

Estimación Robusta Mediante el Enfoque Multi-Modelos Takagi-Sugeno: Aplicado a un Intercambiador de Calor

J.C. Rodríguez-Cerda, M. Adam-Medina, V.M. Alvarado-Martínez, L.G. Vela-Valdés, R.F. Escobar-Jiménez

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET),
Interior Internado Palmira s/n Col. Palmira C.P. 62490 Cuernavaca, Morelos, México.
Tel: 01(777) 362-7770, (j_cesar,adam,alvarado,velaluis,esriji)@cenidet.edu.mx

Resumen: En este trabajo, se describe el método para el diseño de un estimador robusto, para sistemas no lineales representados mediante multi-modelos Takagi-Sugeno con entradas desconocidas. La convergencia del error de estimación se realiza con la teoría de Lyapunov y las condiciones de estabilidad están dadas en términos de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI). Se muestra resultados del caso de estudio con datos reales del proceso: Intercambiador de Calor, para validar el enfoque propuesto.

Palabras claves: Estimación, Detección de fallas, observadores.

I. INTRODUCCIÓN

Generalmente el diseño de un observador está basado en el modelo matemático de un proceso físico, este se utiliza para hacer la estimación de los estados y salidas de un proceso. Dicho modelo, a menudo no lineal se obtiene cuando la naturaleza del proceso se entiende bien. Sin embargo, los modelos no lineales pueden ser bastante complejos.

Si se asume que el proceso no lineal considerado, evoluciona alrededor de un punto de operación, entonces se puede obtener un modelo lineal vía identificación o linealización del sistema. El modelo lineal que se obtiene se puede analizar con la teoría y las herramientas para sistemas lineales ya bastante estudiadas.

Los modelos lineales se estudian en gran parte de la literatura, aunque proporcionan la solución a muchos problemas de diseño, el comportamiento no lineal siempre se encuentra presente en los sistemas, esto reduce el dominio de aplicación para modelos lineales alrededor de un punto de operación local (Orjuela R. et al., 2008).

Los trabajos realizados sobre sistemas no lineales son casos muy específicos, para los cuales no hay un marco general de análisis como el caso de sistemas lineales en donde existen más herramientas desarrolladas. Un enfoque para sistemas no lineales es el denominado enfoque multi-modelo Takagi-Sugeno (TS) introducido en 1985 (Takagi T. and Sugeno M., 1985). La ventaja principal de este enfoque es su capacidad de utilizar las herramientas de análisis para sistemas lineales (Chadli M., et al., 2008).

En este trabajo se propone un método para la estimación robusta de estados y reconstrucción de salidas en sistemas no lineales, usando el enfoque multi-modelo TS, los cuales son modelos lineales en espacio de estados, conmutados por medio de una función de ponderación, para representar un sistema no lineal en un intervalo amplio de su dinámica. Se considera el caso donde la función de ponderación depende de la variable de decisión, en este caso es la señal de entrada para realizar el cambio o conmutación de modelo (Orjuela R.

et al., 2008). Donde dicho enfoque será aplicado al intercambiador de calor que se tiene en la institución.

II. REPRESENTACIÓN MULTI-MODELO TAKAGI-SUGENO

Considerando un sistema no lineal descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y(t) &= h(x, u)\end{aligned}\quad (1)$$

donde $f(x, u)$ es la función de la dinámica del sistema no lineal, y $h(x, u)$ es la función de salida de sistema no lineal, donde x es el estado, u es la entrada. Los sistemas no lineales son difíciles de manipular cuando no se tiene el modelo, además de lo difícil de la implementación de estrategias de estimación, control y diagnóstico. Una alternativa interesante surge cuando uno conoce diversos puntos de operación que, se pueden concatenar para poder representar al sistema (ver Fig. 1); esta técnica es conocida como multi-modelos, diversos trabajos sobre este enfoque se presenta en (Adam M., 2004) (Orjuela R., 2008).

La estructura multi-modelo T-S, es un caso particular de los multi-modelos y se utiliza ampliamente en el análisis y la síntesis de multi-modelos en (Murray-Smith R. and Johansen T.A. 1997).

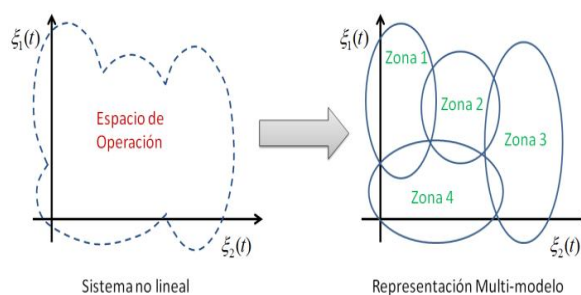


Fig. 1: Representación Multi-modelo.

(Filev D., 1991) propone la estructura multi-modelo basada Así los Sistemas No Lineales (SNL) se representan a través de un sistema multi-lineal desacoplado (ver Fig. 2) en espacio estados de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) + E_i w(t) \\ y_i(t) &= C_i(t) x_i(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W_c w(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ y $y_i \in \mathbb{R}^p$ son los vectores de estados y salidas del i ésimo submodelo respectivamente, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de control, $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida general del multi-modelo y $w(t)$ la perturbación o ruido del sistema.

Las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ del sistema lineal en espacio de estados donde $i = 1, \dots, L$ corresponden a los modelos utilizados en diferentes puntos de operación, y $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $W_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$ son las matrices de distribución del ruido.

La representación multi-modelo de (2) se reescribe de manera aumentada como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{E}w(t) \\ \dot{z}(t) &= Mz(t) + \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$ son las matrices particionadas por bloques del sistema y $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times r}$ matriz de distribución del ruido, $w(t)$ es la perturbación del sistema, la matriz $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ permite regular la respuesta transitoria de la señal $z(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$, $W_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de distribución del ruido (Orjuela R. et al., 2008) (Chadli M. et al., (2008), dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \text{diag}\{A_1 \quad \dots \quad A_i \quad \dots \quad A_L\} \\ \tilde{B} &= [B_1^T \quad \dots \quad B_i^T \quad \dots \quad B_L^T] \\ \tilde{C}_i &= [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] \end{aligned}$$

Observación 1: (Orjuela R. et al., 2008) Si $M = 0$ entonces la señal adicional $z(t)$ es una acción integral pura que se define en el caso continuo por $z(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$.

El Multi-modelo desacoplado que se muestra en (3) en su forma compacta como (Orjuela R. et al., 2007,2008):

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \tilde{A}_a(t)x_a(t) + \tilde{C}_1 \tilde{B}u(t) + \tilde{E}_a w(t) \\ y(t) &= \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T x_a(t) + W_c w(t) \\ z(t) &= \tilde{C}_2^T x_a(t) \end{aligned} \quad (4)$$

con $x_a(t) \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ vector de estados aumentados, $\tilde{A}_a \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\tilde{E}_a \in \mathbb{R}^{(n+p) \times r}$, $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{(n+p) \times n}$, $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ son las matrices del sistema en su forma compacta, definidas por:

en una interconexión de los submodelos.

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n \times p)} \\ I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_a = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ W_c \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_a(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{A}_i, \quad \tilde{A}_i(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0_{n \times p} \\ \tilde{C}(t) & M \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La función de ponderación $\mu_i(\xi(t))$ es asociada para cada zona de operación. Donde la función de ponderación debe cumplir con las siguientes propiedades de suma convexa:

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, L, \quad \forall t \quad (5)$$

para

La función de ponderación cuantifica la contribución relativa de cada submodelo para el modelo global según el punto de operación actual del sistema. La variable de decisión $\xi(t)$ se considera como una señal sin falla (Orjuela R. et al., 2009).

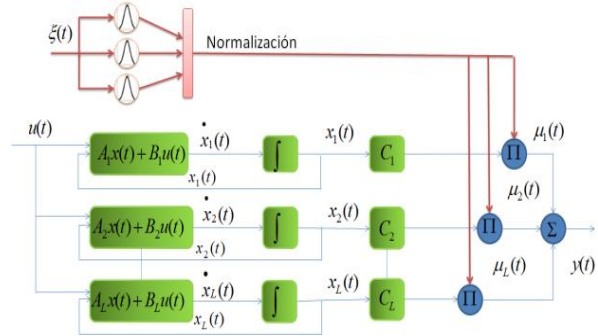


Fig. 2: Multi-modelo TS desacoplado (Orjuela R. et al., 2009).

2.1 DISEÑO DEL OBSERVADOR

En esta sección se presenta el diseño del observador basado en multi-modelo desacoplado. El interés principal del multi-modelo desacoplado reside en el hecho de que el orden de cada submodelo puede ser diferente, (Orjuela R. et al., 2008).

La estimación de estado por multi-modelo se desarrolla utilizando un Observador Proporcional-Integral (PI) de la forma, (ver Fig. 3):

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= \tilde{A}_a(t) \hat{x}_a(t) + \tilde{C}_1 \tilde{B} u(t) + \dots \\ &\quad K_p (y(t) - \hat{y}(t)) + K_I (z(t) - \hat{z}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T \hat{x}_a(t) \\ \hat{z} &= \tilde{C}_2^T \hat{x}_a(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde $\hat{x}_a(t) \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ es la estimación del vector de estados aumentado y $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida reconstruida por el observador, donde las ganancias K_p y K_I proporcionan una corrección proporcional e integral a la estimación de error de salida.

El error de estimación de estados está dado por:

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (7)$$

Y la dinámica del error (7) está definida por la derivada del error de estimación de estados $e_a(t)$:

$$\dot{e}_a(t) = \dot{x}_a(t) - \dot{\hat{x}}_a(t) \quad (8)$$

$$\dot{e}_a(t) = (\tilde{A}_a(t) - K_p \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T) e_a(t) + \dots (\tilde{E}_a - K_p W_c) w(t) \quad (9)$$

Simplificando la expresión anterior se tiene:

$$\dot{e}_a(t) = \tilde{A}_{obs}(t) e_a(t) + (\tilde{E}_a - K_p W_c) w(t) \quad (10)$$

donde

$$\tilde{A}_{obs}(t) = \tilde{A}_a(t) - K_p C(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T \quad (11a)$$

$$\tilde{A}_{obs}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \Phi_i \quad (11b)$$

dado que $\Phi_i = \tilde{A}_i - K_p \tilde{C}_i \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T \quad (11c)$

y $\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{C}_i & M \end{bmatrix}$

donde $\tilde{A}_{obs}(t)$ es la matriz de evolución del sistema.

El método de Lyapunov lleva a la obtención de condiciones capaces de garantizar la estabilidad del multi-modelo T-S, el concepto de disipación de energía menciona, que al final del tiempo el sistema deberá alcanzar un punto de equilibrio. Es conveniente observar que la señal objetivo (Orjuela R. et al., 2008, 2009) está dada por:

$$v(t) = H e_a(t) \quad (12)$$

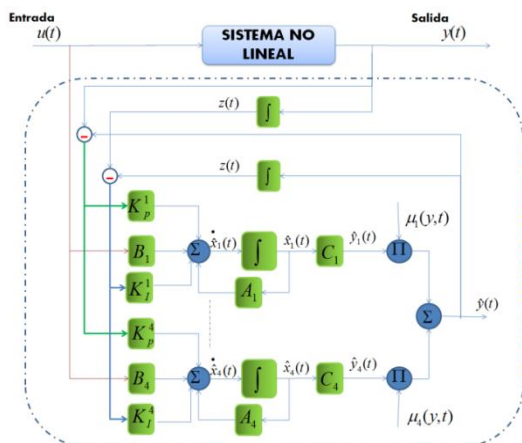


Fig. 3: Observador Proporcional Integral TS (Orjuela R. et al., 2009).

La convergencia del error de estimación mediante la consideración de la función de Lyapunov (Gao Z., Shi X. and Steven X. D. 2005) es:

$$V(t) = e_a^T(t) P e_a(t) \quad (13)$$

donde $P = P^T > 0$.

El propósito de la señal objetivo, es garantizar si existe una función de Lyapunov (13) que satisfaga la condición:

$$\exists \alpha > 0, \quad \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = -v^T(t)v(t) + \gamma^2 w^T(t)w(t) \quad (14)$$

$$\dot{V}(t) < e_a^T(t)(2\alpha P + H^T H)e_a(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \quad (15)$$

$$\dot{V} < \Psi(t) \begin{bmatrix} H^T H + 2\alpha P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Psi^T(t) \quad (16)$$

Si se deriva la función de $V(t)$ a lo largo de la trayectoria del error de estimación $e_a(t)$ la expresión resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}_a^T(t) P e_a(t) + e_a^T(t) P \dot{e}_a(t) \\ &= e_a^T(t) (\tilde{A}_{obs} P + P \tilde{A}_{obs}) e_a(t) + \dots \\ &\quad w^T (\tilde{E} - K_p W_c)^T P e_a(t) + \dots \\ &\quad e^T(t) (\tilde{A}_{obs} P + P \tilde{A}_{obs}) w(t) \end{aligned} \quad (17)$$

El vector aumentado $\Psi(t)$ en (15) es de la forma

$$\Psi(t) = [e_a^T(t) \quad x^T(t)]^T \quad (18)$$

La ecuación descrita en (15) se reescribe en la forma compacta:

$$\dot{V}(t) = \Psi^T(t) \Omega(t) \Psi(t) \quad (19)$$

Donde se busca simplificar (16) para una mejor manipulación de las ecuaciones:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{obs}^T(t) P + \tilde{A}_{obs}(t) P & P(\tilde{E} - K_p W_c) \\ (\tilde{E} - K_p W_c)^T P & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

De (15) y (16) se tiene que:

$$\Psi^T(t) \left\{ \Omega^T(t) + \begin{bmatrix} H^T H + 2\alpha P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Psi(t) \right\} < 0 \quad (21)$$

donde $\bar{\gamma} > 0$ es el nivel de atenuación del ruido y $\alpha > 0$ la tasa de atenuación para cuantificar la velocidad de convergencia del error de estimación.

Haciendo las manipulaciones correspondientes de (20) se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{obs}^T(t) P + \tilde{A}_{obs}(t) P + H^T H + 2\alpha P & P(\tilde{E} - K_p W_c) \\ (\tilde{E} - K_p W_c)^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

Teorema 1. (Orjuela R. et al., 2008) Considere el modelo dado en (4) con entradas desconocidas. Existe una matriz definida positiva $P = P^T > 0$, y matrices G_p , G_I de dimensiones apropiadas y escalares $\bar{\gamma} > 0, \alpha > 0$, tal que existe un observador (6) que garantiza los resultados de robustez, y las soluciones del problema de optimización convexa, bajo las siguientes restricciones:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H + 2\alpha P & P \tilde{E}_a - G_p W_c \\ \tilde{E}_a^T P - (G_p W_c)^T & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

donde $\Gamma_i = P \tilde{A}_i - G_p \tilde{C}_i \tilde{C}_1^T - G_I \tilde{C}_2^T$

Para las matrices dadas M , H y el escalar $\alpha > 0$, las ganancias de los observadores se calculan por $K_p = P^{-1} G_p$ y $K_I = P^{-1} G_I$. Por otra parte, la ganancia \mathcal{L}_2 de $w(t)$ hacia

$v(t)$ se determina por $\gamma = \sqrt{\gamma}$. Para su demostración ver (Chadli M. et al., 2000) (Orjuela R. et al., 2008).

III. MODELO DEL INTERCAMBIADOR DE CALOR

El intercambiador de calor es un dispositivo que permite transferir energía térmica entre dos o más fluidos, que están separados por medio de una barrera a diferentes temperaturas.

El modelado del intercambiador de calor se realizó por medio de parámetros concentrados, que se basa en la división del intercambiador de calor en un número finito de elementos, llamados secciones o celdas (Astorga C.M. et al., 2007). Este procedimiento de seccionamiento, asume que cada elemento se comporta como un tanque perfectamente agitado y en consecuencia la temperatura del fluido se considera uniforme, dichos flujos de entrada y salida, se encuentran conectados mediante un área de transferencia de calor entre éstos. La dinámica del sistema se obtiene a través de un balance de energía (Luyben W. L., 2007), (Escobar R.F. et al., 2011), (Astorga C.M. et al., 2007) que se aplica a cada una de las secciones.

$$\begin{cases} \frac{dT_{co}}{dt} = \frac{v_c}{V_c} (T_{ci} - T_{co}(t)) + \frac{UA}{\rho_c C_{pc} V_c} (T_{ho}(t) - T_{co}(t)) \\ \frac{dT_{ho}}{dt} = \frac{v_h}{V_h} (T_{hi} - T_{ho}(t)) + \frac{UA}{\rho_h C_{ph} V_h} (T_{co}(t) - T_{ho}(t)) \end{cases}$$

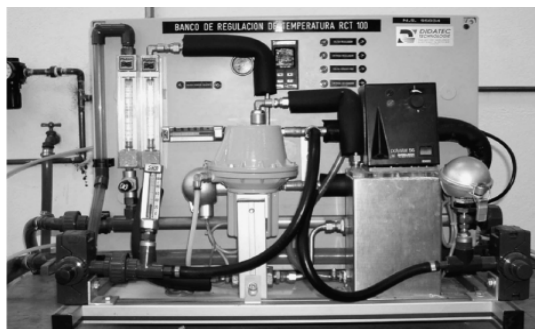


Fig. 4: Planta piloto de banco a escala.

Donde cada término está definido en la Tabla 1 y el modelo matemático presentado aquí, toma las siguientes suposiciones:

- S1 Flujos de entrada y salida iguales, que implican volumen constante en ambos tubos.
- S2 El coeficiente de transferencia de calor está relacionado con las temperaturas de los fluidos y con el flujo.
- S3 No existe transferencia de calor entre el tubo externo y el medio ambiente.
- S4 No hay almacenamiento de energía calorífica en las paredes de los tubos.
- S5 Las temperaturas de entrada son constantes.

Tabla 1 (Astorga C.M. et al., 2007). *Nomenclatura.*

Nomenclatura	
V_c	Volumen en lado frio, m^3
V_h	Volumen en lado caliente, m^3
v_c	Flujo volumétrico fluido de enfriamiento, m^3/s

v_h	Flujo volumétrico fluido de calentamiento, m^3/s
C_{pc}	Calor específico del fluido frio, $J/kg^\circ C$
C_{ph}	Calor específico del fluido caliente, $J/kg^\circ C$
ρ_c	Densidad del fluido frio, kg/m^3
ρ_h	Densidad del fluido caliente, kg/m^3
A	Área de transferencia de calor m^2
U	Coficiente de transferencia de calor, $W/m^2-^\circ C$
T_{ci}, T_{hi}	Temperaturas de entrada del fluido de enfriamiento y calentamiento respectivamente, $^\circ C$
T_{co}, T_{ho}	Temperaturas de salida del fluido de enfriamiento y calentamiento respectivamente, $^\circ C$
t_s	Tiempo de simulación
<i>Sub-indices</i>	
c	Frio
h	Caliente
i	Entrada
o	Salida

El enfoque multi-modelo T-S desacoplado se aplicó al sistema de Intercambiador de Calor. Para probar el desempeño del enfoque, se hicieron diferentes simulaciones y pruebas con datos reales.

Tabla 2 (Astorga C.M. et al., 2007). Datos físicos utilizados en simulación.

Constantes	Valores	Unidades
v_{co}	8.33×10^{-6}	m^3/s
v_h	16.67×10^{-6}	m^3/s
V_c	135×10^{-6}	m^3
V_h	15.51×10^{-6}	m^3
C_{pc}	4180.9	$J/Kg^\circ C$
C_{ph}	4196.5	$J/Kg^\circ C$
ρ_c	985	Kg/m^3
ρ_h	971.1535	Kg/m^3
A	153.875×10^{-4}	m^2
U	1400	$W/m^2-^\circ C$
T_{co}	47	$^\circ C$
T_{ho}	72	$^\circ C$

Tabla 3. Puntos de operación.

	T_{ci}	T_{hi}	T_{co}	T_{ho}	v_c
M1	29	81	47.4	72	7.5×10^{-6}
M2	29	81.2	50.88	73	5.7×10^{-6}
M3	30	81.4	61.5	76	2.6×10^{-6}

Los parámetros fueron calculados con base en los puntos de operación, donde las temperaturas de entrada T_{ci} y T_{hi} fueron $29^\circ C$ y $81^\circ C$ respectivamente. El flujo del refrigerante se varía de 7.5×10^{-6} a $2.6 \times 10^{-6} m^3/s$. Estas variaciones permitieron los cambios de punto de operación. El tiempo de muestreo fue de $t_s = 0.25s$.

IV. CASO DE ESTUDIO: INTERCAMBIADOR DE CALOR

Se considera el enfoque multi-modelo desacoplados en tiempo continuo con $L=3$ submodelos, los cuales describen el sistema alrededor de un punto de operación con dimensiones iguales, dado por las siguientes matrices:

Modelo 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.8525 & -0.2805 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8525 & -0.2805 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.0987 & 0.3478 & 0 & 0.1067 \\ 0 & 0.0933 & 1.2895 & 0.2339 \end{bmatrix}$$

Modelo 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.8778 & -0.3431 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8778 & -0.343 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.1296 & 0.4585 & 0 & 0.1137 \\ 0 & 0.1242 & 1.2895 & 0.2809 \end{bmatrix}$$

Modelo 3

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.8972 & -0.3867 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8972 & -0.386 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0.1518 & 0.539 & 0 & 0.1175 \\ 0 & 0.1477 & 1.2891 & 0.3129 \end{bmatrix}$$

donde la variable de decisión $\xi(t)$ es la señal entrada en este ejemplo $u(t) \in [409, 525, 617]$. La función de ponderación se obtiene de la normalización de la función Gaussiana (ver Fig. 5):

$$\mu_i(\xi(t)) = \eta_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^L \eta_j(\xi(t))$$

$$\eta_i(\xi(t)) = \exp(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2)$$

Con $H = I_5$, donde la dispersión es $\sigma = 20$, y los centros de cada modelo son $c_1 = 409$, $c_2 = 525$ y $c_3 = 617$ los cuales depende del punto de operación del sistema.

Las soluciones que satisfacen las condiciones LMI del Teorema 1 se obtiene por medio de un algoritmo de optimización convexo bajo las restricciones del Teorema 1, el nombre del algoritmo YALMIP relacionado con el solver SEDUMI se encuentra en el sitio de internet (Sedumi, 2008) y (Yalmip, 2009).

La perturbación $w(t)$ es un ruido de media cero y varianza igual a 0.2.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.123 & -0.034 & -0.452 & 0.127 & 0.381 & -0.107 & -0.444 \\ -1.975 & 0.557 & 1.064 & -0.300 & -1.997 & 0.560 & 1.301 \\ 0.124 & 0.6941 & -0.194 & -0.338 & 0.094 & 1.0 & 0 \\ -0.365 & -1.977 & 0.552 & 1.527 & -0.426 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K_l = \begin{bmatrix} -1.273 & 0.359 & 2.235 & -0.630 & -1.541 & 0.432 & 2.432 \\ -1.241 & 0.350 & 2.216 & -0.6250 & 0-1.506 & 0.422 & 2.410 \\ -0.682 & -1.760 & 0.492 & 2.593 & -0.724 & 0 & 0 \\ -0.676 & -1.723 & 0.481 & 2.568 & -0.717 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 5 se muestra la señal de flujo de entrada, la cual en este caso particular permite el cambio de punto de operación de nuestro sistema y lo cual permitirá conmutar de

un modelo a otro, por medio de una función de ponderación que activará cada uno de los modelos.

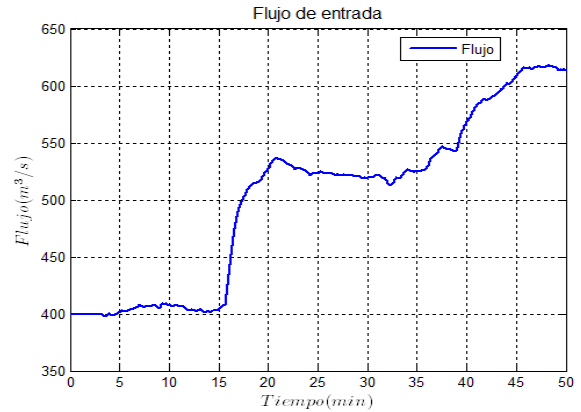


Fig. 5: Flujo de entrada del sistema.

En la Fig. 6 se muestra la ponderación dada por cada uno de los modelos, dependiendo del punto de operación en que se encuentre el sistema.

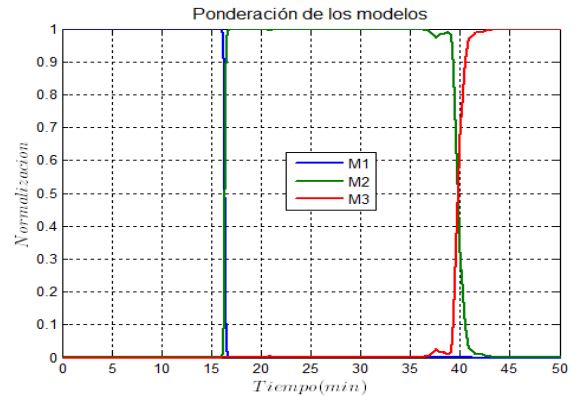


Fig. 6: Función de Ponderación de los modelos.

A partir del error cuadrático medio MSE=0.01306, se tiene una estimación aceptable de las temperaturas de salida T_{co} y T_{ho} , las cuales son las temperaturas estimadas \hat{T}_{co} y \hat{T}_{ho} . Como se aprecia en la Fig. 7.

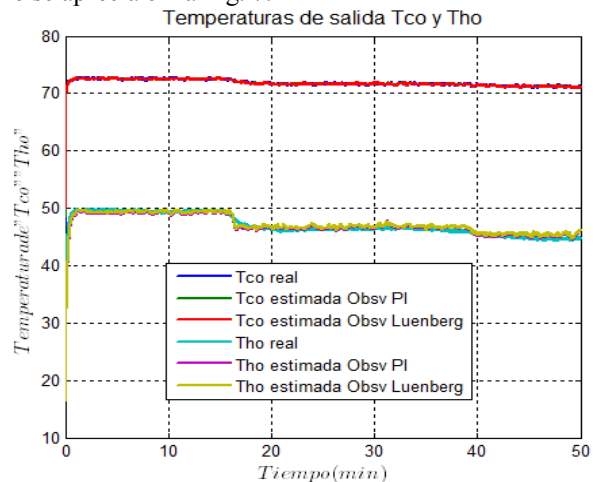


Fig. 7: Temperaturas de salida T_{co} y T_{ho} , así como sus respectivas estimaciones.

En la Fig. 8 se muestra las temperaturas T_{ho} y T_{co} , aparece una falla del 16% en T_{co} después del minuto 40. Los errores entre las temperaturas reales y estimadas T_{ho} , T_{co} se

mantienen acotados alrededor de cero, como se muestran en la Fig. 9.

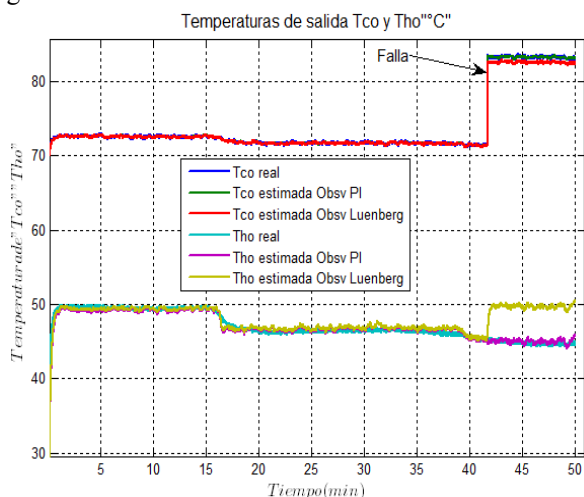


Fig. 8: Error de estimación de la temperatura T_{ho} .

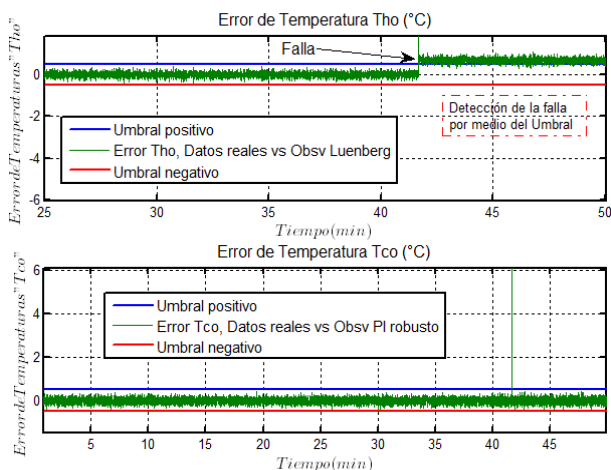


Fig. 9: Error de estimación de la temperatura T_{ho} .

V. CONCLUSIONES

En este trabajo, se propuso un enfoque para el diseño de un observador con el fin de estimar los estados y reconstruir salidas de un sistema no lineal descrito por multi-modelo desacoplado Takagi-Sugeno con entradas desconocidas, en donde cada modelo lineal representa al sistema en diferentes puntos de operación.

La estimación hace uso de una función de ponderación para determinar la contribución de cada uno de los modelos dependiendo de la evolución y del punto de operación del sistema. Otra de sus cualidades es realizar el diagnóstico y la

detección por medio de bancos de observadores y un sistema de evaluación de los residuos.

La convergencia del error de estimación de los estados se analiza mediante la teoría de Lyapunov y la formulación LMI. Los resultados mostrados en el trabajo fueron con datos reales adquiridos del sistema: Intercambiador de Calor, que se tiene en la institución.

REFERENCIAS

Adam M. (2004), Tesis: Diagnostic de défauts des systèmes à représentation multi-modèle linéaire invariant dans le temps. Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, CRAN, France.

Astorga C.M., Zavala A. Alvarado V.M., Méndez R.M., and Reyes J., (2007). Performance monitoring of heat exchangers via adaptive observer. *Measurement ScienceDirect*, Vol. 40, pp. 392-405.

Chadli M., Maquin D. and Ragot J., (2000). Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Systems, Man, and Cybernetics, 2000 IEEE International Conference on*.

Chadli M., Akhenak A., Maquin D. and Ragot J., (2008). On the design of observer for unknown inputs. *Int. Journal Automation and Control*. Vol. 2, pp. 113-125.

Escobar R.F., Astorga C. M., Tellez A.C., Juárez D., Hernández J.A. and Guerrero G.V. (2011), Sensor fault detection and isolation via high-gain observers: Application to a double-pipe heat exchanger, *ISA Transactions*. Vol. 50, pp. 480-486.

Filev, D. (1991). Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 5, pp. 281-290.

Gao Z., Shi X. and Steven X. D. (2005). Observer for TS fuzzy systems with measurement output noises. *IFAC*.

Luyben W. L. (2007). Chemical reactor Design and control. Edit. Wiley.

Murray-Smith R. and Johansen T.A. (1997). *Multiple Model Approaches to Modelling and Control*. Ed., London: Taylor & Francis.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2008). Estimating the states and the unknown input of nonlinear systems using a multiple models approach. *MED*.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2008). State estimation of nonlinear systems using a decoupled multiple model. *Int. Journal Modelling, Ident. And Control*, Vol. X, No. Y, XXXX.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2007). State estimation of nonlinear discrete-time systems based on the decoupled multiple model approach. *ICINCO*.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2008). Conception d'observateurs robustes pour des systems non linéaires incertains: une stratégie multimodèle. *CIFA*.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2009). A decoupled for state estimation of nonlinear systems subject to delayed measurements. *AFNC*.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2009). Robust PI observer design for hybrid heterogeneous multiple model with delayed measurements. *IFAC*.

Orjuela R., Marx B., Ragot J. and Maquin D., (2008). Design of robust \mathcal{H}_∞ Observers for nonlinear systems using a multiple model. *IFAC*.

Takagi T. and Sugeno M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1985. Vol. SMC-15, pp. 116 – 132.

Sedumi en: <http://sedumi.mcmaster.ca/>, Yalmip en: <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yamip.php>