

Seguimiento de la trayectoria y estabilización de la dinámica interna de un helicóptero a escala reducida mediante la técnica de seguimiento de ruta

J. G. Benítez-Morales[†], H. Rodríguez-Cortés^{†,‡} y R. Castro-Linares[†]

[†] CINVESTAV-IPN, Departamento de ingeniería eléctrica, sección de mecatrónica, Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07300 México D.F., México. (e-mail:

{jbenitez,hrodriguez,rcastro}@cinvestav.mx)

[‡] Centro de Desarrollo Aeroespacial del Instituto Politécnico Nacional, Belisario Domínguez 22, Col. Centro, México D.F.

Resumen— Se propone una nueva forma de solucionar el problema de estabilizar la dinámica interna del modelo de un helicóptero de escala reducida cuando se lleva a cabo un seguimiento de la trayectorias en el espacio. La solución utiliza la técnica de seguimiento de ruta (path following) para estabilizar asintóticamente a la dinámica interna del sistema. Esto se logra al través de parametrizar la trayectoria deseada con dos escalares independientes; estos escalares son considerados como nuevos estados del sistema y su derivada de mayor orden es considera una nueva entrada de control en la dinámica interna. Se muestran simulaciones numéricas para observar el desempeño de la solución propuesta.

Palabras Clave: Helicóptero a escala reducida, control no lineal, vehiculos aéreos no tripulados, linealización por retroalimentación de los estados, punto de referencia, Seguimiento de ruta

1. INTRODUCCIÓN

En los años recientes, los investigadores en el área de automatización y control han tenido un gran interés sobre el diseño de estrategias de control para vehículos aéreos no tripulados. Uno de los primeros vehículos a controlar fue el helicóptero a escala reducida debido a la maniobrabilidad que presenta en diferentes tipos de misiones y su similitud con los helicópteros convencionales. Además, se tenía la disponibilidad de adquirir un prototipo de aeromodelismo para realizar experimentos y valida las estrategias de control. Sin embargo, la dinámica del helicóptero presenta varios desafíos a resolver debido a su complejidad, ya que presenta dinámicas no lineales y sus estados están acoplados; de la misma manera, las entradas de control presentan acoplamiento. Aunado a esto, el sistema es subactuado, lo cual provoca que el sistema tenga una dinámica interna. Por lo tanto, la mayoría de los investigadores a optado por realizar el vuelo autónomo para otros tipos de aeronaves.

Unos de los primeros trabajos acerca del control de los helicópteros a escala reducida es el de (Koo and Sastry [1998]), en este artículo se presenta el modelo dinámico que abarca los movimientos de traslación y rotación del vehículo. Enseguida, se propone realizar una linealización entrada salida considerando cuatro entradas de control y cuatro salidas de seis posibles (tres posiciones y tres rota-

ciones), Asimismo, se considera la extensión dinámica del sistema para lograr desacoplar las dinámicas. La dinámica cero del sistema presenta un comportamiento débilmente de fase mínima, esto se observa al linealizar la dinámica cero en sus puntos de equilibrio y determinar que sus eigenvalores están sobre el eje imaginario y son complejos conjugados.

En los trabajos de (A. Dzul and Castillo [2004]), presentan la dinámica del helicóptero con dos grados de libertad al considerar solamente el movimiento vertical y la guiñada de la aeronave. La estrategia de control se basa en la colocación de polos para la guiñada y para el movimiento vertical se propone utilizar una colocación de polos adaptativos. Los resultados de la técnica de control son mostrados en forma experimental.

Los trabajos de (Fahimi and Saffarian [2011]), propone utilizar como salida un punto de referencia sobre el helicóptero con la finalidad de lograr la linealización por retroalimentación entrada salida sin la necesidad de realizar una extensión dinámica. El regulador empleado es un control por modos deslizantes. Además, se prueba que la dinámica cero del sistema es estable al incluir los efectos dinámicos de la barra estabilizados.

En (I. A. Raptis and Vachtsevanos [2007]) se propone utilizar un modelo lineal de la dinámica del helicóptero a escala reducida representado en espacio de estados. El objetivo es controlar la posición y la guiñada de la aeronave. La propuesta de estrategia de control se basa en la separación de las dinámicas longitudinal y lateral con

* Los autores agradecen por el soporte de este trabajo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, México, y al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal, ICyTDF, México, en virtud de concesiones 102390 y 263/2010, respectivamente..

respecto a las dinámicas de orientación. Posteriormente, el modelo lineal es controlado a través de la técnica de backstepping al tener los sistemas en cascada.

En los trabajos de (Marconi and Naldi [2007]), presentan un control para la dinámica longitudinal y lateral, el diseño de sus estrategia de control consiste en controlar la dinámica vertical a través de una retroalimentación, donde utilizan un control auxiliar con la finalidad de desacoplar la dinámica longitudinal con la dinámica de orientación y la del motor de combustión interna. La velocidad del motor de combustión es controlada a través de un PI no lineal. El control de las dinámica lateral y longitudinal se basa en una estructura de cascada constituida por un controlador interno para las dinámicas de orientación y un controlador externo para los movimientos longitudinales y laterales. El controlador interno tiene el propósito de evitar que el helicóptero vuelque, mientras que el controlador externo tiene la tarea de llegar asintóticamente a la referencia; teniendo como entrada virtual a la salida del controlador interno. Las dinámicas de orientación del helicóptero son consideradas como la dinámica rápida mientras que el movimiento lateral y longitudinal son considerados la dinámica lenta. El control interno consiste en una retroalimentación de altas ganancias mientras que el controlador externo tipo feedforward basado en las referencias de seguimiento.

Por otro lado, los sistemas dinámicos son controlados a través de diferentes estrategias de control con la finalidad de modificar su comportamiento; generalmente se desea que el sistema siga una trayectoria de referencia en función del tiempo. En el trabajo de (R. Skjetne and Kokotovic [2002]), se plantea que la trayectoria de referencia depende de una variable escalar, la cual se llama ruta geométrica. Esta nueva trayectoria tiene el propósito de resolver dos tareas: la primera tarea consiste en forzar a la salida del sistema a seguir una ruta geométrica y la segunda tarea, consiste en satisfacer la velocidad deseada. Posteriormente, esta idea ha evolucionado con el nombre de seguimiento de ruta (Aguir et al. [2004]), (D.B. Dacic and Kokotovic [2007]) y (Dačić et al. [2004]). El seguimiento de ruta tiene dos objetivos: el primero consiste en hacer que la salida del sistema converga hacia la ruta geométrica y el segundo objetivo plantea estabilizar la dinámica interna cuando tiene un comportamiento inestable.

En el presente trabajo se presenta el uso del llamado punto de referencia (Fahimi and Saffarian [2011]) para desacoplar las dinámicas entre las entradas y las salidas; además se presentan algunas consideraciones para aplicar este punto de referencia.

El diseñar un espacio de control para seguimiento de trayectoria, se propone estabilizar la dinámica interna por medio

de la técnica de seguimiento de ruta. Los resultados obtenidos en simulación numérica muestran que la dinámica interna es estabilizada y con esto se puede eliminar el uso de la barra estabilizadora en el helicóptero. Esto beneficia al diseño y manufactura de la parte mecánica al simplificar el mecanismo del rotor así como la reducción de costos.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta el modelo del helicóptero a escala reducida. En

la sección 3 se presenta la estrategia de control para la posición y la guiñada junto con la técnica de seguimiento de ruta para estabilizar la dinámica interna del sistema. En la sección 4, se presentan simulaciones numéricas para mostrar el desempeño de la estrategia de control. Al final, se presentan las conclusiones en la sección 5.

2. MODELO DINÁMICO DEL HELICÓPTERO A ESCALA REDUCIDA

Las variables del sistema están referenciadas desde un marco de referencia cuerpo hacia un marco de referencia inercial para determinar la posición, velocidad y aceleración del helicóptero a escala reducida. El marco de referencia inercial $[x^I \ y^I \ z^I]$ está localizado en un punto sobre la tierra, donde el eje x^I está dirigido hacia el norte del campo magnético de la tierra, el eje y^I está en dirección al este y el eje z^I está apuntando hacia el centro de la tierra. El marco de referencia cuerpo $[x^b \ y^b \ z^b]$ está localizado en el centro de gravedad de la aeronave donde el eje x^b está en la dirección longitudinal del helicóptero, y^b está en la dirección lateral del vehículo y z^b apunta hacia abajo de la aeronave, tal como se observa en la figura 1.

El modelo dinámico del helicóptero describe los movimientos de la aeronave en un espacio de tres dimensiones con respecto a un marco de referencia inercial. Las ecuaciones que describen la dinámica están dadas por (Koo and Sastry [1998]) y (Raptis and Valavanis [2010])

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}^I \\ \dot{v}^p \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Omega}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^p \\ \frac{1}{m} R^T f^b \\ W(\Phi)^{-1} \Omega^b \\ \mathcal{I}^{-1} (\tau^b - \Omega^b \times \mathcal{I} \Omega^b) \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde $X = [X_p^I \ v^p \ \Phi \ \Omega^b] \in \mathbb{R}^{12}$ es el estado del sistema. $X_p^I = [x \ y \ z]^T$ es el vector de la posición traslacional con x , y y z siendo la posición longitudinal, lateral y vertical, respectivamente. Las vector $\Phi = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ contiene los ángulos de Euler, los cuales definen la orientación de la aeronave mediante los ángulos de alabeo ϕ , cabeceo θ , y guiñada ψ . $\Omega^b = [p \ q \ r]^T$ es el vector de la velocidad angular donde p , q , y r son las velocidades angulares con respecto a los ejes x^b , y^b y z^b , respectivamente. m y \mathcal{I} son la masa y el tensor de inercia, respectivamente. R es la matriz de rotación y está definida como (Mettler [2003])

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

donde se utiliza la notación compacta $sx = \sin(x)$ y $cx = \cos(x)$.

El modelo cinemático rotacional relaciona las velocidades en eje cuerpo con las velocidades en ejes inerciales, por (Kuipers [1999])

$$\dot{\Phi} = W(\Phi)^{-1} \Omega^b \quad (2)$$

donde:

$$W(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Las fuerzas externas aplicadas al helicóptero están dadas por $f^b = RW_I + T_u u$ y los pares externos son expresados por $\tau = M_u u$ con base en los trabajos de Fahimi and Saffarian [2011]), $u = [T_{MR} M_\phi M_\theta T_T]^\top$ es el vector de entrada, siendo T_{MR} el empuje del rotor principal, T_T el empuje del rotor de cola, M_ϕ el par aplicado al movimiento de alabeo y M_θ el par aplicado al movimiento de cabeceo. $W_I = [0 \ 0 \ g]$ es el vector de gravedad y g es la constante de gravedad. Finalmente, T_u y M_u son matrices de ajuste para introducir el vector de entrada en la dinámica de traslación y de rotación respectivamente. Estas matrices están dadas por

$$T_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & l_T \end{bmatrix}$$

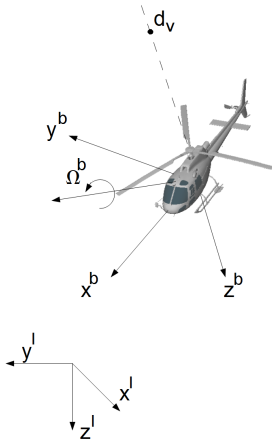


Figura 1. Marcos de referencia en el helicóptero a escala reducida.

3. ESTRATEGIA DE CONTROL

El modelo dinámico del helicóptero tiene cuatro entradas y seis posibles salidas, de las cuales, generalmente, se utilizan las variables de posición y la guiñada. A continuación se muestra el diseño del esquema de control para la posición y la guiñada del helicóptero así como un análisis entre la diferencia de la posición real y la trayectoria deseada

3.1 Estrategia de control para la posición y la guiñada

Se consiera primero, un punto de referencia para controlar la posición tal como se propone en (Fahimi and Saffarian [2011]). El punto de referencia está dado por

$$X_v^I = X_p^I - R d_v \quad (4)$$

o, en forma equivalente

$$X_v^I = \begin{bmatrix} x - (s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi) d \\ y - (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi) d \\ z - c_\theta c_\phi d \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde $d_v = [0 \ 0 \ -d]^\top$ es un vector de distancia, y d es una distancia desde el centro de masa hasta el punto

de referencia; esta distancia está sobre el eje z^b (véase la figura 1).

Si se define la salida del sistema (1) como

$$Y = \begin{bmatrix} X_v^I \\ \psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

se tiene que el modelo dinámico del helicóptero tiene un vector de grado relativo definido $\{2, 2, 2, 2\}$ ya que la matriz de desacoplamiento

$$G_Y = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\frac{\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)}{I_{xx}} \\ g_{12} &= -\frac{(\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)) d}{I_{xx}} \\ g_{13} &= -\frac{\cos(\psi) \cos(\theta) d}{I_{yy}} \\ g_{14} &= \frac{\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)}{m} \\ g_{21} &= -\frac{-\cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)}{m} \\ g_{22} &= \frac{d(\cos(\psi) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi))}{I_{xx}} \\ g_{23} &= -\frac{\sin(\psi) \cos(\theta) d}{I_{yy}} \\ g_{24} &= -\frac{\cos(\psi) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)}{m} \\ g_{31} &= -\frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{m} \\ g_{32} &= \frac{\cos(\theta) \sin(\phi) d}{I_{xx}} \\ g_{33} &= \frac{\sin(\theta) d}{I_{yy}} \\ g_{34} &= -\frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{m} \\ g_{41} &= -\frac{\cos(\phi) a}{\cos(\theta) I_{zz}} \\ g_{42} &= 0 \\ g_{43} &= \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta) I_{yy}} \\ g_{44} &= \frac{\cos(\phi) l_t}{\cos(\theta) I_{zz}} \end{aligned} \quad (8)$$

y G_Y es no singular, excepto en $\theta = \pi/2 \text{ rad}$, ya que

$$\det(G_Y) = -\frac{d^2 l_t \cos(\phi)}{I_{xx} I_{yy} I_{zz} m \cos(\theta)}$$

donde I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} son los momentos de inercial con respecto a los ejes x^b , y^b y z^b , respectivamente y l_t es la distancia desde el centro de masa hasta el rotor de cola. Cabe la pena mencionar que existe la singularidad de la matriz G_Y , el helicóptero no debe realizar maniobras tales que el ángulo de cabeceo sea igual o cercano a 90° . Entonces, al seleccionar la señal de control u como

$$u = (G_Y)^{-1} (v + \ddot{Y}_d - F_Y) \quad (9)$$

donde $v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^\top$, un vector de nuevas entradas, $X_d = [x_d(t) \ y_d(t) \ z_d(t) \ \psi_d(t)]$ es el vector de señales

de referencia, F_Y son todos los términos de la segunda derivada de la salida, los cuales no incluyen a la entrada; estos términos no se incluyen debido a su longitud.

Por otro lado, se tiene que

$$\ddot{Y} - \ddot{x}_d = v$$

si se define el error de posición y de guiñada como

$$Y_e = Y - X_d$$

y se escoge a los componentes del vector de nuevas entradas v como

$$v_i = -k_{pi}Y_{ei} - k_{di}\dot{Y}_{ei}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (10)$$

con k_{pi} , k_{di} constantes positivas, se tiene que cada señal de error Y_{ei} converge a cero asintóticamente.

Ya que generalmente se quiere que el ángulo de guiñada deseada $\psi_d = 0$, la estrategia de linealización exacta propuesta conduce a las expresiones siguientes para los errores de posición en estado estacionario:

$$\begin{aligned} x - x_d &= \sin(\theta) \cos(\phi)d \\ y - y_d &= \sin(\phi)d \\ z - z_d &= \cos(\theta) \cos(\phi)d \end{aligned} \quad (11)$$

En estas ecuaciones puede notarse que la diferencia entre el valor actual y la posición deseada tienen un comportamiento periódico alrededor del origen parametrizado por d . Si los ángulos de alabeo y cabeceo, ϕ y θ , son cero, x y y coinciden con las posiciones deseadas x_d y y_d , respectivamente mientras que z tendría el valor de $z_d + d$; lo que coincide con el comportamiento esperado.

3.2 Dinámica interna del sistema retroalimentado

Para poder analizar la estabilidad del sistema retroalimentado (1)-(9) es necesario estudiar las ecuaciones dinámicas del cabeceo, θ , y del ángulo, ϕ , con la ley de control (9). Con este fin, se considera el modelo cinemático rotacional descrito por (2), el cual toma la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} &= e_1 W(\Phi)^{-1} \mathcal{I}^{-1} M_u u \\ &- e_1 W(\Phi)^{-1} \mathcal{I}^{-1} \left(W(\Phi) \dot{\Phi} \right) \times \mathcal{I} \left(W(\Phi) \dot{\Phi} \right) \\ &- e_1 W(\Phi)^{-1} \dot{W}(\Phi) \dot{\Phi} \end{aligned} \quad (12)$$

donde u está dada por (9). Para simplificar el análisis se supone también que los ángulos θ y ϕ son suficientemente pequeños de tal manera que $\sin(\phi) \approx \phi$, $\cos(\phi) \approx 1$, $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$ y además que las multiplicaciones entre las derivadas de ϕ y θ con respecto al tiempo son nulas. Entonces, al considerar sólo las dinámicas de ϕ y θ en (12) se tiene que éstas se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} + \frac{g}{d} \left(\phi - \frac{a}{lt} \right) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & B_{14}^1 \\ B_{21}^1 & B_{22}^1 & B_{23}^1 & B_{24}^1 \end{bmatrix} \ddot{X}_d \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{11}^1 &= \frac{Izz \phi - \theta adm + \theta \phi lt dm}{lt d^2 m}; & B_{12}^1 &= \frac{\phi a + lt}{lt d} \\ B_{13}^1 &= -\frac{\phi d l t m + Izz \phi \theta + adm}{lt d^2 m}; & B_{14}^1 &= \frac{\theta d l t m + Izz}{d l t m + Izz} \\ B_{21}^1 &= \frac{lt d^2 m}{-d^{-1}}; & B_{22}^1 &= 0 \\ B_{23}^1 &= \frac{\theta}{d}; & B_{24}^1 &= -\phi \end{aligned}$$

La dinámica (3.2) puede expresarse en función del vector de referencia en las coordenadas cuerpo, $X_d^b(t)$, donde $X_d^b(t) = [x_d^b(t) \ y_d^b(t) \ z_d^b(t) \ \psi_d^b(t)]^\top$ por medio de la transformación $X_d = R^\top X_d^b$, es decir

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} + \frac{g}{d} \left(\phi - \frac{a}{lt} \right) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^2 & B_{12}^2 & B_{13}^2 & B_{14}^2 \\ B_{21}^2 & B_{22}^2 & B_{23}^2 & B_{24}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_d^b \\ \ddot{y}_d^b \\ \ddot{z}_d^b \\ \ddot{\psi}_d^b \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{11}^2 &= \frac{Izz \phi}{lt d^2 m}; & B_{12}^2 &= d^{-1} \\ B_{13}^2 &= -\frac{a}{lt d}; & B_{14}^2 &= \frac{\theta d l t m + Izz}{d l t m + Izz} \\ B_{21}^2 &= -d^{-1}; & B_{22}^2 &= 0 \\ B_{23}^2 &= 0; & B_{24}^2 &= -\phi \end{aligned}$$

Se supone ahora que el movimiento deseado para el helicóptero es tal que la segunda derivada con respecto al tiempo para el movimiento vertical deseado y para el ángulo de guiñada deseada son cero en todo tiempo, es decir, que $\ddot{z}_d^b(t) = 0$ y $\ddot{\psi}_d^b(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Entonces la dinámica (14) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} + \frac{g}{d} \left(\phi - \frac{a}{lt} \right) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Izz \phi & \ddot{x}_d^b + d^{-1} \ddot{y}_d^b \\ lt d^2 m & -d^{-1} \ddot{x}_d^b \end{bmatrix} \quad (15)$$

Es importante observar que las restricciones para el movimiento deseado mencionado arriba ($\ddot{z}_d^b(t) = 0$ y $\ddot{\psi}_d^b(t) = 0$) corresponde a secuencias de movimiento estándar que se realizan en los helicópteros; por ejemplo, mantener el helicóptero a una altura fija (vuelo estacionario) con ángulo de guiñada nulo.

3.3 Estabilización de la dinámica interna usando la técnica del seguimiento de ruta

La estabilización asintótica de la dinámica (15) puede lograrse mediante la técnica de seguimiento de ruta. En esta técnica, las trayectorias deseadas están parametrizadas por medio de parámetros adicionales, los cuales se consideran como nuevos estados del sistema y su derivada de mayor orden será la nueva entrada al sistema. Considérese las dos ecuaciones que describen el comportamiento de la dinámica interna en (15). Se propone, entonces, utilizar dos escalares, α y β , para parametrizar a las trayectorias deseadas de x_d y y_d , teniendo así dos nuevos estados en el sistema, los cuales estarán dados por:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_d^b &= \frac{\partial^2 x_d(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_d^b &= \frac{\partial^2 y_d(\beta)}{\partial^2 \beta} \dot{\beta}^2 + \frac{\partial y_d(\beta)}{\partial \beta} \ddot{\beta} \end{aligned} \quad (16)$$

El sistema (15) se reescribe ahora como

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{d} \left(\phi - \frac{a}{lt} \right) = \frac{Izz \phi}{lt d^2 m} \left(\frac{\partial^2 x_d(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} \right) + d^{-1} \left(\frac{\partial^2 y_d(\beta)}{\partial^2 \beta} \dot{\beta}^2 + \frac{\partial y_d(\beta)}{\partial \beta} \ddot{\beta} \right) \quad (17)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{d} \theta = -d^{-1} \left(\frac{\partial^2 x_d(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} \right)$$

Ahora, se propone utilizar a $\ddot{\alpha}$ y $\ddot{\beta}$ como las nuevas entradas del sistema (17). Obsérvese en (15) que el sistema carece de amortiguamiento, por lo tanto la estrategia de control consistirá en adicionar amortiguamiento al sistema de la siguiente forma:

$$\ddot{\beta} = d \left(\frac{\partial y_d(\beta)}{\partial \beta} \right)^{-1} \left(-\frac{Izz \phi}{lt d^2 m} \left(\frac{\partial^2 x_d(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} \right) \right) + d \left(\frac{\partial y_d(\beta)}{\partial \beta} \right)^{-1} \left(-k_{\beta 1} \phi - k_{\beta 2} \dot{\phi} - k_{\beta 3} \beta - k_{\beta 4} \dot{\beta} \right) \quad (18)$$

$$\ddot{\alpha} = -k_{\alpha 1} \theta - k_{\alpha 2} \dot{\theta} - k_{\alpha 3} \alpha - k_{\alpha 4} \dot{\alpha} \quad (19)$$

Nótese que la primera derivada parcial respecto a β necesita ser diferente de cero, por lo que hay que tener cuidado al proponer las trayectorias deseadas. La dinámica interna tratada en (17) con la selección (18) y (19) queda como

$$\ddot{\phi} + k_{\beta 2} \dot{\phi} + \left(k_{\beta 1} + \frac{g}{d} \right) \phi + k_{\beta 3} \beta + k_{\beta 4} \dot{\beta} - d^{-1} \left(\frac{\partial^2 y_d(\beta)}{\partial^2 \beta} \right) \dot{\beta}^2 = \frac{g a}{d lt}$$

$$\ddot{\theta} - \frac{k_{\alpha 2}}{d} \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{d} - \frac{k_{\alpha 1}}{d} \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \theta - \frac{k_{\alpha 3}}{d} \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \alpha - \frac{k_{\alpha 4}}{d} \frac{\partial x_d(\alpha)}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{1}{d} \frac{\partial^2 x_d(\alpha)}{\partial^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 = 0 \quad (20)$$

Las ganancias $k_{\beta 1}$, $k_{\beta 2}$, $k_{\beta 3}$, $k_{\beta 4}$, $k_{\alpha 3}$ y $k_{\alpha 4}$ son constantes positivas mientras que las ganancias $k_{\alpha 1}$ y $k_{\alpha 2}$ son constantes negativas. Es importante hacer notar que para lograr la estabilidad asintótica del sistema, la primera derivada parcial de $x_d(\alpha)$ no deba de cambiar de signo.

Comentario: Por el momento no se tiene considerado la certificación de la técnica de control ante la Administración Federal de Aviación (FAA). Por lo tanto, no se considera necesario obtener la ubicación de los polos y ceros del sistema.

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se propuso como vector de señales de referencia el vector dado por:

$$X_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \\ z_d(t) \\ \psi_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1t \\ 0,1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Las condiciones iniciales usadas para el modelo del helicóptero fueron $x(0) = 0,5 m$, $y(0) = 0,5 m$, $z(0) = -0,5$

m , $\theta(0) = 0 rad$, $\phi(0) = 0 rad$ y $\psi(0) = 0,5 rad$. De igual manera, las variables de la estrategia de control (18) y (19) fueron iniciadas con los valores de $\beta(0) = 0$ y $\alpha(0) = 0$. Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas se muestran en las figuras 2 y en ellas se puede observar lo siguiente. La variable $x(t)$ converge a la señal de referencia $x_d(t)$ mientras que hay un error en estado estacionario para la variable $y(t)$; esto es debido a (9), ya que el valor del ángulo de alabeo, ϕ , también en estado estacionario, es de $\frac{g a}{d lt} = 0,25 rad$ (véase la figura 2, 3 y 5). De igual manera, y también debido a (9), se tiene un error en estado estacionario para la variable z aproximadamente igual a $d = 1 m$ (véase la figura 4 y 5); de hecho $\theta(t)$ converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ y, por lo tanto, $z_d(t) \rightarrow z_d(t) + \cos(\phi)d$. De las simulaciones numéricas mostradas, se puede concluir que el comportamiento del modelo dinámico (1), con la retroalimentación (9), (18) y (19) y utilizando la técnica de seguimiento de ruta es el esperado. Además esta técnica permite estabilizar la dinámica interna del modelo.

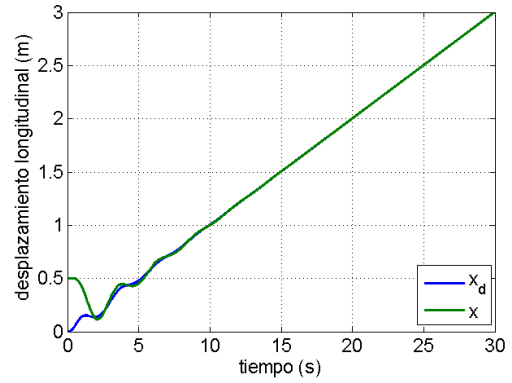


Figura 2. Seguimiento de la trayectoria en el eje x^I .

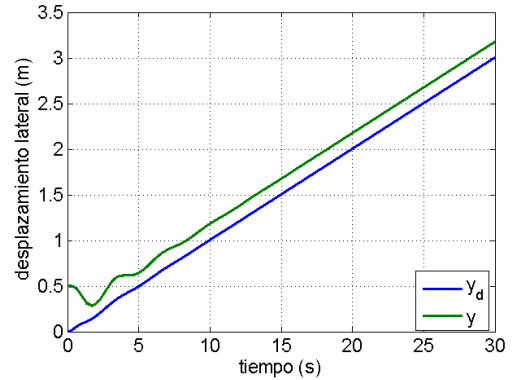


Figura 3. Seguimiento de la trayectoria en el eje y^I .

5. CONCLUSIONES.

Se presentó un esquema de control por linealización exacta para el seguimiento de trayectorias de un helicóptero cuyo modelo no incluye la barra estabilizadora. Usando la técnica de seguimiento de ruta, se muestra que además es posible estabilizar asintóticamente la dinámica interna del sistema retroalimentado, al introducir dos nuevas variables en el sistema por medio de la trayectoria deseada. Los resultados obtenidos y la evolución de su desempeño en simulaciones numéricas, mostraron el uso de la técnica

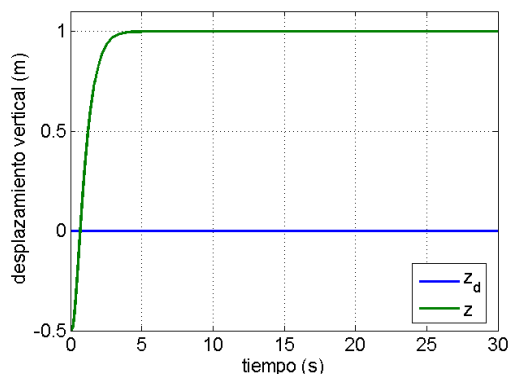


Figura 4. Seguimiento de la trayectoria en el eje z^I .

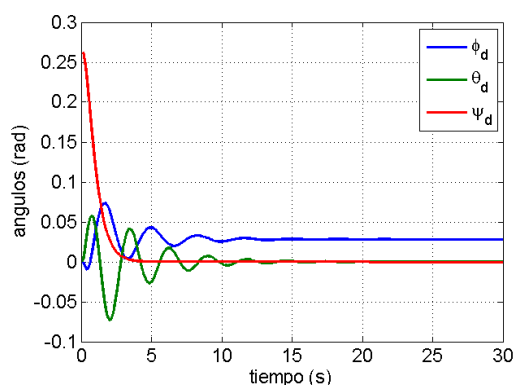


Figura 5. Comportamiento de los ángulos de Euler

propuesta en una plataforma experimental donde se alterará la estructura física de un helicóptero al eliminar su barra estabilizadora.

REFERENCIAS

- R. Lozano A. Dzul and P. Castillo. Adaptive control for a radio-controlled helicopter in a vertical flying stand. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 2004.
- António P. Aguiar, Dragan B. Dačić, João Pedro Hespanha, and Petar Kokotović. Path-following or reference-tracking? An answer based on limits of performance. In *Proc. of the 5th IFAC Symp. on Intelligent Autonomous Vehicles*, July 2004.
- Dragan B. Dačić, Maxim V. Subbotin, and Petar Kokotović. Path-following for a class of nonlinear systems with unstable zero dynamics. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, December 2004.
- D. Nesić D.B. Dacic and P.V. Kokotovic. Path-following for nonlinear systems with unstable zero dynamics. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(3):481 – 487, 2007.
- Farbod Fahimi and Mehdi Saffarian. The control point concept for nonlinear trajectory-tracking control of autonomous helicopters with fly-bar. *International Journal of Control*, 84(2):242–252, 2011.
- K. P. Valavanis I. A. Raptis and G. J. Vachtsevanos. Linear tracking control for small-scale unmanned helicopters. *IEEE Transactions on control systems technology*, 20(4): 995–1010, 2007.
- A. Isidori. *Nonlinear Control System*. Springer, 1989.

- T. J. Koo and S. Sastry. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, 4, 1998.
- J.B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences, A Primer with Application to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton University Press, 1999.
- L. Marconi and R. Naldi. Robust full degree-of-freedom tracking control of a helicopter. *Automatica*, 47:1909 – 1920, 2007.
- B. Mettler. *Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*. Klumer Academic Publishers, 2003.
- T. I. Fossen R. Skjetne and P. Kokotovic. Output maneuvering for a class of nonlinear systems. In *15th Triennial World Congress*, 2002.
- A. Raptis and K.P. Valavanis. *Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopter*. Springer, 2010.