Memorias del XVI Congreso Latinoamericano
de Control Automático, CLCA 2014
Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México

Existencia de Hiperplanos Deslizantes con Control equivalente constante en la Estabilización de Sistemas Positivos

Horacio Leyva * **Francisco A. Carrillo** * **Griselda Quiroz** **
Ricardo Femat ***

* *Universidad de Sonora, Rosales and Transversal, Hermosillo, Sonora, México. (e-mail: hleyva@gauss.mat.uson.mx, carrillo@gauss.mat.uson.mx).*
** *Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, FIME, Av. Universidad S/N Ciudad Universitaria (e-mail: griselda.quirozcm@uanl.edu.mx)*
*** *Division de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, Camino a la Presa San José 2055, Col. Lomas 4a sección C.P. 78216 San Luis Potosí, S.L.P., México., (e-mail: rfemat@ipicyt.edu.mx)*

Resumen: Analizamos la rapidez de convergencia en la dinámica deslizante al variar el hiperplano deslizante y una metodología que permite mejorar la tasa de estabilización de una familia de sistemas positivos, dando condiciones suficientes para lograr la estabilización mediante la teoría de modos deslizantes. También se dan condiciones para obtener un plano deslizante donde el control deslizante o control equivalente, es constante. Ejemplificamos este resultado con dos problemas, el primero se refiere al modelo matemático de mezclas en dos tanques conectados en línea y el segundo es sobre el submodelo positivo lineal del comportamiento de la insulina en el cuerpo humano dado por Sorensen en su tesis doctoral, ver (Sorensen, 1985).

Palabras clave: Sistemas Positivos, Sistemas Compartimentales, Modos Deslizantes.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es una continuación de otro presentado en el Congreso AMCA 2013 ver (Leyva, et. al, 2013). Muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etc., involucran cantidades que se representan mediante variables positivas. Por ejemplo la concentración de substancias, el nivel de líquidos en tanques, la biomasa de una población, etc. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y las condiciones iniciales son no negativas (Rami y Tadeo, 2007). En tales sistemas también pueden considerarse controles positivos, por ejemplo en reactores y bioprocesos la acción de control está relacionada a caudales cuyo valor es estrictamente positivo. En este trabajo consideramos una familia de sistemas que satisfacen las hipótesis de la teoría de estabilidad para sistemas positivos, tales como los teoremas de Frobenius-Perron para matrices Metzler y el teorema de Gerschgorin aplicado a matrices compartimentales.

Consideremos el sistema lineal positivo con control positivo escalar

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n_+$ y $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$. Bajo tales condiciones de positividad para (1), presentamos un conjunto de resultados, en el ámbito de la teoría de modos deslizantes, que permiten la existencia de una dinámica deslizante sobre un (segmento de) hiperplano de dimensión $n-1$, contenido en el cono $\mathbb{R}^n_+$. Mediante esta dinámica deslizante podemos estabilizar rápidamente el sistema positivo (1). En dimensión n, presentamos los resultados que muestran la viabilidad del método. En el plano, para $n = 2$, demostramos la rapidez de estabilización mediante la optimización del valor propio λ_d que representa la dinámica deslizante sobre la recta.

2. PRELIMINARES

2.1 Sistemas Positivos

Considere el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A continuación se darán una serie de definiciones de conceptos con los que trabajaremos en esta y las siguientes secciones.

Definición 1. El sistema (2) es positivo si para cada $x(t_0) = x_0 \in \operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $t \geq 0$, sucede que la solución correspondiente $x(t; t_0; x_0) \in \operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ para toda $t \geq t_0$.

Definición 2. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es Metzler si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

A este tipo de sistemas se les denomina positivos porque el cono positivo $\mathbb{R}^n_+$ es un conjunto invariante, ver (Bellman, 1970).

Definición 3. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.

El Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler
Teorema 1. Sea A una matriz Metzler. Entonces, existen un numero real μ_0 y un vector $x_0 \geq 0$ tales que se cumple lo siguiente:

i) $Ax_0 = \mu_0 x_0$, y
ii) Si $\mu \neq \mu_0$ es cualquier otro valor propio de la matriz A, entonces $\mathrm{Re}(\mu) < \mu_0$.

Existen resultados para las matrices Metzler que establecen que para cualquier matriz Metzler A, su inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva, si y sólo si, todos sus valores propios están dentro del semiplano complejo izquierdo (valores propios con parte real estrictamente negativa), i.e, matrices Metzler que son a su vez Hurwitz. El siguiente teorema asegura que la estabilización de la dinámica controlada ocurra en $\mathbb{R}^n_+$.
Teorema 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz Metzler. La inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva si, y sólo si, A es Hurwitz (i.e., $\mu_0 < 0$).

Las pruebas para los teoremas 1 y 2 pueden verse en (Bellman, 1970) y (Berman, Neumann y Stern, 1989).

2.2 Modos Deslizantes

Consideremos el sistema (1), con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz Metzler y Hurwitz, $b \in \mathbb{R}^n_+$ y $r_2 > r_1 \geq 0$. Tales condiciones representan *condiciones de positividad*: el sistema lineal (1) es positivo si y sólo si la matriz A es Metzler y $b \geq 0$, $u \geq 0$, ver (Farina y Rinaldi, 2000).

Problema de estabilización
Si A es Metzler y Hurwitz en el sistema (1) tenemos que el punto de equilibrio positivo $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ (con $\bar{u} \in [r_1, r_2]$ constante) es global asintóticamente estable. Planteamos la pregunta:

¿Es posible incrementar la tasa de estabilización en $\bar{x}$ al considerar $u \in [r_1, r_2]$ en lugar de $u = \bar{u}$?

Para responder la pregunta anterior debemos considerar que el sistema (1) no es controlable; de acuerdo al teorema de controlabilidad de Brammer, ver el trabajo (Brammer, 1972). Si A tiene al menos un valor propio real, entonces el sistema (1) no es completamente controlable con control positivo. A continuación presentamos un método deslizante para responder al problema de estabilización rápida.

Resultados sobre sistemas deslizantes
Consideremos el sistema (1), donde la matriz A es como en la definición 2, el control $u \in [r_1, r_2]$, $r_2 > r_1 \geq 0$, con $b \in \mathbb{R}^n_+$.

Como referencia en el espacio de estado, consideremos los puntos de equilibrio positivos

$$\bar{x}_1 = -A^{-1}br_1 \qquad \text{y} \qquad \bar{x}_2 = -A^{-1}br_2$$

tal que $\|\bar{x}_1\| < \|\bar{x}_2\|$.

La hipótesis de que A es Hurwitz, implica que cada punto de equilibrio $\bar{x}_i$ es globalmente atractor para las soluciones del sistema retroalimentado $\dot{x} = Ax + br_i$, $i = 1, 2$. Con el objetivo de describir el deslizamiento, consideramos un vector constante $L \in \mathbb{R}^n_+$ definido por $L = (l_1,\ l_2)$ y un escalar constante $k > 0$, de manera que el segmento de hiperplano contenido en $\mathbb{R}^n_+$, representado por la igualdad

$$Lx = k \tag{3}$$

donde L y k representan parámetros por determinar, de manera que: 1) el deslizamiento tiene un valor propio λ_d más a la izquierda que los valores propios de A en el plano; 2) se cumple la condición de deslizamiento, expresada con el par de desigualdades:

$$\begin{aligned} &\lim_{(Lx-k)\to 0^+} L\,(Ax + br_1) < 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n_+, \\ &\lim_{(Lx-k)\to 0^-} L\,(Ax + br_2) > 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{4}$$

Para determinar la magnitud de k, consideremos el segmento de recta que une a los puntos de equilibrio, elegimos k de forma que el hiperplano, representado por $Lx - k = 0$, pase por un punto de equilibrio predeterminado $\bar{x}$ ver (Leyva, et. al, 2013), por consiguiente

$$k = L\bar{x} \tag{5}$$

Con las desigualdades (4) y, los valores de los parámetros r_1, r_2, $\bar{x}$, k y L, es conocido que mediante la aplicación del control discontinuo

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \tag{6}$$

tendremos que cualquier solución $x\,(t)$ que inicia fuera del hiperplano $Lx = k$, alcanza al hiperplano en tiempo finito. Es conocido que la aplicación del control discontinuo (6), que toma valores en los extremos del intervalo de restricción $[r_1, r_2]$, minimiza el tiempo de llegada al hiperplano $Lx = k$, ver (Leyva, Solis-Daun y Suárez, 2013).

Una vez cumplidas las desigualdades (4), se origina una dinámica invariante sobre el hiperplano $Lx = k$, podemos decir que está dinámica corresponde a la aplicación del llamado control equivalente, denotado por u_{eq} y definido para x tales que $Lx = k$, de manera que lo podemos calcular de la igualdad $L\dot{x} = 0$. Es decir, $L\,(Ax + bu_{\mathrm{eq}}) = 0$, por consiguiente

$$u_{\mathrm{eq}} = -\frac{LAx}{Lb}. \tag{7}$$

Con este resultado tenemos definido el control globalmente estabilizante para toda $x \in \mathbb{R}^n_+$:

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ u_{\mathrm{eq}} & \text{si } Lx - k = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Tenemos el sistema realimentado (1)-(8).

3. EXISTENCIA DE UN HIPERPLANO DESLIZANTE CON u_{eq} CONSTANTE

Para la familia de sistemas positivos y estables (1), el siguiente teorema nos proporciona una forma de obtener un plano deslizante donde el control deslizante u_{eq} es constante.

Teorema 3. Si A es Metzler y Hurwitz, entonces las soluciones $x(t, x_0)$ del sistema (1), que inicia en $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, puede ser estabilizada en el punto de equilibrio $\overline{x} = -A^{-1}b\overline{x}$ mediante un deslizamiento sobre el hiperplano $\omega_0^T(x - \overline{x}) = 0$, con el control positivo

$$u(x) = \begin{cases} r_1 \text{ si } \omega_0^T(x - \overline{x}) > 0 \\ \\ \overline{u} \text{ si } \omega_0^T(x - \overline{x}) = 0 \\ \\ r_2 \text{ si } \omega_0^T(x - \overline{x}) < 0 \end{cases}, \tag{9}$$

donde $A^T\omega_0 = \lambda_0\omega_0$, con valor propio dominante $\lambda_0 < 0$; para tener un dominio deslizante, las cotas r_1 y r_2 pueden ser elegidos de forma que $r_1 < \overline{u} < r_2$.

Demostración. Si A es Metzler y Hurwitz, entonces A^T también es Metzler y Hurwitz. De acuerdo al teorema 1, sea $\omega_0 \geq 0$ el vector propio de A^T asociado al valor propio dominante $\lambda_0 < 0$, de forma que

$$A^T\omega_0 = \lambda_0\omega_0, \tag{10}$$

lo que implica

$$\omega_0^T Ax = \lambda_0\omega_0^T x \leq 0$$

y

$$\omega_0^T b > 0,$$

de manera que la función $u_{\text{eq}}(x)$ dada por (7), con $L = \omega_0^T$ y x tal que $\omega_0^T(x - \overline{x}) = 0$, por lo que

$$u_{\text{eq}}(x) = -\frac{\omega_0^T A\overline{x}}{\omega_0^T b} = -\frac{\omega_0^T A}{\omega_0^T b}(-A^{-1}b\overline{u}) = \overline{u}.$$

$\square$

Y de acuerdo al Teorema 1 en (Sira-Ramírez, 1988), es necesario y suficiente que se satisfaga $r_1 < u_{\text{eq}} < r_2$, para que exista el modo deslizante en el hiperplano indicado.

4. APLICACIONES

En esta sección, aplicaremos el Teorema 3 en dos modelos matemáticos en particular: al modelo de mezclas en 2 tanques y al submodelo lineal para la insulina en el cuerpo humano propuesto por Sorensen.

4.1 El Modelo de mezclas en dos tanques

Antes de dar la descripción del problema, recordaremos la siguiente

Definición 4. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es compartimental si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a) A es Metzler,
b) $\sum_i a_{ij} \leq 0$ para cada columna $j = 1, 2, ..., n$.

La descripción del problema es el siguiente:
Dos tanques, A y B, contienen V_1 y V_2 litros de salmuera y en los cuales se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiéndo un flujo f_2 de salmuera del tanque A al B y un flujo f_3 del tanque B al A. Además, del exterior hay un flujo f_1 con u libras de sal por litro hacia el tanque A, y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el instante t.

Denotando por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las cantidades de sal presentes al instante t en los tanques A y B respectivamente, el modelo matemático matricial es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{11}$$

donde los volúmenes V_1 y V_2 son constantes, con condiciones inciales $x_1(0) = a$ y $x_2(0) = b$, de manera que el objetivo es estabilizar rápidamente las concentraciones $\frac{x_i}{V_i}$ de cada uno de los tanques. Como V_i es constante para $i = 1, 2$, entonces

$$f_2 = f_3 + f_4 \quad \text{y} \quad f_1 = f_4. \tag{12}$$

donde la matriz de coeficientes A es Metzler y como su traza es negativa y determinante positivo, también es Hurwitz. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, tenemos que el punto de equilibrio $\overline{x}$ es positivo y asintóticamente estable, i.e.,

$$\overline{x} = -A^{-1}b\overline{u} = \overline{u}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Entonces, $\overline{u}$ determina la cantidad de sal en cada tanque. La dinámica es sencilla, al aplicar un control constante $\overline{u}$, cualquier solución que inicie en $\mathbb{R}^2$ tiende asintóticamente al punto de equilibrio $\overline{x} = -A^{-1}b\overline{u}$.

$A_{\text{eq}} = A + b\left(-\dfrac{LA}{Lb}\right)$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\dfrac{f_2}{V_1V_2l_1}(V_1l_1 + V_2l_2)$ ver (Leyva, et. al, 2013), por lo que el valor propio λ_d del modo deslizante es.

$$\lambda_d = -\frac{f_2}{V_1V_2l_1}(V_1l_1 + V_2l_2), \tag{14}$$

donde λ_d está en función de la pendiente $\dfrac{l_2}{l_1}$.

Con base en el Teorema 3, consideramos la restricción $\dfrac{l_2}{l_1} \in \left[\dfrac{f_3}{f_2}, 1\right]$ para tener deslizamiento sobre la recta $\omega_0^T(x - \overline{x})$, tenemos que el valor propio $\lambda_0 = \lambda_d$, correspondiente al deslizamiento es decreciente en el intervalo $\left[\dfrac{f_3}{f_2}, 1\right]$. De manera que el deslizamiento es más rápido si $\dfrac{l_2}{l_1} = 1$ y más lento si $\dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{f_3}{f_2}$. En (Leyva, et. al, 2013) se presenta una simulación de lo anterior donde se aprecia las diferencias en la rapidez de estod deslizamentos.

Considerando además que $V_1 = V_2 = V$, tenemos que la matriz

$$A^T = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} -f_2 & f_2 \\ f_3 & -f_2 \end{pmatrix},$$

tiene vector propio

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_3}\sqrt{f_2f_3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

asociado al valor propio dominante $\lambda_0 = \dfrac{1}{V}\sqrt{f_2f_3} - \dfrac{1}{V}f_2 < 0$. Por el Teorema 3, tenemos que ocurre un deslizamiento sobre la recta $\omega_0^T(x - \overline{x}) = 0$.

Observación 1. De acuerdo al cálculo de este ejemplo, observamos que si $L = (l_1,\ l_2) = \left(\sqrt{\dfrac{f_2}{f_3}},\ 1\right)$ tal que

$$l = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{f_2}{f_3}}} = \sqrt{\frac{f_3}{f_2}} < 1,$$

de forma que $\sqrt{\frac{f_3}{f_2}} \in \left(\frac{f_3}{f_2},\ 1\right)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
LAx &= \left(\sqrt{\frac{f_2}{f_3}},\ 1\right) \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1 \frac{1}{V_1} f_2 \left(1 - \sqrt{\frac{f_2}{f_3}}\right) - x_2 \frac{1}{V_2} \left(f_2 - f_3 \sqrt{\frac{f_2}{f_3}}\right) \\
&< 0 \quad \text{para} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+.
\end{aligned}$$

De (7) y el teorema 3, se deduce que $u_{\mathrm{eq}} > 0$ de manera que para x tal que $L(x - \overline{x}) = 0$, al elegir un r_2 tal que $0 < u_{\mathrm{eq}} < r_2$, satisface la condición necesaria y suficiente para que exista el deslizamiento en este hiperplano generado por el vector propio asociado al valor propio dominante de la matriz A.

4.2 El Modelo de la Insulina

Hasta ahora se han propuesto varios modelos matemáticos para la dinámica glucosa-insulina en la terapia de la diabetes tipo 1; sin embargo el modelo de Sorensen es uno de los más aceptados por su completez en la representación del metabolismo de la glucosa, con un enfoque compartimental (ver (Sorensen, 1985)). El uso del modelo de Sorensen para propósitos de control se ha discutido en (ver (Quiroz y Femat, 2007)); ahí se presenta una breve discusión acerca de la estructura del modelo. El modelo se divide en tres subsistemas: glucosa, insulina y razones de glucagón metabólico. El subsistema de la glucosa es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en ocho dimensiones, mientras que el subsistema de la insulina es lineal en siete dimensiones. Ambos sistemas están acoplados por el subsistema no lineal de razones de glucagón metabólico. Es importante observar que el modelo de Sorensen ya ha sido validado y los parámetros involucrados son conocidos.

Un enfoque típico del control de glucosa en la terapia de la diabetes tipo 1, consiste en diseñar una función u(t) para controlar la medida de la señal de salida de ésta, es decir, la concentración de glucosa en el tejido vascular periférico (en la piel). El objetivo de control sobre la concentración de glucosa se alcanza por el suministro exógeno de insulina en la ruta subcutánea (señal de control) definido por el diseño de u(t). En este artículo se propone una estabilización del subsistema de la insulina. Esta intención, obedece a la necesidad de controlar la infusión de insulina; esto es que, no es suficiente obtener la concentración de glucosa sobre tasas fisiológicas normales, sino que se debe controlar la infusión de insulina con que se logra esta normalización de la concentración de la glucosa, con el fin de reducir los excesos en las dosis de la aplicación de la insulina para prevenir una hiperinsulinemia y con ello un coma diabético.

Aquí proponemos un algoritmo para el control de la insulina, basado en una estabilización rápida de un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax$$

con

$$A = \begin{pmatrix}
-\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\
0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\
0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000}
\end{pmatrix}$$

y el vector de estados $x(t) = \left(x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_7(t) \right)^T$ donde las entradas $x_i(t)$ representan la concentración de insulina en el cerebro, las arterias, intestinos, hígado, riñón, venas periféricas (piel), compartimentos de órganos periféricos, respectivamente. Este subsistema es usado para diseñar un control estabilizante de acuerdo a la metodología usada de manera estándar. El problema de estabilización supone la infusión de insulina exógena en el tejido subcutáneo, esto es, que la ecuación de balance de masa de concentración de insulina en las venas periféricas $\dot{x}_6(t)$ es modificado por la adición de la entrada u, tal que el sistema de control queda de la forma

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

con el vector

$$bu = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1.418u,\ 0)^T.$$

De manera que al fijar un valor apropiado de $\bar{u}$, obtenemos el punto de equilibrio donde las entradas representan niveles aceptables de insulina en los órganos respectivos. Por ejemplo, si $\bar{u} = 16.46655904$, entonces

$$\bar{x} = \left(\frac{21\,379}{1000}\ \frac{21\,379}{1000}\ \frac{21\,379}{1000}\ \frac{12\,789}{1000}\ \frac{16\,439}{1000}\ \frac{4019}{125}\ \frac{14\,483}{1000} \right)^T.$$

Claramente la matriz A^T es Metzler y ya que sus valores propios son:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -4.43015961824377, \\
\lambda_2 &= -0.955881340187406 + 0.313369280416571i, \\
\lambda_3 &= -0.955881340187406 - 0.313369280416571i, \\
\lambda_4 &= -0.215385613332671, \\
\lambda_5 &= -1.76176253153343, \\
\lambda_6 &= -0.0779048668409360, \\
\lambda_7 &= -1.85802468967437,
\end{aligned}$$

esto implica que también es Hurwitz. Siendo su valor propio dominante $\lambda_0 = -0.0779048668409360$, cuyo vector propio asociado es

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 0.0447065020 \\ 0.1626858963 \\ 0.1144092171 \\ 0.2079630069 \\ 0.0673114658 \\ 0.1555422650 \\ 2.138433169 \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{x} = -A^{-1}b\overline{u} = \begin{pmatrix} 1.298328324 \\ 1.298328324 \\ 1.298328324 \\ 0.7766932431 \\ 0.9983331143 \\ 1.952631280 \\ 0.8795636397 \end{pmatrix} \overline{u},$$

además

$$LAx = -\begin{pmatrix} 0.00348285153980000539 \\ 0.0126740270373999209 \\ 0.00891303447330001053 \\ 0.0162013327074000124 \\ 0.00524389313289999603 \\ 0.0121174960820000094 \\ 0.166594351183999956 \end{pmatrix} x.$$

Por (7) $u_{\text{eq}} > 0$ de manera que para x tal que $\omega_0^T(x - \overline{x}) = 0$, $r_1 < u_{\text{eq}} < r_2$, satisface la condición necesaria y suficiente para que exista el deslizamiento en este hiperplano generado por el vector propio asociado al valor propio dominante de la matriz A, en particular en el análisis realizado en (Leyva, Quiroz, Carrillo y Femat, 2013) podemos ver que $10 < u_{\text{eq}} < 50$ donde nuestro cálculo de $u_{\text{eq}} = 22$ cumple perfectamente.

5. CONCLUSIONES

El Teorema 3 representa un método constructivo para demostrar la existencia de un hiperplano deslizante, donde el control equivalente es constante. Cabe mencionar que tal control no coincide con el control de mejor tasa; como dijimos anteriormente, este sólo asegura la existencia de un hiperplano deslizante. En el caso del plano, para el problema de mezclas de dos tanques a volumen constante, mostramos que el modo deslizante está en función de la pendiente de la recta de deslizamiento, por lo tanto podemos maximizar la rapidez de convergencia. De manera análoga aplicamos el Teorema 3 para el modelo matemático de la diabetes tipo 1 de Sorensen.

REFERENCES

H. Leyva, F.A. Carrillo, G. Quiroz, R. Femat. Estabilización vía Modos Deslizantes con Control Positivo. Memorias del Congreso AMCA 2013.

Horacio Leyva C., Julio Solis-Daun y Rodolfo Suárez. Global CLF Stabilization of Systems with Control Inputs Constrained to an Hyperbox. SIAM J. Control Optim. Vol. 51, No. 1, pp. 745-766.

H. Sira-Ramírez. Differential Geometric methods in variable-structure control, Int. J. Control, Vol. 48, No. 4, 1988.

M. Ait Rami and F. Tadeo. Controller Synthesis for Positive Linear Systems With Bounded Controls, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, Vol. 54, No. 2, February 2007.

P.D. Leenheer and D. Aeyels, Stabilization of positive linear systems, Systems Control Lett., 44 (2001) 259-271.

R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.

A. Berman, M. Neumann and I. Stern (1989). Nonnegative matrices in the Dynamics Systems. John-Wiley, New York.

D.G. Luenberger (1979). Introduction to Dynamic Systems. John Wiley, New York.

R.F. Brammer. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. SIAM J. Control, 10.1972.

Vadim I. Utkin, Sliding Modes in Control Optimization, Springer-Verlag, 1992.

L. Farina y S. Rinaldi, Positive Linear Systems: Theory and applications. John Wiley & Sons, 2000.

Sorensen J.T. A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Asses Imbroved Insulin Therapies for Diabetes I. PhD Thesis MIT, USA. (1985).

Quiroz G. and Femat R. On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from analysis. Mathematical Biosciences 210, 554-575. (2007).

H. Leyva, G. Quiroz, F.A. Carrillo, R. Femat. Rapid insulin stabilization via sliding modes control for T1DM therapy. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático AMCA 2013.