(s_i)| > \frac{\pi}{4}$.

3.3 Control fraccionario $I^\alpha - PD^\lambda$

Partiendo del algoritmo teórico de un controlador PID clásico descrito por

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (18)$$

donde $u(t)$ es la señal de control y $e(t)$ es el error entre la referencia $r(t)$, y la salida $y(t)$.

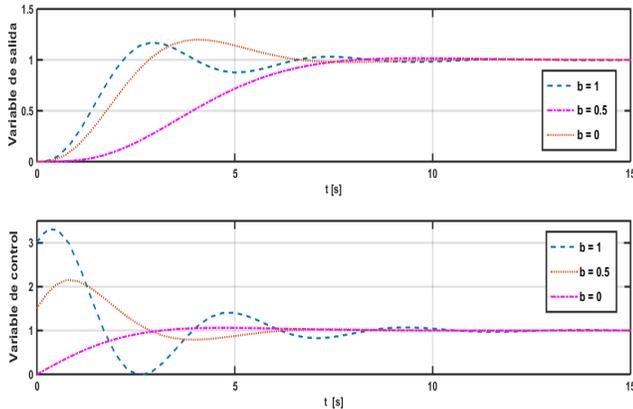


Fig. 3. Respuesta a un escalón en la variable de referencia para diferentes factores de peso. Función de transferencia del proceso $P(s) = 1/(s+1)^3$.

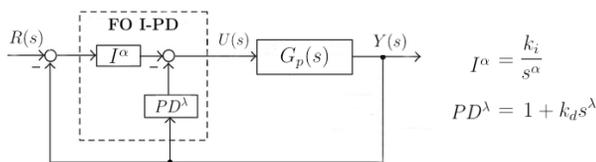


Fig. 4. Diagrama de bloques de un controlador fraccionario I-PD. Notar que la ganancia proporcional del controlador PD^λ es unitaria para obtener un error en estado estacionario cero.

Al usar la ley de control (18), resulta claro que un cambio en la señal de referencia originará un cambios bruscos en la señal de control, situación que no es de manera alguna deseable en la mayoría de los casos. Por esta razón la acción derivativa frecuentemente no es aplicada sobre la señal de referencia. Un controlador PID dado por (18) se convierte entonces en

$$u(t) = K \left(br(t) - y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \left(c \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right) \quad (19)$$

El controlador (19) reacciona ante una perturbación en la carga de la misma manera que lo hace un controlador de un solo grado de libertad, y la respuesta a cambios en la variable de referencia es influida por los parámetros b y c . La Figura 3, muestra las variaciones que resultan de los factores de peso b y c . Obsérvese que el sobre paso y el tiempo de respuesta dependen del factor de peso b . El valor de c es normalmente cero para evitar grandes transitorios en la señal de control debido a variaciones abruptas del punto de operación.

Por tanto, conviene tomar los valores de $b = 0$ y $c = 0$ si se desea que los cambios en la señal de control sean más suaves. Con ello, los términos proporcional y derivativo se encontrarán en el camino de realimentación, y únicamente la acción integral en el camino directo. De este modo se obtiene una modificación del controlador PID a un controlador denominado I-PD [Åström (2002)], Fig. 4.

Introduciendo los operadores fraccionarios integral y derivada en (19), obtenemos el controlador $I^\alpha - PD^\lambda$

$$u(t) = \left(-K_p y(t) + K_i I^\alpha (e(\tau)) - K_d D^\lambda (y(t)) \right) \quad (20)$$

Aplicando la transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas

$$U(s) = \frac{k_i}{s^\alpha} (R(s) - Y(s)) - (k_p + k_d s^\lambda) Y(s) \quad (21)$$

Desarrollando la relación entrada-salida, se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_i G_p(s)}{s^\alpha + (s^\alpha k_p + k_i + k_d s^{\alpha+\lambda}) G_p(s)} \quad (22)$$

Se puede observar que este tipo de controlador no agrega ningún cero. El hecho de no adicionar ceros en la función de transferencia a lazo cerrado, provocará que el sobreimpulso de la respuesta del sistema sea menor. Además, se observa que el polinomio característico resultante está en función de los órdenes fraccionarios.

Cerrando el lazo del sistema (4) con la ley de control (21), en donde la referencia $R(s)$ es cero y la ganancia proporcional de la parte PD^λ es unitaria:

$$A_{cl}(s) = sI - A_c - B_c - B_c k_{i_n} \frac{1}{s^\alpha} - B_c k_{d_n} s^\lambda$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$z_0 = a_0 - 1 - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha} - k_{d_1} s^\lambda \quad z_1 = a_1 - 1 - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha} - k_{d_2} s^\lambda$$

$$z_2 = a_2 - 1 - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha} - k_{d_3} s^\lambda \quad z_3 = a_3 - 1 - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha} - k_{d_4} s^\lambda$$

El polinomio característico del modelo en espacio de estados en lazo cerrado se calcula mediante $\Delta_{cl}(s) = \det(A_{cl}(s))$, y está dado por

$$\Delta_{cl}(s) = \left(s^3 + (a_3 - k_{p4})s^2 + (a_2 - k_{p3})s + (a_1 - k_{p2}) \right) s^{\alpha+1}$$

$$+ (a_0 - k_{p1})s^\alpha - \left(k_{d4} s^3 + k_{d3} s^2 + k_{d2} s + k_{d1} \right) s^{\alpha+\lambda}$$

$$- \left(k_{i4} s^3 + k_{i3} s^2 + k_{i2} s + k_{i1} \right) \quad (23)$$

$\Delta_{cl}(s)$ puede ser escrito como:

$$\Delta_{cl}(s) = \Delta_{cl_1}(s) s^{\alpha+1} + \Delta_{cl_2} s^\alpha - \Delta_{cl_3}(s) s^{\alpha+\lambda} - \Delta_{cl_4}(s) \quad (24)$$

$\Delta_{cl_3}(s)$ y $\Delta_{cl_4}(s)$ son dos polinomios enteros del mismo orden, y sus respectivos coeficientes k_{i_n} y k_{d_n} se calculan a partir de igualar $\Delta_{cl}(s)$ a un polinomio deseado del mismo orden, con el fin reubicar los polos del polinomio característico en lazo cerrado de $\Delta_{cl}(s)$.

Si $a_0 = k_{p1}$, el polinomio de diseño entonces toma la forma

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+1} + s^{\alpha+\lambda} + p_f)(s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0) \quad (25)$$

Igualando (23) con (25) se obtienen los valores de k_{p_n} , k_{i_n} y k_{d_n} en la base original

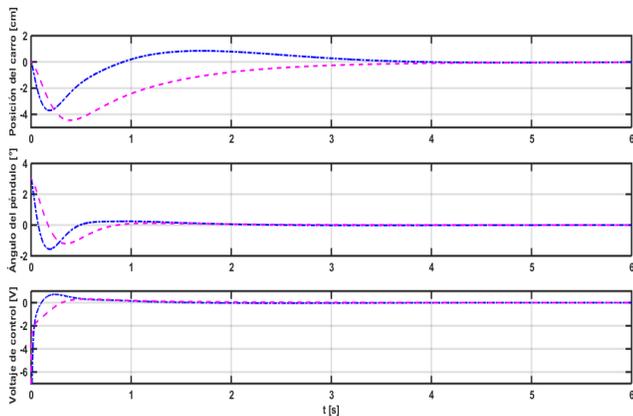


Fig. 5. Resultados en simulación de los controladores FOPID(-) y FOI-PD(-).

$$k_i = [-p_f \beta_0 \quad -p_f \beta_1 \quad -p_f \beta_2 \quad -p_f] T \quad (26)$$

$$k_d = [-\beta_0 \quad -\beta_1 \quad -\beta_2 \quad -1] T$$

$$k_p = [a_0 \quad (a_1 - \beta_0) \quad (a_2 - \beta_1) \quad (a_3 - \beta_2)] T$$

El controlador se diseña empleando el polinomio

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+1} + 0.05)(s^3 + 43.2s^2 + 490.4s + 528), \quad (27)$$

y las ganancias resultantes son

$$\begin{aligned} k_p &= [0.0194 \quad 0.0195 \quad -0.1996 \quad -0.1990], \\ k_i &= [0.5129 \quad 0.4780 \quad -0.6494 \quad -0.2170], \\ k_d &= [10.2579 \quad 9.5604 \quad -12.9875 \quad -4.3399]. \end{aligned} \quad (28)$$

Para garantizar la estabilidad del controlador, se sustituye (28) en (23) y resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} \arg(s_1) &= 3.14061 & \arg(s_3) &= 2.95014 \\ \arg(s_2) &= -3.14061 & \arg(s_4) &= -2.95014 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable ya se cumple que cumplen con $|\arg(s_i)| > \frac{\pi}{4}$.

4. RESULTADOS

4.1 Resultados en simulación

Para la implementación de los operadores fraccionales, se utilizó la herramienta de Matlab: *Fractional Variable Order Derivative Simulink Toolkit ver. 2.00*, la cuál hace uso de la definición de Grünwald-Létnikov (10).

En la Fig. 5 se muestran los resultados obtenidos para una perturbación de 3 grados sobre el ángulo, se puede notar que θ converge al origen en aproximadamente 2 s, debido a esto, el carro tiene que desplazarse al rededor de 4 cm, regresando a su origen en 3 s, requiriendo un voltaje de control máximo de 7 V. Por su parte, en la Fig. 6 se muestra el resultado del controlador al aplicar un cambio en el parámetro fraccionario.

4.2 Resultados experimentales

El mismo control empleado en las simulaciones fue implementado en una plataforma experimental desarrollada por *Quanser*, con un tiempo de muestreo uniforme de 3 mseg. Los resultados experimentales se muestran en la

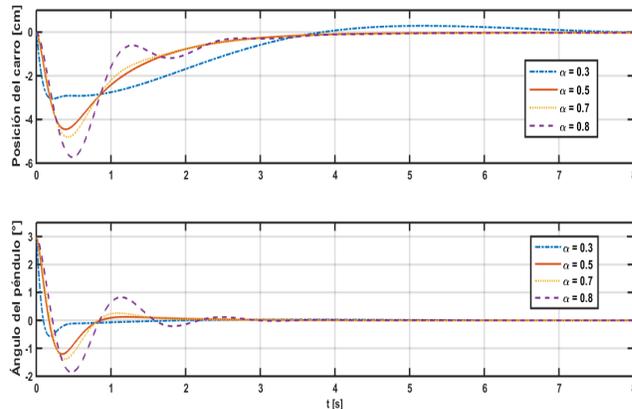


Fig. 6. Resultado en simulación del control fraccionario I-PD para distintos valores fraccionales.

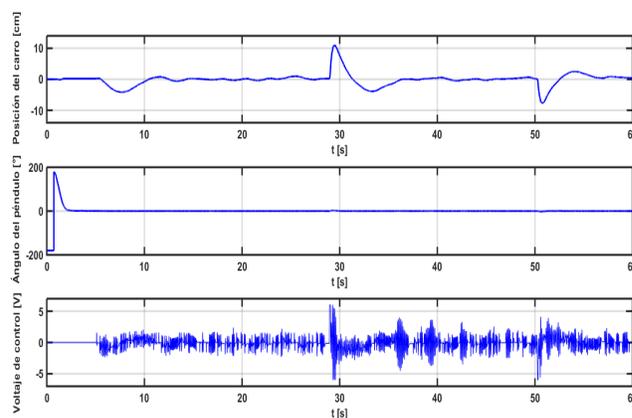


Fig. 7. Resultado experimental del control fraccionario PID.

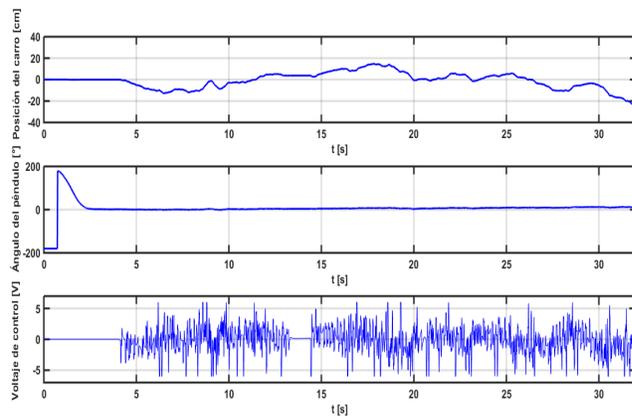


Fig. 8. Resultado experimental del control fraccionario I-PD.

Fig. 7 y Fig. 8. El controlador es aplicado una vez que el ángulo este cerca de su equilibrio, aproximadamente a los 5 seg para ambos controladores. El control FOPID estabiliza al péndulo aun en presencia de perturbaciones (segundos 28 y 50); el controlador FOI-PD mantiene al péndulo en su punto de equilibrio inestable, sin embargo, el carro tiende a estar en constante movimiento a lo largo del riel para mantener al péndulo sobre su vertical. En ambos controladores, la señal de control permanece por debajo de los límites de voltaje del actuador.

5. CONCLUSIONES

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido la aplicación de las herramientas de cálculo fraccionario al control de sistemas, es especial a controles FOPID y FOIPD, extendiendo su metodología y generalizando su formulación. Se mostraron resultados en simulación y experimentales que demuestran la efectividad de los controles propuestos que estabilizan al péndulo en su punto de equilibrio inestable.

REFERENCIAS

Jesus, I.S. and Machado, J.T. (2008). Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 54(3), 263–282.

REFERENCIAS

- Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna Luigi., Petrás, I. (2010). *Modeling and Control Applications*. World Scientific.
- Das, S. (2011). *Functional Fractional Calculus*. Springer Science & Business Media.
- Åström, K. J. (2002). *Control System Design*. Department of Mechanical and Environmental Engineering University of California Santa Barbara.
- Bettayeb, M and Boussalem, C and Mansouri, R and Al-Saggaf, UM (2014). *Stabilization of an inverted pendulum-cart system by fractional PI-state feedback*. ISA Transactions.
- Axtell, Mark and Bise, Michael E. (1990). *Fractional calculus application in control systems*. Aerospace and Electronics Conference, 1990. NAECON 1990., Proceedings of the IEEE 1990 National.
- Khalil, Hassan K and Grizzle, JW (1996). *Nonlinear systems*. Prentice hall New Jersey.
- Valerio, Duarte and Da Costa, Jose Sa (2011). *Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations*. Signal Processing.
- Jesus, Isabel S and Machado, JA Tenreiro. *Fractional control of heat diffusion systems*. *Nonlinear Dynamics*, 54(3). 263-282.
- Chen, Chi-Tsong (1995). *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc.