

Control basado en observadores GPI del Motor de Reluctancia Conmutada

A. De La Guerra* Marco A. Arteaga**
Alejandro Gutiérrez-Giles* P. Maya-Ortiz**

* Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería-UNAM, (e-mail:
ale_delaguerra@comunidad.unam.mx,
alejandrogilesg@comunidad.unam.mx)

** UNAM, Facultad de Ingeniería, DF, 04510, México, (e-mail:
marteagp@unam.mx, paulm@dctrl.fi-b.unam.mx)

Resumen

En este artículo se propone un esquema de control de velocidad para el motor de reluctancia conmutada capaz de lidiar con cambios en el par de carga. El controlador propuesto está basado en los observadores GPI y no requiere medición de velocidad angular ni conocimiento del par de carga en el eje del rotor. Se incluyen simulaciones numéricas comparativas que muestran el buen desempeño del esquema propuesto.

Keywords: Control no lineal, Observadores, Máquinas Eléctricas, Motor de reluctancia conmutada, Rechazo de perturbaciones.

1. INTRODUCCIÓN

El uso de Motores de Reluctancia Conmutada (MRC) ha aumentado en los últimos años debido a que, por su construcción, son una opción económica. Además, pueden producir alto par a bajas velocidades, por lo que son una buena elección en aplicaciones donde se requiera una transmisión directa. Por otro lado, la principal limitación para su uso es que presenta un comportamiento electromagnético altamente no lineal (Toliat y Kliman, 2012). A pesar de esta desventaja se ha mostrado que este tipo de máquinas es una alternativa muy prometedora, por ejemplo, en aplicaciones de vehículos eléctricos (Takano et al., 2010), y en sistemas de generación eólicos (Nassereddine et al., 2008).

En cuanto al diseño de controladores de velocidad para el MRC, se han considerado en los últimos años los problemas de robustez ante perturbaciones (e.g., cambios en el par de carga), incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas, ruido en la medición, entre otros. Ejemplos de estos esquemas son el control por modos deslizantes de segundo orden de Rain et al. (2010), el control PI de ganancias programadas presentado en Hannoun et al. (2011) o el control tipo PID de Loria et al. (2012).

Una desventaja de algunos de estos esquemas es que, para su implementación, se requiere de la medición de todo el estado, *i.e.*, corrientes de estator, posición angular y velocidad angular de la flecha del rotor. Si no se dispone de medición directa de velocidad, en la práctica suele utilizarse un diferenciador numérico. Solución que presenta problemas de amplificación de ruido, por lo que una alternativa confiable es emplear un observador de estados.

Atendiendo a la necesidad de robustez ante incertidumbres paramétricas y de una mejor estimación de la velocidad

angular, se propone un esquema de control de velocidad basado en los observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI, por sus siglas en inglés) propuestos en Sira-Ramirez et al. (2010). Estos observadores han sido empleados para controlar la velocidad angular del motor de inducción en Cortes-Romero et al. (2009); Sira-Ramirez et al. (2013). En dicho trabajo no se requiere la medición de los flujos de estator, además de que se presenta un diseño fácil de sintonizar y robusto ante par de carga variable.

En este artículo se propone utilizar un esquema en cascada para el control de velocidad del MRC, donde el lazo externo de control se diseña para realizar el control del subsistema mecánico. Para ello, se propone un esquema controlador-observador basado en los observadores GPI. Este esquema tiene la ventaja de no requerir medición de velocidad y al mismo tiempo realizar la estimación y compensación en línea de los términos de perturbación desconocidos debidos al par de carga y a la fricción del rotor. Para cumplir con el objetivo de control de velocidad y rechazo de perturbaciones, el lazo externo demanda un par mecánico de origen eléctrico, que se traduce en una corriente deseada de estator para el lazo interno. Este lazo interno se encarga de realizar el seguimiento de corrientes de estator, para el que se utiliza el controlador basado en pasividad reportado en Espinosa-Pérez et al. (2004).

El artículo se organiza como sigue, en la Sección 2 se revisa el control basado en observadores GPI. En la Sección 3 se plantea el problema y se presenta el modelo matemático del MRC. La Sección 4 contiene el resultado principal del artículo. En la Sección 5 se presentan simulaciones numéricas que muestran el buen desempeño del controlador ante par de carga variable. En la Sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. CONTROL BASADO EN OBSERVADORES GPI

Los observadores GPI son observadores lineales que se distinguen porque proponen un modelo polinomial, auto-actualizable, para perturbaciones desconocidas pero uniformemente acotadas que pueden depender del estado. La motivación del control basado en observadores GPI es simplificar el diseño del controlador a partir de la cancelación de las perturbaciones y dinámicas no modeladas mediante un estimado de éstas. Así, dado un sistema no lineal de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control y $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz de rango completo. Supongase que se quiere seguir una trayectoria \mathbf{x}_d . Si la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ fuera completamente conocida se podría diseñar la ley de control

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{F}(\mathbf{x})),$$

donde, si $m = n$, $\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1}$ representa la inversa de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ y en caso contrario $\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1}$ es la pseudoinversa de Penrose.

Sin embargo, la ley de control \mathbf{u}^* , no puede implementarse si se desconoce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, ya sea debido a incertidumbre paramétrica, perturbaciones desconocidas o dinámicas no modeladas. Para diseñar el control que lleve al estado \mathbf{x} a la trayectoria deseada se propone un modelo interno para los términos desconocidos englobados en $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. El primer paso es definir el error de seguimiento $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$, que sustituido en (1), permite escribir la dinámica del error de seguimiento como

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}_d, \quad (2)$$

donde los términos desconocidos se definen como

$$\mathbf{w}_1(t) \triangleq \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}_d,$$

que será modelado como un polinomio de Taylor de grado fijo más un término residual (Sira-Ramirez et al., 2010), para el que se pide satisfacer las siguientes suposiciones.

Suposición 1. $\mathbf{w}_1(t)$ y sus q primeras derivadas son absoluta y uniformemente acotadas para toda trayectoria del sistema. \triangle

Suposición 2. $\mathbf{w}_1(t)$ puede modelarse mediante un polinomio de Taylor de grado fijo ($q-1$) más un término residual, *i.e.*,

$$\mathbf{w}_1(t) = \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{a}_i t^i + \mathbf{r}(t),$$

donde $i = 1, \dots, q$ y \mathbf{a}_i son vectores de coeficientes constantes. \triangle

Bajo las *Suposiciones* 1 y 2 se puede escribir la dinámica de $\mathbf{w}_1(t)$ como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_1 &= \mathbf{w}_2 \\ \dot{\mathbf{w}}_2 &= \mathbf{w}_3 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{w}}_{q-1} &= \mathbf{w}_q \\ \dot{\mathbf{w}}_q &= \mathbf{r}^{(q)}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Con base en la definición de $\mathbf{w}_1(t)$, la expresión (2) puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{w}_1(t). \quad (4)$$

Si se propone la señal de control,

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1}(-\Lambda \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{w}}_1(t)) \quad (5)$$

donde $\Lambda > \mathbf{O}$ es una ganancia de control y $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{w}}_1(t)$ son estimados usando un observador tipo Luenberger de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \lambda_q \tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}_1 &= \hat{\mathbf{w}}_2 + \lambda_{q-1} \tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}_2 &= \hat{\mathbf{w}}_3 + \lambda_{q-2} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}_{q-1} &= \hat{\mathbf{w}}_q + \lambda_1 \tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}_q &= \lambda_0 \tilde{\mathbf{e}}, \end{aligned} \quad (6)$$

con $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{w}}_1(t) = \mathbf{w}_1(t) - \hat{\mathbf{w}}_1(t)$ y $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q+1})$ se escogen de tal manera que la matriz de polinomios $\mathbf{p}(\mathbf{s})$, definida como

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^{q+2} + \lambda_{q+1}\mathbf{s}^{q+1} + \dots + \lambda_1\mathbf{s} + \lambda_0,$$

sea Hurwitz con raíces suficientemente alejadas en el semiplano izquierdo del plano complejo.

De (4) y (5) se tiene que la dinámica del error en lazo cerrado estará representada por el siguiente sistema lineal perturbado

$$\dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e} = \Lambda \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{w}}_1(t),$$

donde el error \mathbf{e} convergerá a una vecindad de cero, si $\tilde{\mathbf{e}}$ y $\tilde{\mathbf{w}}_1(t)$ son suficientemente cercanos a cero.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para obtener el modelo matemático del MRC se parte de las siguientes consideraciones (Krishnan, 2001):

- C.1** Se desprecian las inductancias mutuas entre devanados del estator *i.e.*, las fases están desacopladas magnéticamente y eléctricamente.
- C.2** Las inductancias, para cada fase j , se definen usando la siguiente expresión:

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta - (j-1)\frac{2\pi}{3}\right), \quad (7)$$

donde $j = 1, 2, 3$, $\theta \in \mathbb{R}$ es la posición angular, N_r es el número de polos del rotor, con $l_0 > l_1 > 0$.

- C.3** Se considera que los encadenamientos de flujo son lineales con respecto a la corriente

$$\psi_j = L_j(\theta) i_j.$$

Por lo tanto, el modelo en variables de estado de un MRC de tres fases no saturado, considerando el par de carga es

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{D}(\theta)^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{D}(\theta)^{-1}(-\omega\mathbf{C}(\theta)\mathbf{i} - \mathbf{R}\mathbf{i}) \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (9)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J}\mathbf{i}^T\mathbf{C}(\theta)\mathbf{i} - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t), \quad (10)$$

donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de corrientes de fase, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de voltajes de entrada, $\theta \in \mathbb{R}$ es la posición angular del rotor, $\omega \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular de la flecha del rotor, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz diagonal de resistencias de los devanados del estator, $\mathbf{D}(\theta) = \text{diag}(L_1(\theta), L_2(\theta), L_3(\theta))$ es la matriz de inductancias de los devanados del estator, $\tau_L(t) \in \mathbb{R}$ es el par de carga, J es el momento de inercia de la flecha del rotor y d es el coeficiente de fricción viscosa. La matriz $\mathbf{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ está dada por

$$\mathbf{C}(\theta) = \frac{\partial \mathbf{D}(\theta)}{\partial \theta}. \quad (11)$$

Si se define el vector de estados

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (12)$$

entonces las ecuaciones (8)–(10) pueden reescribirse como

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{D}(x_2)^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{D}(x_2)^{-1} (-x_3 \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_1 - \mathbf{R} \mathbf{x}_1) \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (14)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2J} \mathbf{x}_1^T \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_1 - \frac{d}{J} x_3 - \frac{1}{J} \tau_L(t). \quad (15)$$

El problema a resolver es: Dado el modelo dinámico del MRC descrito por las ecuaciones (13)–(15), donde se asume que el par de carga, $\tau_L(t)$, es desconocido aunque acotado y se conoce el momento de inercia de la flecha del rotor J , garantizar el seguimiento (arbitrariamente cercano) de la velocidad angular a una velocidad de referencia.

4. RESULTADO PRINCIPAL

A continuación se presenta el controlador propuesto que es un esquema en cascada que consta de dos lazos de control. El lazo externo controla el subsistema mecánico. Este controlador recibe el comando de velocidad deseada, x_{3d} y determina el par deseado, τ_d , que a su vez es utilizado para calcular las corrientes deseadas, x_{jd} . En el lazo interno se controla el subsistema eléctrico utilizando los voltajes de estator, \mathbf{u} como entradas de control para realizar el seguimiento de corrientes.

4.1 Observador GPI para el lazo mecánico

Se definen $e_2 = x_2 - x_{2d}$ y $e_3 = x_3 - x_{3d}$, donde

$$x_{2d} = \int_0^t x_{3d}(\vartheta) d\vartheta, \quad x_{2d}(0) = x_2(0), \quad (16)$$

que junto con (14) y (15) permiten definir el error de seguimiento del subsistema mecánico como

$$\dot{e}_2 = e_3 \quad (17)$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{2J} \mathbf{x}_1^T \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_1 + z_1(t), \quad (18)$$

donde

$$z_1(t) \triangleq -\frac{d}{J} x_3 - \frac{1}{J} \tau_L(t) - \dot{x}_{3d}. \quad (19)$$

Bajo las *Suposiciones* 1 y 2 se puede escribir un modelo interno para $z_i(t)$, con $i = 1, \dots, p$, como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{p-1} &= z_p \\ \dot{z}_p &= r^{(p)}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Para estimar tanto las variables de fase del sistema como las señales desconocidas representadas por (20) se propone el observador tipo Luenberger

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 + \lambda_{p+1} \tilde{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \frac{1}{2J} \mathbf{x}_1^T \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_1 + \hat{z}_1 + \lambda_p \tilde{e}_2 \\ \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_{p-1} \tilde{e}_2 \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \lambda_{p-2} \tilde{e}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{p-1} &= \hat{z}_p + \lambda_1 \tilde{e}_2 \\ \dot{\hat{z}}_p &= \lambda_0 \tilde{e}_2, \end{aligned} \quad (21)$$

donde $\tilde{e}_2 = e_2 - \hat{e}_2$ y $\tilde{e}_3 = e_3 - \hat{e}_3$. Para lograr el seguimiento de velocidad, se propone la ley de control

$$\tau_d = J(-\Lambda_m \hat{e}_3 - \hat{z}_1), \quad (22)$$

donde $\Lambda_m > 0$ es una constante y $\lambda_0, \dots, \lambda_{p+1}$ son los coeficientes del polinomio característico

$$s^{p+2} + \lambda_{p+1} s^{p+1} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 = 0. \quad (23)$$

4.2 Controlador PBC para el lazo eléctrico

Para alcanzar el objetivo de control del lazo interno, $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_{1d}$, se utilizará la ley de control de Espinosa-Pérez et al. (2004), modificada para no utilizar la velocidad angular medida

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{D}(x_2) \dot{\mathbf{x}}_{1d} + (\hat{e}_3 + x_{3d}) \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_{1d} \\ &\quad + \mathbf{R} \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{K}_v \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

donde \mathbf{K}_v es una matriz diagonal de ganancias positiva definida, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1d}$ y las corrientes deseadas, que dependen del par deseado τ_d , están dadas por

$$x_{1dj} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2 m_j(x_2) \tau_d}{\frac{\partial L_j(x_2)}{\partial x_2}}} & \text{si } \frac{\partial L_j(x_2)}{\partial x_2} \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}, \quad (25)$$

donde $m_j(x_2)$, con $j = 1, 2, 3$, son las funciones de par compartido (Taylor, 1992), que permiten reducir el rizo en la velocidad angular al definir una conmutación suave entre las fases de estator.

Teorema 1. Las leyes de control (22) y (24) en conjunto con el observador (21) llevan al espacio de errores de seguimiento \mathbf{e}_1, e_2, e_3 y al espacio de errores observación $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_p)$ a una vecindad arbitrariamente cercana al origen si las raíces del polinomio (23) se eligen suficientemente alejadas a la izquierda en el semiplano complejo y se cumple que

$$\|\mathbf{e}_1(t_0)\| \leq \frac{\alpha_1}{c_2} \tilde{e}_{3 \max} \mathbf{x}_{1d \max}, \quad (26)$$

donde $\tilde{e}_{3 \max} > 0$, $\mathbf{x}_{1d \max} > 0$ son constantes que acotan a la norma de $\|\tilde{e}_3\|$ y $\|\mathbf{x}_{1d}\|$ respectivamente y $c_2 > 0$ es una ganancia del controlador.

Demostración. Dada la dinámica de los errores de seguimiento (17)–(18) y el modelo interno para $z_1(t)$ dado por (20) en lazo cerrado con el observador (21) se obtiene la dinámica del error de estimación como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_2 &= \tilde{e}_3 - \lambda_{p+1}\tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{e}}_3 &= \tilde{z}_1 - \lambda_p\tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - \lambda_{p-1}\tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= \tilde{z}_3 - \lambda_{p-2}\tilde{e}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{z}}_{p-1} &= \tilde{z}_p - \lambda_1\tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_p &= r^{(p)} - \lambda_0\tilde{e}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

donde $\tilde{e}_2 = e_2 - \hat{e}_2$, $\tilde{e}_3 = e_3 - \hat{e}_3$ y $\tilde{z}_i = z_i - \hat{z}_i$, con $i = 1, \dots, p$. A partir de (27), se puede obtener la ecuación diferencial en el dominio del tiempo

$$\tilde{e}_2^{(p+2)} + \lambda_{p+1}\tilde{e}_2^{(p+1)} + \dots + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_2 + \lambda_0\tilde{e}_2 = r^{(p)}(t).$$

Por suposición $r^{(p)}(t)$ está acotado, por consiguiente, el espacio de fase de los errores de estimación $(\tilde{e}_2, \dot{\tilde{e}}_2, \dots, \tilde{e}_2^{(p+2)})$ está finalmente acotado por un disco arbitrariamente pequeño centrado en el origen. Derivando $p + 1$ veces la primera ecuación de (27) con respecto al tiempo se obtiene que $(\tilde{e}_3, \dot{\tilde{e}}_3, \dots, \tilde{e}_3^{(p+1)})$ están acotados. De la segunda ecuación de (27) se puede demostrar que $(\tilde{z}_1, \dot{\tilde{z}}_1, \dots, \tilde{z}_1^{(p)})$ también están finalmente acotados. Siguiendo el mismo procedimiento, se llega a que los errores de estimación $\tilde{z}_j^{(p-j+1)}$, con $j = 1, \dots, p$ deben estar acotados.

De (19), asumiendo que $z_1(t)$ cumple con la *Suposición 1*, se sigue que x_3 está acotada, bajo la suposición de que x_{3d} , su derivada temporal y el par de carga τ_L están acotados. Por lo tanto, e_3 también está acotado. De la definición del error de observación, se tiene que $\hat{e}_3 = e_3 - \tilde{e}_3$ está acotada, por ser la suma de señales acotadas. De forma similar se puede mostrar que la variable de estimación \hat{z}_1 está acotada.

Por otro lado, la definición de la corriente deseada dada por (25) se obtiene a partir del par deseado

$$\tau_d = \frac{1}{2}\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_{1d},$$

que igualado a (22) permite expresar a la corriente deseada en términos de señales acotadas, *i.e.*,

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_{1d} = \mathbf{J}(-\Lambda_m \hat{e}_3 - \hat{z}_1), \quad (28)$$

de donde, por las propiedades de las funciones que componen la matriz $\mathbf{C}(x_2)$, puede obtenerse la desigualdad

$$|\alpha_1| \|\mathbf{x}_{1d}\|^2 \leq |\mathbf{J} \Lambda_m| \|\hat{e}_3\| + \frac{1}{|\mathbf{J}|} \|\hat{z}_1\|,$$

donde $\alpha_1 > 0$. Por lo tanto, también se puede asegurar que la corriente deseada \mathbf{x}_{1d} está acotada.

Para demostrar la estabilidad del lazo interno, se define el error de corrientes como $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1d}$, que en conjunto con la dinámica del subsistema eléctrico (13) da como resultado

$$\mathbf{D}(x_2)\dot{\mathbf{e}}_1 + x_3\mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1 + \mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \Psi, \quad (29)$$

donde

$$\Psi = \mathbf{u} - \{\mathbf{D}(x_2)\dot{\mathbf{x}}_{1d} + x_3\mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_{1d} + \mathbf{R}\mathbf{x}_{1d}\},$$

con \mathbf{u} definida en (24). A continuación, se utilizará la función continuamente diferenciable

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1^T \mathbf{D}(x_2)\mathbf{e}_1, \quad (30)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{D}(x_2)\dot{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{2}x_3\mathbf{e}_1^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1. \quad (31)$$

Sustituyendo (24) y (29) en (31) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}_1^T \left(\frac{1}{2}x_3\mathbf{C}(x_2) + \mathbf{R} + \mathbf{K}_v \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \tilde{e}_3\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (32)$$

En Espinosa-Pérez et al. (2004) se demuestra que este subsistema sin el término $\tilde{e}_3\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1$, es asintóticamente estable si se elige $\mathbf{K}_v \geq c_1|x_3|\mathbb{I}_3$, con $c_1 = N_r l_1$, donde $\mathbb{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad. En el esquema propuesto, la existencia de este término no permite demostrar directamente estabilidad asintótica del error de seguimiento de corrientes, por lo que se propone reescribir (32) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}_1^T \left(\frac{1}{2}x_3\mathbf{C}(x_2) + \mathbf{R} + \mathbf{K}_{v1} \right) \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_{v2}\mathbf{e}_1 \\ &\quad - \tilde{e}_3\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (33)$$

donde $\mathbf{K}_v = \mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{v2}$, con $\mathbf{K}_{v1} \geq c_1|x_3|\mathbb{I}_3$, $c_1 = N_r l_1$, $\mathbf{K}_{v2} \geq c_2\mathbb{I}_3$ y $c_2 > 0$.

Se utilizará el término $-\mathbf{e}_1^T \left(\frac{1}{2}x_3\mathbf{C}(x_2) + \mathbf{R} + \mathbf{K}_{v1} \right) \mathbf{e}_1$ para dominar a $\tilde{e}_3\mathbf{x}_{1d}^T \mathbf{C}(x_2)\mathbf{e}_1$. Para ello, de (33) puede obtenerse

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mathbf{e}_1^T \left(\frac{1}{2}x_3\mathbf{C}(x_2) + \mathbf{R} + \mathbf{K}_{v1} \right) \mathbf{e}_1 \leq -\mathbf{e}_1^T \mathbf{R}\mathbf{e}_1 \\ \forall \|\mathbf{e}_1\| &\geq \mu > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

con

$$\mu = \frac{\alpha_1}{c_2} r_f \|\mathbf{x}_{1d}\|_{max},$$

donde r_f es la cota final del error de estimación \tilde{e}_3 ¹.

Más aún, si se define, para $r > 0$, una región $B_r \subset \mathbb{R}^3$ como

$$B_r \triangleq \{\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{e}_1\| \leq \frac{\alpha_1}{c_2} \tilde{e}_{3 \max} \mathbf{x}_{1d \max}\}, \quad (35)$$

¹ Como se establece en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles (2014), esta cota final se puede hacer arbitrariamente pequeña si se eligen los polos de (21) suficientemente alejados del eje imaginario del plano complejo.

donde el estado en el tiempo inicial cumple con

$$\|e_1(t_0)\| \leq B_r, \quad (36)$$

entonces existe un tiempo $T > 0$ tal que

$$\|e_1\| \leq \frac{\alpha_1}{c_2} r_f \|x_{1d}\|, \quad \forall t > t_0 + T. \quad (37)$$

Por lo tanto la función definida en (30) y su derivada temporal dada por (33) cumplen con las condiciones establecidas en Khalil (2002)(Teorema 4.18), por lo que se concluye que el error de seguimiento de corrientes e_1 está finalmente acotado. De (37) puede verse que la cota final puede hacerse arbitrariamente pequeña dado que c_2 puede ser arbitrariamente grande si se elige adecuadamente la matriz de ganancias K_{v2} . \triangle

Observación 1. En contraste con el trabajo de Espinosa-Pérez et al. (2004), en el esquema presentado en este artículo se propone una lazo externo basado en los observadores GPI. Una ventaja de este controlador es el rechazo a perturbaciones acotadas, por lo que se puede lidiar con pares de carga desconocidos. Otra ventaja es que el esquema estima de forma natural las variables de fase del error de posición, por lo que no requiere medición de velocidad. No obstante, en lugar de la estabilidad asintótica obtenida en Espinosa-Pérez et al. (2004), se obtiene sólo estabilidad finalmente acotada de los errores de seguimiento, aunque la cota final puede hacerse arbitrariamente pequeña utilizando alta ganancia.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se realizaron simulaciones numéricas del esquema propuesto (que se denotará como GPI), del esquema publicado en Espinosa-Pérez et al. (2004) (que se denotará como PBC) y del esquema de control sin medición de velocidad reportado en Loria et al. (2012) (que se denotará como PI2D). En todos los casos se tiene ruido en las corrientes de fase y par de carga diferente de cero. Los parámetros son el número de polos de rotor $N_r = 8$, la inercia $J = 0.1$ [Kgm²], el coeficiente de fricción viscosa $d = 0.001$ [Kgm²/s], la resistencia de los devanados del estator $R = 1.7\mathbb{I}_3$ [Ω] y los parámetros $l_0 = 0.0121$ [H] y $l_1 = 0.0115$ [H]. El orden del polinomio en (23) es $p = 3$ y los polos del observador son $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = -250$, mientras $\Lambda_m = 100$ y $K_v = 10\mathbb{I}_3$. Para el controlador PI2D se eligieron $K_{d1} = 200$, $K_{pl} = 100$, $K_{pxl} = 5$, $\epsilon_1 = 0.001$, $K_{i1} = 100$ y $\nu = 0$. Mientras para el controlador PBC se usaron las ganancias $a = b = 200$ y $K_v = 10\mathbb{I}_3$.

Par de carga variable

En la Figura 1 se presenta la respuesta ante el cambio de carga en la flecha de motor, donde en a) se muestra el par de carga variable, en b) se muestra el comportamiento de la velocidad para los tres controladores y en c) se muestra el error de seguimiento de velocidad, e_3 , desde el momento en que aumenta el par de carga de cero a 0.3 [Nm], hasta el momento en que éste permanece constante, igual a 0.6 [Nm]. En este intervalo el error de velocidad del controlador GPI se mantiene alrededor de cero, mientras el error de los controladores PI2D y PBC aumenta conforme

aumenta el par de carga. En la Figura 2 se muestra una comparación de la corriente de una fase para el controlador GPI, Figura 2 a), y para el controlador PI2D, Figura 2 b). La corriente deseada del esquema GPI es menor que la corriente deseada del esquema PI2D.

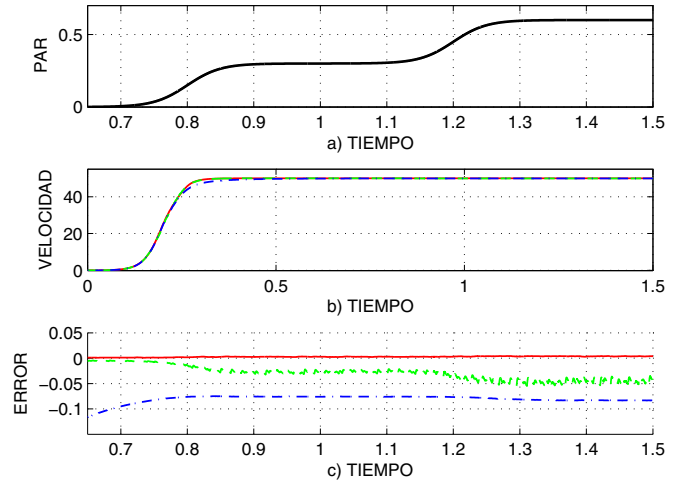


Figura 1. a) Par de carga, b) Seguimiento de velocidad, c) Error de velocidad ω_d (—), ω_{GPI} (---), ω_{PI2D} (-.-), ω_{PBC} (-.-).

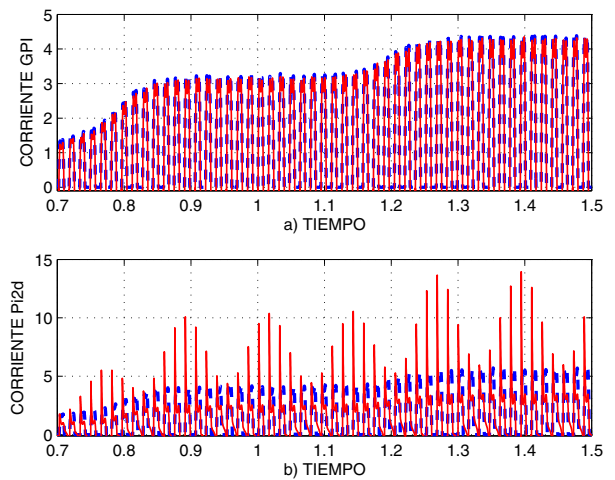


Figura 2. a) Regulación de corriente GPI, b) Regulación de corriente PI2D, i_d (-.-), i (—).

Par de carga variable, con variación de parámetros

En la Figura 3 se muestra la respuesta de los controladores con la referencia $V_{ref}(t) = 75 \sin(t)$ [rad/s], un par de carga constante de $\tau_L(t) = 0.5$ [Nm] y una variación en los parámetros eléctricos de un 50%. En este caso los esquemas GPI y PI2D tienen respuestas similares con errores de velocidad cercanos a cero, mientras el esquema PBC tiene un error mayor al 5% de la magnitud de la referencia. En la Figura 4 se muestra una comparación de la corriente de una fase para el controlador GPI, Figura 4 a), y para el

controlador PI2D, Figura 4 b). El seguimiento de corriente es mejor para el esquema propuesto, así como es menor la corriente promedio requerida por éste para la misma tarea de control.

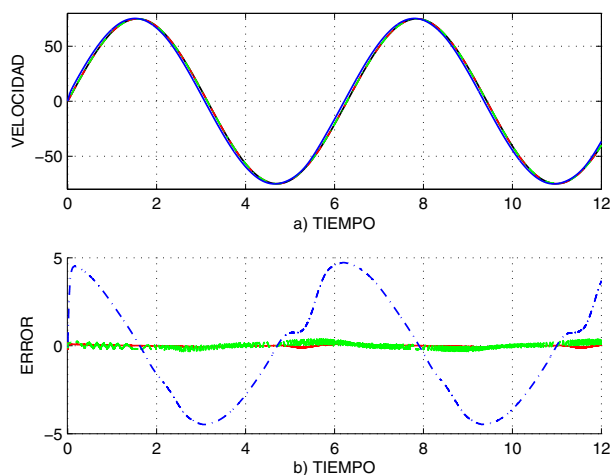


Figura 3. a) Seguimiento de velocidad, b) Error de velocidad ω_d (—), ω_{GPI} (—), ω_{PI2D} (- - -), ω_{PBC} (- . -).

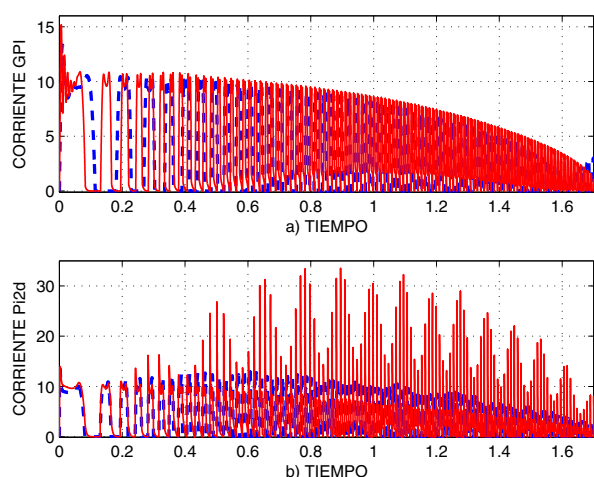


Figura 4. a) Regulación de corriente GPI, b) Regulación de corriente PI2D, i_d (- - -), i (—).

6. CONCLUSIONES

Se presenta un controlador robusto ante cambios en el par de carga y ante incertidumbres en los parámetros (el único parámetro que se requiere conocer es la inercia de la flecha del rotor). El controlador propuesto es capaz de lidiar con cambios en el par de carga con un error de seguimiento de velocidad cercano a cero aun con variación de parámetros. Las corrientes necesarias para la tarea de control fueron menores para el esquema presentado con respecto a las corrientes calculadas por el controlador de Loria et al. (2012). El controlador propuesto es fácil de sintonizar ya que sólo se requiere decidir donde colocar los polos del observador y la magnitud de las ganancias de control.

7. AGRADECIMIENTOS

A. De La Guerra agradece al **CONACYT** bajo la beca de doctorado con **CVU No.332351**.

REFERENCIAS

- Arteaga-Pérez, M.A. y Gutiérrez-Giles, A. (2014). On the gpi approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control*, 87(4), 844–860.
- Cortes-Romero, J., Luviano-Juarez, A. y Sira-Ramirez, H. (2009). Robust gpi controller for trajectory tracking for induction motors. In *Mechatronics, 2009. ICM 2009. IEEE International Conference on*, 1–6.
- Espinosa-Pérez, G., Maya-Ortiz, P., Velasco-Villa, M. y Sira-Ramírez, H. (2004). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetics circuits. *IEEE Trans. Control Syst. Tech.*, 12, 439–448.
- Hannoun, H., Hilaiet, M. y Marchand, C. (2011). High performance current control of a switched reluctance machine based on a gain-scheduling pi controller. *Control Engineering Practice*, 19(11), 1377–1386.
- Khalil, Hassan, K. (2002). *Nonlinear systems, 3rd*. New Jersey, Prentice Hall.
- Krishnan, R. (2001). *Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design, and applications*. CRC press.
- Loria, A., Espinosa-Perez, G. y Chumacero, E. (2012). A novel pid-based control approach for switched-reluctance motors. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, 7626–7631. IEEE.
- Nassereddine, M., Rizk, J. y Nagrial, M. (2008). Switched reluctance generator for wind power applications. *Proc. World Academy of Science*, 31, 126–130.
- Rain, X., Hilaiet, M. y Talj, R. (2010). Second order sliding mode current controller for the switched reluctance machine. In *IECON 2010-36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, 3301–3306. IEEE.
- Sira-Ramirez, H., Gonzalez-Montanez, F., Cortes-Romero, J. y Luviano-Juarez, A. (2013). A robust linear field-oriented voltage control for the induction motor: Experimental results. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 60(8), 3025–3033.
- Sira-Ramirez, H., Ramirez-Neria, M. y Rodriguez-Angeles, A. (2010). On the linear control of nonlinear mechanical systems. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, 1999–2004. IEEE.
- Takano, Y., Takeno, M., Hoshi, N., Chiba, A., Takemoto, M., Ogasawara, S. y Rahman, M.A. (2010). Design and analysis of a switched reluctance motor for next generation hybrid vehicle without pm materials. *Power Electronics Conference (IPEC), 2010 International*, 1801–1806.
- Taylor, D. (1992). Pulse-width modulated control of electromechanical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(4), 524–528.
- Toliyat, H. y Kliman, G. (2012). *Handbook of Electric Motors*. Electrical and computer engineering. Taylor & Francis.