

Una función de Lyapunov suave para el algoritmo Super–Twisting^{*}

Jaime A. Moreno^{*}, Tonámetl Sánchez^{*} y Emmanuel Cruz^{*}

^{*} Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 México D.F., Mexico (e-mail: JMorenoP@ii.unam.mx,
TSanchezR@iingen.unam.mx, emitacz@yahoo.com.mx).

Resumen: Como principal contribución de este artículo, se presenta una función de Lyapunov para el algoritmo por Modos Deslizantes *Super–Twisting*. Sin embargo, la mayor relevancia del trabajo es que por primera vez en la literatura se introduce una función una vez diferenciable con continuidad para el algoritmo Super–Twisting. Tal característica de suavidad, permite que la función sea utilizada para aplicar fácilmente los teoremas clásicos para análisis de sistemas no lineales, tales como, los de estabilidad de Lyapunov, Estabilidad Entrada–Estado y de Pasividad.

Palabras clave: Modos Deslizantes, Estabilidad de Lyapunov, Métodos de Lyapunov.

1. INTRODUCCIÓN

Desde su aparición en (Levant, 1993), el algoritmo *Super–Twisting* ha recibido una enorme atención. Esta apreciable distinción del resto de los algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior es debida a las favorables propiedades que lo caracterizan. Nos referimos a la robustez, exactitud y convergencia en tiempo finito. Este algoritmo por Modos Deslizantes de Segundo Orden ha sido utilizado como controlador (Levant, 1993), observador (Davila et al., 2005) y diferenciador (Levant, 1998).

Tanto la robustez como la convergencia en tiempo finito del algoritmo Super–Twisting han sido demostradas a través de métodos geométricos (Levant, 2007) y por propiedades de homogeneidad ponderada (Levant, 2005; Orlov, 2005). Por otro lado, para el algoritmo Super–Twisting no perturbado, es decir

$$\dot{x}_1 = -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_2|x_1|^0,$$

donde $[\cdot]^p \equiv |\cdot|^p \text{sign}(\cdot)$, existe la función de Lyapunov

$$V_w(x) = k_2|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Esta función es *débil* ya que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema, dada por

$$\dot{V}(x) = -k_1k_2|x_1|^{1/2},$$

es solo negativa semidefinida. Por lo tanto la estabilidad del origen (en tiempo finito) solo puede ser asegurada utilizando una generalización del Principio de Invarianza de LaSalle para sistemas discontinuos (Orlov, 2005), además con esta función no es posible hacer un estudio de robustez o estimar el tiempo de convergencia.

En (Utkin et al., 2009) se determina la robustez y la convergencia en tiempo finito del algoritmo Super–Twisting a través de un análisis minucioso de la función de Lyapunov débil $\sqrt{V_w(x)}$. Otra función de Lyapunov para el

algoritmo Super–Twisting fue propuesta en (Polyakov and Poznyak, 2009). Esta función es *estricta* (o *fuerte*), es decir, la función es positiva definida y su derivada es negativa definida. Con dicha función se establece una estimación del tiempo de convergencia para en el caso perturbado. Sin embargo, la complicada estructura de esta función, puede hacer difícil su operación para otros desarrollos o aplicaciones.

En (Moreno and Osorio, 2008) se propuso la función de Lyapunov estricta dada por

$$V(x) = \zeta^T P \zeta, \quad \zeta^T = \left[|x_1|^{\frac{1}{2}}, x_2 \right], \quad (1)$$

donde P es una matriz constante, simétrica y positiva definida. La ventaja más obvia de (1) es su simpleza ya que es una forma cuadrática en ζ y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema no perturbado está dada (casi en todas partes) por

$$\dot{V} = -|x_1|^{-1/2} \zeta^T Q \zeta,$$

además las matrices P y Q quedan relacionadas por la Ecuación Algebraica de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La matriz A es Hurwitz si y solo si $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. Así, para cada $Q = Q^T > 0$ existe una (única) solución $P = P^T > 0$ para (2) y por lo tanto (1) es una función de Lyapunov estricta para el algoritmo Super–Twisting no perturbado. Adicionalmente, dada una condición inicial $x(0) = x_0$, la trayectoria convergerá al origen en un tiempo menor a $T(x_0)$, dado por

$$T(x_0) = \frac{2}{\sigma} V^{\frac{1}{2}}(x_0), \quad \sigma = \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\} \lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}},$$

donde σ es una constante que solo depende de las ganancias k_1 , k_2 y de la matriz Q .

Aunque los resultados anteriores lucen muy simples, se requiere hacer un análisis más cuidadoso ya que (1) es continua pero desafortunadamente no es localmente Lipschitz. Por tal razón las versiones clásicas de los teoremas

^{*} Los autores están ampliamente agradecidos con el apoyo financiero de PAPIIT, UNAM, grant IN113614, Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, IISGBAS-109-2013 y CONACyT CVU's: 371652, 267513.

de Lyapunov no pueden ser utilizadas (Filippov, 1988; Bacciotti and Rosier, 2005; Orlov, 2005) puesto que en ellas se requiere que la función de Lyapunov sea diferenciable o al menos continua y localmente Lipschitz. Además el hecho de que (1) no sea Lipschitz introduce serios problemas en el análisis de perturbaciones. Por ejemplo, si se toma la derivada de (1) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (vea (3) abajo), aparecerá el término $(x_2/|x_1|^{1/2})\rho_1(t)$, el cuál es verdaderamente difícil de tratar.

A pesar de que, en principio, es posible utilizar funciones de Lyapunov no suaves para estudiar el efecto de las entradas en sistemas discontinuos (vea por ejemplo (Moreno and Osorio, 2008) para el algoritmo Super-Twisting), esto puede convertirse en una tarea muy complicada, laboriosa e incluso truculenta. Además, las funciones de tipo energía no suaves (como (1)) no permiten utilizar teoremas clásicos para realizar otro tipo de análisis (tales como Estabilidad Entrada-Estado).

Con la intención de evitar las dificultades mencionadas con anterioridad, la principal contribución de el presente trabajo es proporcionar una función de Lyapunov diferenciable y de estructura muy simple para el algoritmo Super-Twisting. También se muestra que utilizando esta función suave se pueden verificar, con relativa simplicidad, propiedades adicionales del sistema tales como Pasividad y Estabilidad Entrada-Estado.

La organización del presente documento es la siguiente: La función de Lyapunov suave es presentada en la siguiente sección; En la Sección III, la función suave es utilizada para hacer un análisis de perturbaciones; Un análisis de Estabilidad Entrada-Estado es desarrollado en la Sección IV; En la Sección V se verifica la propiedad de Pasividad del algoritmo Super-Twisting para una salida en particular y finalmente, en la Sección VI se dan algunas conclusiones.

2. FUNCIÓN DE LYAPUNOV SUAVE PARA EL ALGORITMO SUPER-TWISTING NO PERTURBADO

Considere el algoritmo *Super-Twisting* (Levant, 1993) dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2 + \rho_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -k_2|x_1|^0 + \rho_2(t). \end{aligned} \quad (3)$$

donde $[\cdot]^p \equiv |\cdot|^p \text{sign}(\cdot)$, $x^T = [x_1 \ x_2] \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ son ganancias positivas a ser diseñadas y las funciones $\rho_1(t), \rho_2(t) \in \mathbb{R}$ denotan a las perturbaciones e incertidumbres del sistema.

Teorema 1. Suponga que $\rho_1(t) \equiv \rho_2(t) \equiv 0$, entonces la función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$V(x) = \frac{2}{3}\gamma_1|x_1|^{3/2} - \gamma_{12}x_1x_2 + \frac{1}{3}\gamma_2|x_2|^3, \quad (4)$$

es una función de Lyapunov suave y estricta para (3) si y solo si las ganancias del sistema k_1, k_2 , y los coeficientes $\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_2$ de (4) se eligen tales que se satisfaga el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} g_2g_1^2 &> 1, \\ 1 &> g_2k_2, \\ g_1k_1 &> k_2, \\ (g_1k_1 - k_2)(1 + g_2k_2) &> \frac{1}{4}(g_1 + k_1)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

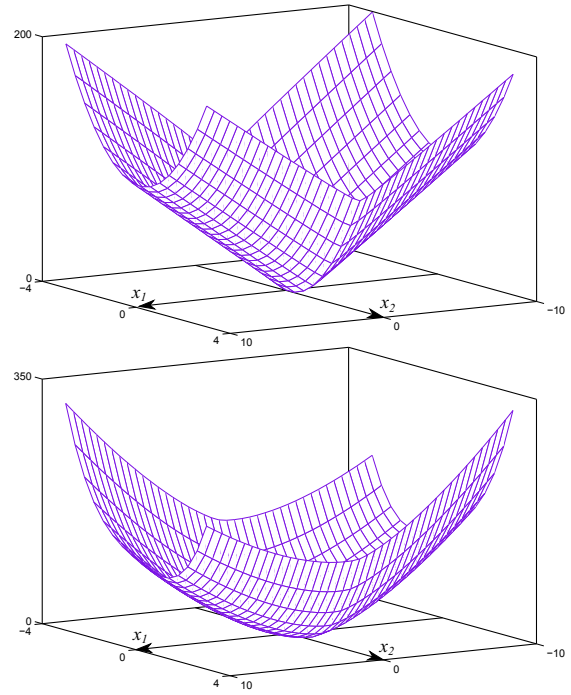


Fig. 1. Gráficas de ejemplo de las funciones (1) y (4).

donde $g_1 = \gamma_1/\gamma_{12}$ y $g_2 = \gamma_2/\gamma_{12}$.

En la Figura 1 se pueden comparar las gráficas de (1) y (4). Observe la notable mejora en la suavidad de (4).

Demostración. La demostración del Teorema 1 se divide en dos partes principales; primero se verifica la positividad de V y posteriormente la negatividad de \dot{V} . Antes de comenzar se recuerda la desigualdad de Young. Para cualesquiera números reales $a > 0, b > 0, c > 0, p > 1$ y $q > 1$, con $p^{-1} + q^{-1} = 1$, la siguiente desigualdad se satisface:

$$ab \leq \frac{c^p}{p}a^p + \frac{c^{-q}}{q}b^q. \quad (6)$$

Positividad de V :

Utilizando (6) en (4) se obtiene que:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \frac{2\gamma_1}{3}|x_1|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{12} \left(\frac{2c^{\frac{3}{2}}}{3}|x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{c^{-3}}{3}|x_2|^3 \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_2}{3}|x_2|^3 \\ &\geq \frac{2}{3} \left(\gamma_1 - \gamma_{12}c^{\frac{3}{2}} \right) |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_{12}^2}{c^3} \right) |x_2|^3, \end{aligned} \quad (7)$$

para todo $c > 0$, por lo tanto $V(x) > 0$ si y solo si

$$\gamma_1 - \gamma_{12}c^{\frac{3}{2}} > 0, \quad \gamma_2 - \gamma_{12}c^{-3} > 0,$$

o equivalentemente $\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{12}}\right)^2 > c^3, c^3 > \frac{\gamma_{12}}{\gamma_2}$. Note que existe una $c > 0$ tal que las últimas dos desigualdades se satisfacen si y solo si

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_2} < \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{12}}\right)^2, \quad (8)$$

la cual es la condición necesaria y suficiente para garantizar la positividad definida de $V(x)$.

Negatividad de \dot{V} :

La derivada de (4) a lo largo de las trayectorias de (3), con $\rho(t) \equiv 0$, está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_1 [x_1]^{\frac{1}{2}} (-k_1 [x_1]^{\frac{1}{2}} + x_2) - \gamma_{12} x_2 (-k_1 [x_1]^{\frac{1}{2}} + x_2) \\ &\quad - \gamma_2 |x_2|^2 \text{sign}(x_2) k_2 \text{sign}(x_1) + \gamma_{12} x_1 k_2 \text{sign}(x_1) \\ &= -(\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) |x_1| + (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1) [x_1]^{\frac{1}{2}} x_2 \\ &\quad - \gamma_{12} |x_2|^2 - \gamma_2 k_2 |x_2|^2 \text{sign}(x_1 x_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Para demostrar la negatividad definida de \dot{V} observe que a partir de (9) se tiene que

$$-\dot{V} = \begin{cases} \delta_1 |x_1| - \delta_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2| + \delta_3 |x_2|^2, & x_1 x_2 > 0 \\ \delta_1 |x_1| + \delta_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2| + \delta_4 |x_2|^2, & x_1 x_2 < 0 \end{cases},$$

donde $\delta_1 = \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2$, $\delta_2 = \gamma_1 + \gamma_{12} k_1$, $\delta_3 = \gamma_{12} + \gamma_2 k_2$, y $\delta_4 = \gamma_{12} - \gamma_2 k_2$. Observe que para $x_1 x_2 < 0$, $-\dot{V}$ es positiva si y solo si $\delta_1 > 0$ y $\delta_4 > 0$. También note que $-\dot{V}$ se puede reescribir como la forma cuadrática

$$-\dot{V} = -W(x) = \begin{cases} \zeta^T A_1 \zeta & \text{if } x_1 x_2 > 0 \\ \zeta^T A_2 \zeta & \text{if } x_1 x_2 < 0 \end{cases}, \quad (10)$$

donde el vector $\zeta^T = [[x_1]^{\frac{1}{2}}, x_2]$ y las matrices A_1, A_2 están dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 & -\frac{1}{2}\delta_2 \\ -\frac{1}{2}\delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \delta_1 & \frac{1}{2}\delta_2 \\ \frac{1}{2}\delta_2 & \delta_4 \end{bmatrix}.$$

Para $x_1 x_2 > 0$, $-\dot{V}$ es positiva si y solo si A_1 es una matriz positiva definida, lo que es equivalente a que $\delta_1 > 0$ y $\delta_1 \delta_3 - \frac{1}{4} \delta_2^2 > 0$. Así, (9) es negativa definida si y solo si se satisface el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} \gamma_1 k_1 &> \gamma_{12} k_2 \\ \gamma_{12} &> \gamma_2 k_2 \\ (\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) (\gamma_{12} + \gamma_2 k_2) &> \frac{1}{4} (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

En resumen, (4) es una función de Lyapunov para (3) en su caso no perturbado si y solo si las desigualdades (8) y (11) se satisfacen, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_2}{\gamma_{12}} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{12}} \right)^2 &> 1 \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_{12}} k_1 &> k_2 \\ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{12}} k_1 - k_2 \right) \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_{12}} k_2 \right) &> \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{12}} + k_1 \right)^2, \\ 1 &> \frac{\gamma_2}{\gamma_{12}} k_2 \end{aligned} \quad (12)$$

QED.

A continuación se realiza un análisis para verificar que la solución de (12) no es un conjunto vacío. Considere las cuatro ecuaciones siguientes (definidas en el Teorema 1):

$$g_2 = \frac{1}{g_1^2}, g_1 = \frac{k_2}{k_1}, g_2 = \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2) k_2} - \frac{1}{k_2}, g_2 = \frac{1}{k_2}.$$

Si se consideran estas ecuaciones como curvas en el plano (g_1, g_2) , la tercera curva alcanza su mínimo en

$$\frac{dg_2}{dg_1} = 0 \Leftrightarrow \bar{g}_1 = \frac{k_1^2 + 2k_2}{k_1}, \quad \bar{g}_2 = \frac{1}{k_1^2}.$$

Para que existan soluciones (12), la tercera y cuarta curva deben tener intersección, lo cual es cierto si y solo si

$$\frac{1}{k_2} > \frac{1}{k_1^2} \Leftrightarrow k_1^2 > k_2. \quad (13)$$

Esta condición asegura que la solución de (12) es un conjunto no vacío. Ahora, el punto de intersección de las primera y cuarta curvas es $(g_1^*, g_2^*) = (\sqrt{k_2}, 1/k_2)$ mientras que los dos puntos de intersección de las tercera y cuarta curvas son $(\hat{g}_{1l}, \hat{g}_2) = (3k_1 - 2\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 - k_2}, \frac{1}{k_2})$

y $(\hat{g}_{1r}, \hat{g}_2) = (3k_1 + 2\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 - k_2}, \frac{1}{k_2})$, donde \hat{g}_{1l} y \hat{g}_{1r} son las dos soluciones de la ecuación

$$\frac{1}{k_2} = \frac{(\hat{g}_1 + k_1)^2}{4(\hat{g}_1 k_1 - k_2) k_2} - \frac{1}{k_2} \Leftrightarrow \hat{g}_1^2 - 6k_1 \hat{g}_1 + k_1^2 + 8k_2 = 0.$$

De manera que el sistema (12) tiene solución si $g_1^* < \hat{g}_{1r}$, esto es

$$\sqrt{k_2} < 3k_1 + 2\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 - k_2}. \quad (14)$$

Es fácil ver que esta última desigualdad se cumple si (13) se satisface.

Observación 1: De acuerdo a (Moreno and Osorio, 2008), usando la función no Lipschitz (1), se pueden establecer las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad en tiempo finito del origen de (3), en el caso no perturbado. Tales condiciones son $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. Sin embargo, usando la función diferenciable (4), solo se puede asegurar estabilidad en tiempo finito del origen de (3) si se satisface la desigualdad (13). Esta condición más restrictiva se ejemplifica en la Figura 2 donde las ganancias permitidas, usando (4), se encuentran a la derecha de la línea sólida azul, mientras que las ganancias permitidas con (1) están a la derecha de la línea punteada verde.

Ejemplo 2. Considere que $\gamma_1 = k_1$, $\gamma_{12} = 1$ y $\gamma_2 = (1 + a)/k_1^2$, con $a > 0$, entonces la función de Lyapunov está dada por

$$V = \frac{2}{3} k_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} - x_1 x_2 + \frac{1+a}{3k_1^2} |x_2|^3. \quad (15)$$

Con esta elección, $g_1 = k_1$ y $g_2 = (1 + a)/k_1^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} g_2 g_1^2 &> 1 && \Rightarrow a > 0, \\ 1 &> g_2 k_2 && \Rightarrow k_1^2 > (1 + a) k_2, \\ g_1 k_1 &> k_2 && \Rightarrow k_1^2 > k_2, \\ (1 + g_2 k_2) &> \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2)} && \Rightarrow a k_1^2 > (1 + a) k_2. \end{aligned}$$

El anterior sistema de desigualdades se satisface si $a > 0$ y $k_1^2 > \max\{(1 + a), (1 + a)/a\} k_2$. Lo anterior se puede interpretar como sigue: Si $a > 0$, la función (16) es positiva definida, pero también lo es si $k_1^2 > \max\{(1 + a), (1 + a)/a\} k_2$ y la derivada temporal de (16) a lo largo de las trayectorias de (3) es negativa definida. Debido a la incorrecta elección de los coeficientes de (16), la condición (13) no se recupera.

Ejemplo 3. Ahora considere $\gamma_1 = (k_1^2 + 2k_2)/k_1$, $\gamma_{12} = 1$ y $\gamma_2 = (1 + a)/k_1^2$, con $a > 0$, entonces

$$V = \frac{2}{3} \frac{k_1^2 + 2k_2}{k_1} |x_1|^{\frac{3}{2}} - x_1 x_2 + \frac{1+a}{3k_1^2} |x_2|^3. \quad (16)$$

Además, $g_1 = (k_1^2 + 2k_2)/k_1$ y $g_2 = (1 + a)/k_1^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} g_2 g_1^2 &> 1 && \Rightarrow k_1^2 + k_2 > 0, \\ 1 &> g_2 k_2 && \Rightarrow k_1^2 > (1 + a) k_2, \\ g_1 k_1 &> k_2 && \Rightarrow k_1^2 + k_2 > 0, \\ (1 + g_2 k_2) &> \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2)} && \Rightarrow a(k_1^2 + k_2) > 0. \end{aligned}$$

Este conjunto de desigualdades se satisface si y solo si $a > 0$ y $k_1^2 > (1 + a) k_2$. Adicionalmente, la condición (13) se cumple para cualquier valor de a lo suficientemente pequeño.

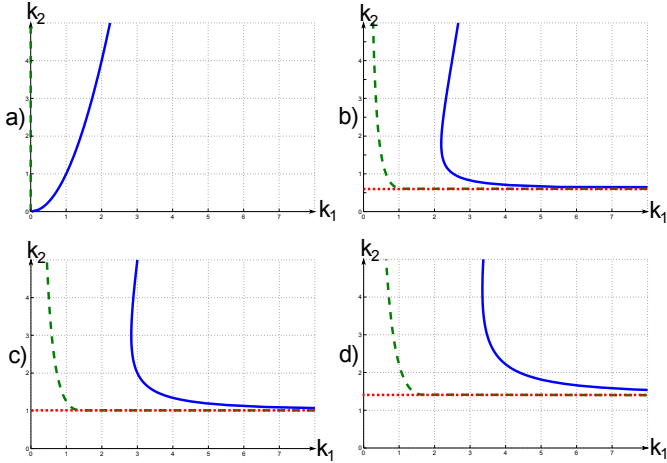


Fig. 2. Comparación entre los conjuntos de ganancias permitidas que se determinan con (1) y (4) para algunos valores de $|\rho_2(t)|$. a) $\rho_2(t) = 0$, b) $|\rho_2(t)| = 0.6$, c) $|\rho_2(t)| = 1$, y d) $|\rho_2(t)| = 1.4$.

3. ANÁLISIS DE PERTURBACIONES

En esta sección se realizará un análisis de perturbaciones para el algoritmo Super-Twisting utilizando la función diferenciable obtenida en la sección anterior. Considere (3) con las entradas $\rho_1(t) \equiv 0$ y $\rho_2(t) \neq 0$. Para este caso y haciendo uso de (4) se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema 4. El origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 |x_1|^0 + \rho_2(t) \end{aligned} \quad (17)$$

es un punto de equilibrio estable en tiempo finito para toda perturbación acotada $\rho_2(t)$ si las ganancias k_1 y k_2 se eligen tales que:

$$k_2 > |\rho_2(t)| \quad \text{y} \quad k_1^2 > \frac{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2}{k_2 - |\rho_2(t)|}.$$

Además (4) es una función de Lyapunov (robusta) para (17) si y solo si

$$\begin{aligned} g_2 g_1^2 &> 1 \\ g_1 k_1 &> k_2 + |\rho_2(t)| \\ 1 + g_2 (k_2 - |\rho_2(t)|) &> \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2 - |\rho_2(t)|)} \\ 1 &> g_2 (k_2 + |\rho_2(t)|) \end{aligned} \quad (18)$$

donde $g_1 = \gamma_1/\gamma_{12}$ y $g_2 = \gamma_2/\gamma_{12}$.

Observación 2: De manera similar que en el caso no perturbado (ver Observación 1), con la función de Lyapunov no Lipschitz (1) es posible determinar las condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias k_1 y k_2 que garantizan la estabilidad en tiempo finito del origen de (17) (véase por ejemplo el Teorema 4.2 de (Moreno., 2012)). Sin embargo, con la función de Lyapunov suave (4), solo es posible determinar un conjunto de ganancias más pequeño que el obtenido con (1). Este hecho se ejemplifica en la Figura 2. Con función de Lyapunov no Lipschitz las ganancias válidas se deben seleccionar a la derecha de la línea punteada verde y sobre la línea sólida roja. En cambio, con la función de Lyapunov suave, las ganancias se seleccionan a la derecha de la línea sólida azul.

Demostración. Ya se ha demostrado la positividad definida de (4). Ahora, tomando su derivada a lo largo de las trayectorias de (17) se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) |x_1| + (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1) [x_1]^{\frac{1}{2}} x_2 \\ &\quad - \gamma_{12} |x_2|^2 - \gamma_2 k_2 [x_1 x_2]^0 |x_2|^2 \\ &\quad + (-\gamma_{12} x_1 + \gamma_2 [x_2]^2) \rho_2(t) \\ &\leq -(\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) |x_1| + (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1) [x_1]^{\frac{1}{2}} x_2 \\ &\quad - \gamma_{12} |x_2|^2 - \gamma_2 k_2 |x_2|^2 [x_1 x_2]^0 + \gamma_{12} |x_1| |\rho_2(t)| \\ &\quad + \gamma_2 |x_2|^2 |\rho_2(t)|. \end{aligned}$$

Siguiendo un proceso similar al de la sección anterior, se tiene que

$$-\dot{V} \geq \begin{cases} \delta_1 |x_1| - \delta_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2| + \delta_3 |x_2|^2, & x_1 x_2 > 0 \\ \delta_1 |x_1| + \delta_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2| + \delta_4 |x_2|^2, & x_1 x_2 < 0 \end{cases},$$

donde $\delta_1 = \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{12} |\rho_2(t)|$, $\delta_2 = \gamma_1 + \gamma_{12} k_1$, $\delta_3 = \gamma_{12} + \gamma_2 k_2 - \gamma_2 |\rho_2(t)|$, y $\delta_4 = \gamma_{12} - \gamma_2 k_2 - \gamma_2 |\rho_2(t)|$. Es fácil ver que para $x_1 x_2 < 0$, $-\dot{V} > 0$ si $\delta_1, \delta_4 > 0$, mientras que para $x_1 x_2 > 0$, $-\dot{V} > 0$ si $\delta_1 > 0$ y $\delta_1 \delta_2 - \delta_3^2 > 0$. Entonces \dot{V} es negativa definida si

$$\begin{aligned} \gamma_1 k_1 &> \gamma_{12} (k_2 + |\rho_2(t)|), \\ \gamma_{12} + \gamma_2 (k_2 - |\rho_2(t)|) &> \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1 + \gamma_{12} k_1)^2}{\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} (k_2 + |\rho_2(t)|)}, \\ \gamma_{12} &> \gamma_2 (k_2 + |\rho_2(t)|), \end{aligned}$$

y por lo tanto (4) es una función de Lyapunov estricta para (17) si se satisface el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} g_2 g_1^2 &> 1 \\ g_1 k_1 &> k_2 + |\rho_2(t)| \\ 1 + g_2 (k_2 - |\rho_2(t)|) &> \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2 - |\rho_2(t)|)} \\ 1 &> g_2 (k_2 + |\rho_2(t)|) \end{aligned}$$

donde $g_1 = \gamma_1/\gamma_{12}$ y $g_2 = \gamma_2/\gamma_{12}$. Ahora se demostrará que el anterior sistema de desigualdades tiene solución no trivial. Considere las cuatro curvas (ecuaciones) en el plano (g_1, g_2) dadas por

$$g_2 = \frac{1}{g_1^2}, \quad g_1 = \frac{k_2 + |\rho_2(t)|}{k_1}, \quad g_2 = \frac{1}{k_2 + |\rho_2(t)|},$$

$$g_2 = \frac{(g_1 + k_1)^2}{4(g_1 k_1 - k_2 - |\rho_2(t)|)(k_2 - |\rho_2(t)|)} - \frac{1}{(k_2 - |\rho_2(t)|)}.$$

La cuarta curva alcanza su mínimo en el punto

$$\bar{g}_2 = (k_2 + |\rho_2(t)|) / (k_1^2 (k_2 - |\rho_2(t)|)),$$

esto es debido a que $dg_2/dg_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{g}_1 = (k_1^2 + 2(k_2 + |\rho_2(t)|))/k_1$. Para que exista solución del sistema de desigualdades (18), la tercera y cuarta curvas deben intersectarse, esto ocurre si y solo si

$$\frac{1}{k_2 + |\rho_2(t)|} > \frac{k_2 + |\rho_2(t)|}{k_1^2 (k_2 - |\rho_2(t)|)} \Leftrightarrow k_1^2 > \frac{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2}{k_2 - |\rho_2(t)|}. \quad (19)$$

Esta condición asegura que las últimas tres desigualdades de (18) tienen solución. Ahora, el punto de intersección de las primera y tercer curvas está dado por $(g_1^*, g_2^*) = (\sqrt{k_2 + |\rho_2(t)|}, (k_2 + |\rho_2(t)|)^{-1})$ mientras que los dos puntos de intersección de las tercer y cuarta curvas son

$$(\hat{g}_1, \hat{g}_2) = \left(k_1 \frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} - \sqrt{8} \sqrt{\frac{k_1^2 k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2}, \frac{1}{k_2} \right)$$

$$(\hat{g}_{1r}, \hat{g}_2) = \left(k_1 \frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} + \sqrt{8} \sqrt{\frac{k_1^2 k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2}, \frac{1}{k_2} \right)$$

donde \hat{g}_{1l} y \hat{g}_{1r} son las dos soluciones de la ecuación

$$\frac{1}{k_2 + |\rho_2(t)|} = \frac{(\hat{g}_1 + k_1)^2}{4(\hat{g}_1 k_1 - k_2 - |\rho_2(t)|)(k_2 - |\rho_2(t)|)} - \frac{1}{(k_2 - |\rho_2(t)|)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{g}_1^2 + k_1^2 + 8k_2 + 2k_1 \hat{g}_1 \frac{-3k_2 + |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &= k_1 \left(\frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} \right) \pm \sqrt{k_1^2 \left(\frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} \right)^2 - (k_1^2 + 8k_2)} \\ &= k_1 \left(\frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} \right) \pm 2\sqrt{2} \sqrt{k_1^2 \frac{k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2} \\ &= k_1 \left(\frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} \right) \pm 2\sqrt{2} \sqrt{k_1^2 \frac{k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2}. \end{aligned}$$

Así, (18) tiene solución no trivial si $g_1^* < \hat{g}_{1r}$, es decir

$$\sqrt{k_2 + |\rho_2(t)|} < k_1 \frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} + \sqrt{8} \sqrt{\frac{k_1^2 k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2}.$$

Note que si se satisface (19) entonces de esta última desigualdad se obtiene que

$$\begin{aligned} \left(k_1 \frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{k_2 + |\rho_2(t)|} + 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{k_1^2 k_2 (k_2 - |\rho_2(t)|)}{(k_2 + |\rho_2(t)|)^2} - k_2} \right)^2 &> \\ \left(\frac{3k_2 - |\rho_2(t)|}{(k_2 - |\rho_2(t)|)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 &= \left(\frac{2k_2}{(k_2 - |\rho_2(t)|)^{\frac{1}{2}}} + (k_2 - |\rho_2(t)|)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{4k_2^2}{k_2 - |\rho_2(t)|} + 5k_2 - |\rho_2(t)| > k_2 + |\rho_2(t)|, \end{aligned}$$

la última desigualdad se satisface ya que $k_2 > |\rho_2(t)|$. Así, finalmente, debido a que las condiciones $k_2 > |\rho_2(t)|$ y (19) pueden cumplirse, V es una función de Lyapunov (robusta) para el sistema (17).

4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO

El tema de Estabilidad Entrada-Estado para el algoritmo Super-Twisting ya ha sido tratado con anterioridad (vea por ejemplo (Bernuau et al., 2014) y las referencias en él), sin embargo en estos trabajos no se puede hacer uso de los teoremas clásicos para caracterizar la Estabilidad Entrada-Estado (Sontag and Wang, 1995)¹. La principal intención de esta sección es evidenciar otra ventaja que se obtiene al contar con una función de Lyapunov suave para el Super-Twisting. Así, resulta muy simple verificar la propiedad de Estabilidad Entrada-Estado para (3) considerando $\rho_1(t)$ como la entrada y $\rho_2(t) \equiv 0$ (vea la Figura 3).



Fig. 3. Diagrama Entrada-Estado

¹ Para estos teoremas se puede consultar también (Sontag, 2001) y el capítulo cuatro de (Khalil, 2002)

Teorema 5. El sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2 + \rho_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -k_2 |x_1|^0, \end{aligned} \quad (20)$$

es *Entrada-Estado Estable*.

Demostración. Tomando la derivada de (4) a lo largo de las trayectorias de (20) se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) |x_1| (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1) |x_1|^{\frac{1}{2}} x_2 - \gamma_{12} |x_2|^2 \\ &\quad - \gamma_2 k_2 |x_2|^2 \text{sign}(x_1 x_2) + (\gamma_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12} x_2) \rho_1(t) \\ &\leq -(\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2) |x_1| (\gamma_1 + \gamma_{12} k_1) |x_1|^{\frac{1}{2}} x_2 - \gamma_{12} |x_2|^2 \\ &\quad - \gamma_2 k_2 |x_2|^2 \text{sign}(x_1) + |\gamma_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12} x_2| |\rho_1(t)|. \end{aligned} \quad (21)$$

Si se toma en cuenta (10) y el hecho de que

$$|\gamma_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12} x_2| \leq \gamma \|\zeta\|, \quad \gamma = \|(\gamma_1, \gamma_{12})\|,$$

entonces se puede reescribir (21) para $\{x_1 x_2 > 0\}$ como sigue:

$$\dot{V} \leq -\zeta^T A_1 \zeta + \gamma \|\zeta\| |\rho_1(t)|.$$

Para dominar el término $\gamma \|\zeta\| |\rho_1(t)|$ con el término $\zeta^T A_1 \zeta$ se introduce el parámetro θ , así,

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) \zeta^T A_1 \zeta - \theta \zeta^T A_1 \zeta + \gamma \|\zeta\| |\rho_1(t)|.$$

Se puede probar que la norma de ζ está acotada por una función de la norma de $\rho_1(t)$. Así, es fácil ver de la última desigualdad que

$$-\theta \zeta^T A_1 \zeta + \gamma \|\zeta\| |\rho_1(t)| \leq -\theta \lambda_{\min}(A_1) \|\zeta\|^2 + \gamma \|\zeta\| |\rho_1(t)|.$$

Por lo tanto $\dot{V} \leq -(1 - \theta) \zeta^T A_1 \zeta$ para todo $x \in \{x_1 x_2 > 0\}$ si

$$\|\zeta\| \geq \frac{\gamma}{\theta \lambda} |\rho_1(t)|,$$

donde $\lambda = \lambda_{\min}(A_1)$. Ahora, para el conjunto $\{x_1 x_2 < 0\}$,

$$\dot{V} = -(1 - \theta) \zeta^T A_2 \zeta - \theta \zeta^T A_2 \zeta + (\gamma_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12} x_2) \rho_1(t),$$

de manera que $\dot{V} \leq -(1 - \theta) \zeta^T A_2 \zeta$ para toda $x \in \{x_1 x_2 < 0\}$ si

$$(\delta_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} + \delta_3 |x_2|) \geq \frac{\gamma_1}{\theta} |\rho_1(t)|,$$

y

$$(\delta_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} + \delta_4 |x_2|) \geq \frac{\gamma_{12}}{\theta} |\rho_1(t)|,$$

donde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 se definen como en la prueba del Teorema 1.

5. UN RESULTADO DE PASIVIDAD

En esta sección se da un ejemplo más en el que se puede aplicar la función de Lyapunov suave para el algoritmo Super-Twisting. El ejemplo consiste en verificar la propiedad de pasividad del Super-Twisting para una clase de entradas y salidas en particular. Recuerde que la propiedad de Pasividad de un sistema depende de la entrada y de la salida que se elija (Salida Pasiva)². Para esto, considere nuevamente (3), pero ahora en la siguiente representación de Entrada-Salida:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u(t), \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (22)$$

² Un breve tratado sobre Pasividad puede consultarse en el capítulo seis de (Khalil, 2002)

donde $u, y \in \mathbb{R}$ son la entrada y la salida respectivamente, $g(x) = [g_1(x), g_2(x)]^T \in \mathbb{R}^2$ y el campo vectorial f es el campo vectorial del Super-Twisting, esto es:

$$f(x) = \left[-k_1[x_1]^{\frac{1}{2}} + x_2, -k_2[x_1]^0 \right]^T.$$

Teorema 6. Si las ganancias k_1, k_2 y los coeficientes de la función (4) son seleccionados como lo indica el Teorema 1, entonces (22) es un sistema estrictamente pasivo para la salida

$$y = h(x), \quad h(x) = \begin{bmatrix} \gamma_1[x_1]^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12}x_2 \\ -\gamma_{12}x_1 + \gamma_2[x_2]^2 \end{bmatrix} g(x),$$

con la función de almacenamiento (4).

Demostración. Tomando la derivada de (4) a lo largo de las trayectorias de (22) se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -W(x) + \left(\gamma_1[x_1]^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12}x_2 \right) g_1(x)u(x) \\ &\quad + (-\gamma_{12}x_1 + \gamma_2[x_2]^2)g_2(x)u(x) \\ &= -W(x) + y(x)u(x). \end{aligned}$$

Sistemas interconectados

Note que usando esta representación también se puede, por ejemplo, estudiar la estabilidad L_2 del algoritmo Super-Twisting. Pero ahora se hará un sencillo análisis para sistemas interconectados (vea la Figura 4).

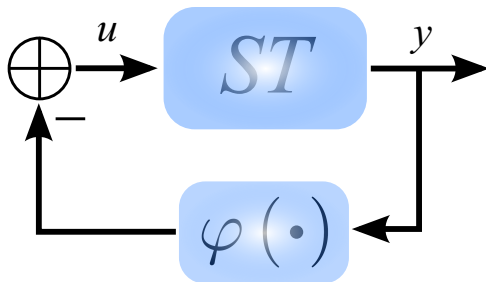


Fig. 4. Interconexión en retroalimentación negativa.

Teorema 7. Suponga que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable en tiempo finito del sistema (22) con $u(t) \equiv 0$ y la función de Lyapunov (4). Entonces (22) en retroalimentación negativa con la función no lineal $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vea la Figura 4) tiene un punto de equilibrio estable en tiempo finito en el origen si $y\varphi(y) \geq 0$.

Demostración. Tomando la derivada de (4) a lo largo de las trayectorias de (22) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -W(x) + \gamma_1[x_1]^{\frac{1}{2}} - \gamma_{12}x_2 b_1(x)u(x) \\ &\quad + (-\gamma_{12}x_1 + \gamma_2[x_2]^2)b_2(x)u(x) \\ &= -W(x) + y(x)u(x) \\ &= -W(x) - y(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

6. CONCLUSIONES

En este artículo se ha introducido (por primera vez en la literatura) una función de Lyapunov suave y de estructura muy simple para el algoritmo Super-Twisting. Se ha mostrado que a diferencia de las funciones de Lyapunov no suaves, la función diferenciable permite aplicar los teoremas de Lyapunov estándar. Adicionalmente, con la función de Lyapunov suave es muy fácil llevar a cabo diferentes

tipos de análisis de la Teoría clásica de Control No lineal. En particular, en el presente trabajo, se realizaron los análisis de Estabilidad entrada-Estado y Pasividad para el algoritmo Super-Twisting.

BIBLIOGRAFÍA

- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*, volume 267 of *Lect. notes in control & information Sci.* Springer-Verlag, New York.
- Bernaui, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of The Franklin Institute*, 351(4).
- Davila, J., Fridman, L., and Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1785–1789.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3th edition.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in Sliding Mode Control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to High-Order Sliding Mode design. *Automatica*, 41, 823–830.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-Sliding Mmode design. *Automatica*, 43(4), 576–586.
- Levant, A. (1998). Robust Exact Differentiation via Sliding Mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Moreno., J. (2012). A lyapunov approach to output feedback control using second order sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. DOI: 10.1093/imamci/dnr036.
- Moreno, J. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Orlov, Y. (2005). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.
- Polyakov, A. and Poznyak, A. (2009). Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “Twisting” controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2), 444–448.
- Sontag, E. (2001). *Nonlinear control in the year 2000*, volume 2, chapter The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior, 443–467. Springer.
- Sontag, E.D. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 24(5), 351–359.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (2009). *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, Taylor & Francis, London, UK, 2nd edition.