Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014
Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México

Construcción de Funciones de Lyapunov para Sistemas Homogéneos de Segundo Orden

Francisco López [*], **Tonámetl Sánchez** [*] **y Jaime A. Moreno** [*]

[*] *Instituto de Ingeniería, UNAM, 04510 México D.F. (correo:* `paco@fisica.unam.mx`*,* `TSanchezR@iingen.unam.mx`*,* `JMorenoP@ii.unam.mx`*).*

Resumen: Encontrar funciones de Lyapunov (FL) explícitas para estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos involucra siempre, resolver una ecuación en derivadas parciales (EDP), tarea que en general está lejos de ser sencilla. A pesar de que existe un gran número de métodos que permiten obtener FL, no existe un método sistemático universal. Por lo anterior se puede decir que el problema de obtención de FL permanece abierto para muchas clases de sistemas no lineales, en particular para los algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior. Es posible utilizar la propiedad de homogeneidad de ciertos sistemas como auxiliar en la obtención de funciones de Lyapunov, así, en este trabajo se presenta un método sistemático para diseñar FL para sistemas homogéneos de segundo orden. En comparación con métodos previamente reportados, el que aquí se expone permite obtener funciones de Lyapunov explícitas para un conjunto mayor de sistemas dinámicos homogéneos y reduce significativamente el análisis de definitividad de signo. El método se aplica a un sistema por Modos Deslizantes de Segundo Orden conocido como algoritmo Terminal. Para dicho sistema, se obtiene una familia de FL de grado homogéneo arbitrario.

Palabras clave: Funciones de Lyapunov, Modos Deslizantes de Orden Superior.

1. INTRODUCCIÓN

Entre los distintos procedimientos que existen para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales, el Método Directo de Lyapunov (MDL) es sin duda el más ampliamente utilizado. Este método, concebido en 1892 por el célebre matemático ruso A.M. Lyapunov, no solo permite determinar si el origen del sistema es estable sino que, a través de las funciones de Lyapunov, permite estudiar otras propiedades dinámicas como regiones de atracción, procesos transitorios, estabilidad en tiempo finito y la estimación del tiempo de convergencia al origen. El teorema en el que se sustenta el MDL establece que la existencia de una función escalar V positiva definida (pd), tal que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema sea negativa definida (nd), implica que el origen del sistema es un punto de equilibrio asintóticamente estable. El método nos permite concluir estabilidad del origen una vez obtenida la función V, conocida como función de Lyapunov (FL). Sin embargo, el MDL no aborda en absoluto cómo obtener V y para hacerlo es necesario resolver una ecuación diferencial parcial (EDP), que surge de las condiciones impuestas a la función de Lyapunov.

En la década de los sesentas del siglo pasado surgieron tres importantes métodos que permiten obtener funciones de Lyapunov para sistemas dinámicos: El método del Gradiente Variable, el método de Zubov y el método de Krasovskii. En el primero se asume que la función V proviene de un gradiente escalar pd $g(x)$ y se trata de obtener la función V integrando $g(x)$ a lo largo de las trayectorias que unen el orígen con el punto x (Schultz y Gibson (1962)). El segundo utiliza una forma especial de la EDP (obtenida a partir del MDL) de donde puede determinarse una FL única al resolver tal ecuación (Zubov (1964)). En el método de Krasovskii, quizá el más simple de los tres, se propone una función cuadrática, candidata de Lyapunov V que se ratifica como FL si la matriz jacobiana del sistema y la función V satisfacen la ecuación algebráica de Lyapunov (Krasovskii (1959)). A pesar de que estos métodos son ampliamente usados, aún existe una gran cantidad de sistemas no lineales en los cuales resulta complicado o imposible aplicarlos. Por ejemplo, en la teoría de control por modos deslizantes, la señal discontínua de los controladores, característica de este tipo de control, dificulta aplicar estos métodos *convencionales* en la obtención de FL. En casos como este es necesario utilizar métodos alternativos.

Recientemente se ha utilizado la propiedad de homogeneidad para abordar la estabilidad en sistemas en donde no es posible utilizar métodos convencionales (Orlov (2004), Levant (2005), Sanchez y Moreno (2012), Polyakov y Poznyak (2012)). En estos trabajos se utiliza esta propiedad de escalamiento mulitiplicativo ya sea como auxiliar en la obtención de FL o para obtener conclusiones directas acerca de la estabilidad del origen del sistema. En (Levant (2005)), por ejemplo, se demuestra a través de construcciones geométricas no triviales, la estabilidad en tiempo finito de sistemas (homogéneos con grado de homogeneidad negativo) por Modos Deslizantes de Orden Superior.

El presente trabajo, tiene como objetivo ampliar el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos homogéneos proponiendo un método de construcción de FL para sistemas de segundo orden. En el método que se presenta, se hace uso de la homogeneidad para reducir en una variable las funciones involucradas en el MDL y así reducir la complejidad de la EDP contenida en el mismo. Como características distintivas, este método, denominado Método por Reducción de Variable (MRV), permite obtener FL explícitas para un conjunto mayor de sistemas dinámicos y reduce significativamente en análisis de definitivad de signo. Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la siguiente sección se presenta el marco teórico necesario para fundamentar el MRV, a continuación se presenta el desarrollo del método así como su procedimiento constructivo. En la sección 4 se aplica el MRV para la obtención de FL del algoritmo Terminal, un algoritmo ampliamente usado en control por Modos Deslizantes de Segundo Orden. Finalmente en la Sección 5 se presentan algunas conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Método Directo de Lyapunov

El MDL para sistemas de segundo orden, puede enunciarse de la siguiente forma:

Teorema 1. (Khalil (2002))[Método Directo de Lyapunov] Considere el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (1) y $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $x = 0 \in D$. Sean $V : D \to \mathbb{R}$ y $W : D \to \mathbb{R}$ funciones continuamente diferenciables tales que

$$V(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \text{en} \quad D \setminus \{0\}, \tag{2}$$

$$W(x_1, x_2) \leq 0,$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = W \quad \text{en} \quad D\,, \tag{3}$$

entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$W(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad W(x_1, x_2) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}, \tag{4}$$

entonces, $x = 0$ es asintóticamente estable.

Una función, continuamente diferenciable, que satisfaga (2) y (3) se denomina función de Lyapunov (FL), si además satisface (4) se le conoce como función de Lyapunov estricta (FLE).

El Teorema 1, tal como está escrito, sólo acepta FL diferenciables, sin embargo con el subsecuente desarrollo de la teoría de Lyapunov se ha conseguido establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir sólo del decrecimiento monotónico de V (Polyakov y Poznyak (2012)), permitiendo así la existencia de FL no suaves e incluso discontinuas (Polyakov y Fridman (2014)).

2.2 Homogeneidad Ponderada

Una función homogénea es aquella función que exhibe propiedades de escalamiento, es decir que multiplicar los argumentos de dicha función por un factor equivale a multiplicar la función misma por este factor. Expresado de manera formal esto es

Definición 1. Bacciotti y Rosier (2005) [Dilataciones] Para un conjunto fijo de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Sea $r = (r_1, ..., r_n)$ una n-tupla de numeros reales, enteros y positivos. La familia de dilataciones $(\delta_\varepsilon^r)_{\varepsilon>0}$ (asociada con r) está definida por

$$\delta_\varepsilon^r(x) := (\varepsilon^{r_1} x_1, ..., \varepsilon^{r_n} x_n), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \varepsilon > 0,$$

los números r_i se denominan *pesos de homogeneidad.*

Definición 2. Bacciotti y Rosier (2005) [Función Homogénea] Se dice que una función $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es δ^r-homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$H(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m H(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Definición 3. Bacciotti y Rosier (2005)[Campo Vectorial Homogéneo] Se dice que un campo vectorial $f = [f_1(x), ..., f_n(x)]^T$ es δ^r-homogéneo de grado k si su componente f_i es δ^r-homogénea de grado $k + r_i$ para cada i; esto es,

$$\begin{aligned} f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, ..., \varepsilon^{r_n} x_n) &= \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon &> 0, \ \forall i \in [[1, n]]. \end{aligned} \tag{6}$$

Teorema 2. Bacciotti y Rosier (2005)[Función de Lyapunov Homogénea] Sea f un campo vectorial continuo $\mathbb{R}^n$ tal que su origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Asuma que f es δ^r-homogénea de grado k para algún $r \in (0, +\infty)^n$. Entonces, para cualquier $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ y cualquier $m > p \cdot \max_i\{r_i\}$, existe una FLE V, que es δ^r-homogénea de grado m y de clase C^p. Como una consecuencia directa, la derivada temporal $\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ es δ^r-homogénea de grado $m + k$.

Este último teorema resulta relevante ya que garantiza la existencia de una FLE homogénea para cualquier sistema homogéneo continuo que posea un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen.

2.3 Reducción de Variable en Funciones Homogéneas

Cualquier función en dos variables $H(x_1, x_2)$, homogénea de grado m cumple, de acuerdo con la Definición 2, con

$$H(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2) = \varepsilon^m H(x_1, x_2), \quad \varepsilon > 0. \tag{7}$$

donde r_1 y r_2 representan los pesos de homogeneidad. Si se escoge $\varepsilon = |x_1|^{-\frac{1}{r_1}}$, se tiene

$$H\Big(\operatorname{sign}(x_1), \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}\Big) = |x_1|^{-\frac{m}{r_1}} H(x_1, x_2), \quad \forall x_1 \neq 0. \tag{8}$$

Al definir el cambio de variable $z = x_2 / x_1^{\frac{r_2}{r_1}}$ y reacomodar términos esto resulta

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^{\pm}(z), \quad \forall x_1 \neq 0, \tag{9}$$

donde $\mathcal{H}^{\pm}(z)$ representa la existencia de dos funciones, $\mathcal{H}^{+}(z)$ y $\mathcal{H}^{-}(z)$, la primera para la parte positiva de $\operatorname{sign}(x_1)$ y la segunda para la negativa. De esta forma, es posible representar una ecuación homogénea de dos variables a través de dos funciones, homogéneas o no, de una sola variable.

Con este nuevo cambio de variable, el estudio de los límites $\lim_{x_1 \to 0^+} \mathcal{H}^{+}(z)$ y $\lim_{x_1 \to 0^-} \mathcal{H}^{-}(z)$ resulta relevante para garantizar tanto la continuidad de la función $H(x_1, x_2)$ a lo largo del eje x_2 como su positividad definida. Al reacomodar estos límites en términos de la nueva variable z se obtienen los siguientes cuatros límites

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}} = L^-_{-\infty} \quad , \quad \lim_{z\to-\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}} = L^+_{-\infty} \quad (10)$$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}} = L^-_{+\infty} \quad , \quad \lim_{z\to+\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}} = L^+_{+\infty} \quad (11)$$

que, dependiendo del órden[1] de $\mathcal{H}^\pm(z)$ conforme $z \to \infty$, aceptan tres casos:

$$\lim_{z\to\pm\infty} \frac{\mathcal{H}^\pm(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \mathcal{H}^\pm(z) \in o(|z|^{\frac{m}{r_2}}) \\ L^\pm_{\pm\infty}, & \text{si} \quad \mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(|z|^{\frac{m}{r_2}}) \\ \pm\infty, & \text{si} \quad \mathcal{H}^\pm(z) \in \omega(|z|^{\frac{m}{r_2}}) \end{cases} \quad (12)$$

con $L^\pm_{\pm\infty} \in \mathbb{R}$.

Continuidad de H Del análisis de arriba, resulta claro que para que H se continua a lo largo del eje x_2, $L^-_{-\infty} = L^+_{-\infty}$ y $L^-_{+\infty} = L^+_{+\infty}$, y para que esto ocurra debe cumplirse

$$\mathcal{H}^\pm(z) \in O(|z|^{\frac{m}{r_2}}). \quad (13)$$

Así, esta última condición sobre $\mathcal{H}^\pm$ es necesaria y suficiente para la continuidad de H a lo largo del eje x_2.

Positividad Definida de H Para que H sea una función positiva, resulta claro de la Ecuación (9) que

$$\mathcal{H}^\pm(z) > 0 \Rightarrow H(x_1, x_2) > 0. \quad (14)$$

Para que H se una función positiva definida se requiere un análisis más cuidadoso. Comencemos por suponer que $\mathcal{H}^\pm(z) > 0$ y que $\mathcal{H}^\pm(0) \neq 0$. Consideramos primero el caso en el que $x_2 = 0$. De (9), esto resulta

$$H(x_1, 0) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(0). \quad (15)$$

Dado que $\mathcal{H}^\pm(0) \neq 0$, $H(x_1, 0)$ es una función pd en x_1. Considerando a continuación, el caso cuando $x_1 = 0$, tenemos de (9) en términos de z que

$$H(0, x_2) = |x_2|^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z\to\pm\infty} \frac{\mathcal{H}^\pm(z)}{|z|^{\frac{m}{r_2}}}. \quad (16)$$

Si $\mathcal{H}^\pm(z) \in o(|z|^{\frac{m}{x_2}})$, entonces $\lim_{z\to\pm\infty} \frac{\mathcal{H}^\pm(z)}{|z|^{m/r_2}} = 0$ y $H(0, x_2) = 0$ sin importar el valor x_2. Sin embargo, si $\mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(|z|^{\frac{m}{r_2}})$, la Ecuación (16) resulta

$$H(0, x_2) = |x_2|^{\frac{m}{r_2}} L^\pm_{\pm\infty},$$

es decir, una función pd en x_2. A partir de estas consideraciones es posible enunciar la condiciones sobre $\mathcal{H}^\pm(z)$ que permiten que $H(x_1, x_2)$ sea pd:

$$\mathcal{H}^\pm(z) > 0, \mathcal{H}^\pm(0) \neq 0, \mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(|z|^{\frac{m}{r_2}})$$
$$\Rightarrow$$
$$H(0, 0) = 0, H(x_1, x_2) > 0 \text{ en} D. \quad (17)$$

Nótese que el análisis de definitividad de signo de $H(x_1, x_2)$, una función en dos variable, se reduce al análisis de definitividad de signo de $\mathcal{H}^\pm(z)$, una función en una sola variable. Nótese también que todo el análisis realizado en esta subsección, también pudo haberse realizado escogiendo $\varepsilon = |x_2|^{-\frac{1}{r_2}}$.

[1] La notación aquí utilizada corresponde a la notación estándar de crecimiento asintótico (Graham et al. (1989))

3. MÉTODO POR REDUCCIÓN DE VARIABLE

3.1 Desarrollo

Considere el sistema homogéneo de segundo orden (1) con grado de homogeneidad $k \in \mathbb{R}$ y con un punto de equilibrio en el origen. Considere también las funciones homogéneas, positivas definidas $V(x_1, x_2)$ y $-W(x_1, x_2)$, tales que, de acuerdo al procedimiento descrito en (2.3), pueden expresarse como

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^\pm(z), \quad (18)$$

$$W(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \mathcal{W}^\pm(z), \quad (19)$$

donde $m \in \mathbb{R}$ representa el grado de homogeneidad de V y r_1 es el peso de homogeneidad de la coordenada x_1.

Dado que las funciones f_1 y f_2 son homogéneas por hipótesis, también es posible expresarlas en términos de la nueva variable z

$$f_1(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{r_1+k}{r_1}} \phi_1^\pm(z), \quad (20)$$

$$f_2(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{r_2+k}{r_1}} \phi_2^\pm(z). \quad (21)$$

Al sustituir (18)-(21) en el MDL (3), se obtiene la siguiente ecuación

$$|x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \Big(-\frac{r_2}{r_1} z \,\text{sign}(x_1) \phi_1^\pm(z) + \phi_2^\pm(z) \Big) \frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) +$$
$$|x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \frac{m}{r_1} \text{sign}(x_1) \phi_1^\pm(z) \mathcal{V}^\pm(z) = |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \mathcal{W}^\pm(z).$$

Separando esta última ecuación en la parte positiva y negativa de la función $\text{sign}(x_1)$ se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales, ordinarias, lineales y de primer orden

$$\frac{d}{dz}\mathcal{V}^+(z) + \frac{\frac{m}{r_1}\phi_1^+}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^+ + \phi_2^+} \mathcal{V}^+(z) = \frac{\mathcal{W}^+(z)}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^+ + \phi_2^+}, (22)$$

$$\frac{d}{dz}\mathcal{V}^-(z) - \frac{\frac{m}{r_1}\phi_1^-}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^- + \phi_2^-} \mathcal{V}^-(z) = \frac{\mathcal{W}^-(z)}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^- + \phi_2^-}, \quad (23)$$

cuyas soluciones generales son

$$\mathcal{V}^+(z) = e^{-\int \alpha^+(z)dz} \left[\int e^{\int \alpha^+(z)dz} \beta^+(z)dz + C \right], (24)$$

$$\mathcal{V}^-(z) = e^{-\int \alpha^-(z)dz} \left[\int e^{\int \alpha^-(z)dz} \beta^-(z)dz + D \right], (25)$$

donde

$$\alpha^+(z) = \frac{\frac{m}{r_1}\phi_1^+(z)}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^+(z) + \phi_2^+(z)}, \ \alpha^-(z) = \frac{-\frac{m}{r_1}\phi_1^-(z)}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^-(z) - \phi_2^-(z)},$$

$$\beta^+(z) = \frac{\mathcal{W}^+(z)}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^+(z) - \phi_2^+(z)}, \quad \beta^-(z) = \frac{\mathcal{W}^-(z)}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^-(z) + \phi_2^-(z)}.$$

Para completar el procedimiento de encontrar V, es necesario transformar (24) y (25) a las coordenadas originales (x_1, x_2) y encontrar, igualando (24) y (25), los valores de

C y D que permiten que V sea continua a lo largo del eje x_2. La función V resultante, de ser pd, representa la familia completa de funciones de Lyapunov homogéneas y continuas cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (1) es W. Nótese que, en lugar de proponer una función W, homogénea y pd, es posible proponer una función $\mathcal{V}^{\pm}(z)$ pd, no necesariamente homogénea.

Del procedimiento anterior puede apreciarse que, a través de la homogeneidad, se ha reducido el problema original, en dos variables, de encontrar la función $V(x_1, x_2)$ a dos problemas monovariables de encontrar las funciones $\mathcal{V}^{\pm}(z)$.

También es importante notar que al análisis de definitividad de signo también se reduce de un análisis en dos variables a uno monovariable ya que, como se mencionó en en la sección 2.3.2, el signo de $\mathcal{V}^{\pm}(z)$ implica directamente el signo de $V^{\pm}(x_1, x_2)$.

Dado que (22) y (23) son ecuaciones diferenciales ordinarias, si no es posible encontrar soluciones generales explícitas, es poible utilizar otros métodos de resolución como el método de series de potencias o utilizar ecuaciones de Bernoulli (como se mostrará más adelante).

Finalmente, en (9) se pudo haber escogido $\varepsilon = |x_2|^{-\frac{1}{r_2}}$, que conduce al cambio de variable $z = x_1/|x_2|^{\frac{r_1}{r_2}}$ y ecuaciones análogas en el desarrollo del método. Dependiendo de los pesos de homogeneidad, esta segunda elección permite obtener funciones más simples en la variable z.

3.2 Ecuaciones de Bernoulli

Una forma alterna en la que se puede aplicar el MRV es proponiendo $W(x_1, x_2)$ como una potencia de $V(x_1, x_2)$, es decir

$$W = -V^p$$

El valor del exponente p no es libre ya que, de acuerdo con el Teorema 2, el grado de homogeneidad de W debe ser $m + k$. Al transformar esta nueva W en la variable z se tiene

$$-V^{m+k} = -|x_1|^{\frac{m}{r_1}} (\mathcal{V}^{\pm}(z))^{\frac{m+k}{m}}$$

y al sustituir esta expresión en la Ecuación 22 se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli

$$\frac{d}{dz}\mathcal{V}^{+} + \frac{\frac{m}{r_1}\phi_1^{+}}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{+} + \phi_2^{+}}\mathcal{V}^{+} = \frac{-(\mathcal{V}^{+})^{\frac{m+k}{m}}}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{+} + \phi_2^{+}}, \quad (26)$$

$$\frac{d}{dz}\mathcal{V}^{-} - \frac{\frac{m}{r_1}\phi_1^{-}}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{-} + \phi_2^{-}}\mathcal{V}^{-} = \frac{-(\mathcal{V}^{-})^{\frac{m+k}{m}}}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{-} + \phi_2^{-}}, \quad (27)$$

que, aunque no son ecuaciones diferenciales lineales, poseen las siguientes soluciones generales (Weisstein (2002))

$$\mathcal{V}^{+} = \left[\frac{\frac{k}{m}\int \frac{e^{-\frac{k}{m}\int \alpha^{+}(z)dz}}{-\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{+} + \phi_2^{+}} + C}{e^{-\frac{k}{m}\int \alpha^{+}(z)dz}}\right]^{-\frac{m}{k}}, \quad k \neq 0, \quad (28)$$

$$\mathcal{V}^{-} = \left[\frac{\frac{k}{m}\int \frac{e^{\frac{k}{m}\int \alpha^{-}(z)dz}}{\frac{r_2}{r_1}z\phi_1^{+} + \phi_2^{+}} + D}{e^{\frac{k}{m}\int \alpha^{-}(z)dz}}\right]^{-\frac{m}{k}}, \quad k \neq 0. \quad (29)$$

Al escoger esta variante, se sacrifica el grado de libertad que otorga el proponer $\mathcal{W}^{\pm}(z)$. A cambio, el usar esta aproximación puede, al regresar a las coordenadas originales, definir la derivada temporal de la FL $\dot{V}$ en términos de una potencia de V, lo cual puede resultar útil, por ejemplo, para estimar el tiempo de convergencia al origen. Más aún, cuando no es posible proponer $\mathcal{W}^{\pm}$ tal que $\mathcal{V}^{\pm}$ tenga una forma explícita, esta variante del MRV podría resultar exitosa.

Una vez cubierto el desarrollo del MRV, es posible enunciarlo de manera constructiva.

3.3 Procedimiento Constructivo

Considere nuevamente el sistema homogéneo de segundo orden (1) con un punto de equilibrio en el origen.

(1) Fije un grado de homogeneidad $m \in \mathbb{R}$ para la función de Lyapunov a obtener [2].
(2) Para obtener una FL, proponga una función negativa $\mathcal{W}^{\pm}(z)$. Para obtener una FLE, proponga una función negativa $\mathcal{W}^{\pm}(z)$ tal que $\mathcal{W}^{\pm}(0) \neq 0$ y $\mathcal{W}^{\pm}(z) \in \Theta(|z|^{(m+k)/r_2})$.
(3) Exprese las funciones $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ del sistema (1) en términos de la variable z siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 2.3.
(4) Obtenga las funciones $\mathcal{V}^{\pm}(z)$ usando las Ecuaciones (24)-(25). Si no es posible obtener una solución general explícita usando estas ecuaciones, utilice la solución general de las ecuaciones de Bernoulli (28)-(29). Si aún no es posible encontrar una solución explícita, utilice algún otro método de solución de EDO para las Ecuaciones (27), p.e. series de potencias. Si todo lo anterior falla fije una m distinta y/o una función $\mathcal{W}^{\pm}(z)$ diferente.
(5) Verifique que $\mathcal{V}^{\pm}(z)$ cumple las condiciones de pd (17). De ser así, continúe.
(6) Transforme a las coordenadas originales (x_2, x_2) encontrando $V^{+}(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}}\mathcal{V}^{+}(z)$ y $V^{-}(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}}\mathcal{V}^{-}(z)$.
(7) Encuentre las condiciones bajo las cuales V^{+} y V^{-} son continuas a lo largo del eje x_2.
(8) Construya la función de Lyapunov resultante V uniendo V^{+} para $x_1 > 0$ con V^{-} para $x_1 < 0$.

Utilizando herramientas de análisis de estabilidad en sistemas discontinuos (Polyakov y Fridman (2014)), es posible ampliar el MRV para algunos sistemas continuos a tramos. Con el afán de mantener este artículo breve, este resultado no es presentado aquí.

4. FUNCIONES DE LYAPUNOV PARA EL ALGORITMO TERMINAL

En la presente sección, aplicaremos el procedimiento descrito arriba para construir una familia de FL para el algoritmo Terminal (Levant (1993)). Este algoritmo por Modos Deslizantes de Segundo Orden está dado por:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha\,\mathrm{sign}(\sigma), \quad (30)$$

[2] Una buena conjetura puede extraerse del Teorema 2, es decir, para obtener una FL de clase C^p, $m > p \cdot \max_i\{r_i\}$.

donde la variable de conmutación del control está dada por
$$\sigma = x_2 + \beta\sqrt{|x_1|}\,\mathrm{sign}(x_1).$$
Note que (30) es un sistema homogéneo de grado $k = -1$ con los pesos de homogeneidad $(r_1, r_2) = (2, 1)$. Las trayectorias de este algoritmo presentan, dependiendo de la relación entre las constantes α y β, tres tipos de comportamientos [3], por simplicidad, sólo se considerará el caso
$$\beta^2 > 2\alpha. \tag{31}$$
Como puede apreciarse de (30), $\dot{x}_2$ puede descomponerse en una función continua a tramos, es decir
$$\dot{x}_2 = \begin{cases} -\alpha, & \sigma > 0 \\ \alpha, & \sigma < 0 \end{cases},$$
por lo que es posible obtener una FL para cada caso y posteriormente unirlas a lo largo de la superficie $\sigma = 0$. En ambos casos, para aplicar el MRV, se utilizará el cambio de variable $z = \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{1}{2}}}$.

Caso $\sigma > 0$

Al expresar f_1 y f_2 del algoritmo Terminal en términos de la variable z (utilizando (21)) tenemos
$$\phi_1^{\pm}(z) = z, \quad \phi_2^{\pm}(z) = -\alpha, \tag{32}$$
y al aplicar la variante de Bernoulli de nuestro método (Ecuaciones 28 y 29) obtenemos las soluciones generales
$$\mathcal{V}^{+} = \Big(\frac{z}{\alpha m} + C\sqrt{z^2 + 2\alpha}\Big)^m,$$
$$\mathcal{V}^{-} = \Big(\frac{z}{\alpha m} + D\sqrt{z^2 - 2\alpha}\Big)^m, \tag{33}$$
donde C y D son constantes arbitrarias. Tomando en cuenta (31), es fácil notar de (33) que tanto $\mathcal{V}^{+}$ como $\mathcal{V}^{-}$ cumplen con las condiciones de positividad definida (17) con $C, D > 0$, por lo que podemos continuar con el método con la certeza de que la función V resultante será positiva definida. Al transformar a las coordenadas originales se obtienen
$$V^{+} = \left(\frac{x_2}{\alpha m} + C\sqrt{x_2^2 + 2\alpha|x_1|}\right)^m,$$
$$V^{-} = \left(\frac{x_2}{\alpha m} + D\sqrt{x_2^2 - 2\alpha|x_1|}\right)^m,$$
que resultan en una función continua a lo largo del del eje x_2 para toda $C = D$. Así, podemos unir las dos funciones anteriores para formar V escogiendo $C = D = C_1 > 0$, así
$$V = \left(\frac{x_2}{\alpha m} + C_1\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}\right)^m, \quad \sigma > 0. \tag{34}$$

Caso $\sigma < 0$

Para este caso, las funciones $\phi_1^{\pm}$ y $\phi_2^{\pm}$ resultan
$$\phi_1^{\pm}(z) = z, \quad \phi_2^{\pm}(z) = \alpha,$$
que al sustituir en las ecuaciones análogas al caso anterior dan como soluciones generales (en coordenadas originales)

[3] Para una clara descripción de los distintos comportamientos vea (Sánchez, 2012).

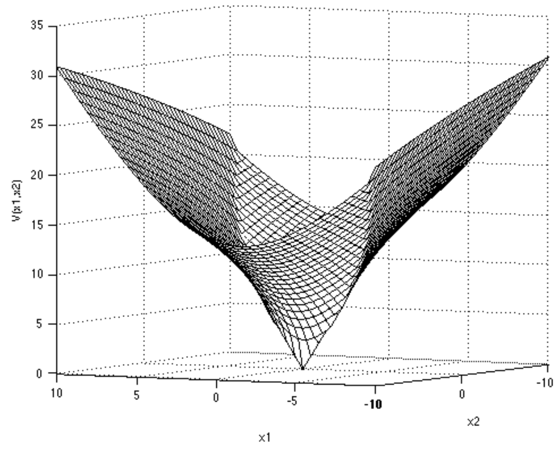

Fig. 1. FL con grado de homogeneidad $m = 1$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$

$$V^{+} = \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + E\sqrt{x_2^2 - 2\alpha|x_1|}\right)^m,$$
$$V^{-} = \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + F\sqrt{x_2^2 + 2\alpha|x_1|}\right)^m,$$
donde nuevamente E y F son constantes arbitrarias que, de ser iguales y positivas, garantizan la continuidad y pd de V sobre el eje x_2. Al componer la función V escogiendo $E = F = C_2 > 0$ se tiene
$$V = \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + C_2\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}\right)^m, \quad \sigma < 0. \tag{35}$$

Agrupación de las partes de V

Una vez que se ha encontrado el valor de la función V para los casos $\sigma > 0$ y $\sigma < 0$, sólo resta ensamblar la función V encontrando las condiciones sobre C_1 y C_2 que garanticen la continuidad de V a lo largo del conjunto $\sigma = 0$. Así, igualando ambos casos, se tiene que la condición necesaria y suficiente para que V sea continua es que $C_1 = C_2 = \mu$ donde
$$\mu = \frac{(2\beta)}{\alpha m(\sqrt{\beta^2 + 2\alpha} - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha})},$$
por lo que finalmente
$$V(x) = \begin{cases} \Big(\dfrac{x_2}{m\alpha} + \mu\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}\Big)^m, & \sigma \geq 0 \\ \Big(-\dfrac{x_2}{m\alpha} + \mu\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}\Big)^m, & \sigma < 0 \end{cases}, \tag{36}$$
es una FL para (30).

Esta última ecuación resulta relevante ya que, a diferencia de resultados previamente presentados (Sánchez (2012)), permite obtener una familia completa de FL con grado de homogeneidad m arbitrario, esto a su vez permite obtener FL más suaves conforme se aumenta m. Además con esta función se puede obtener fácilmente una estimación del tiempo convergencia al origen. En las Figuras 1 - 3 se muestran tres FL para el algoritmo Terminal con diferentes grados de homogeneidad. Es posible apreciar cómo a mayor grado m, se obtiene mayor *suavidad* a lo largo de la curva $\sigma = 0$.

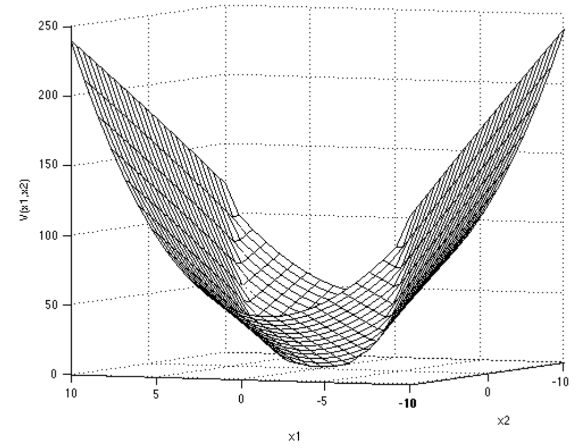

Fig. 2. FL con grado de homogeneidad $m = 2$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$

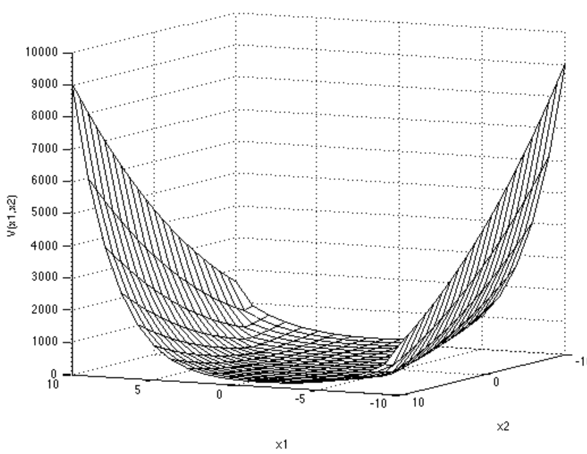

Fig. 3. FL con grado de homogeneidad $m = 3$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó un método de obtención de FL homogéneas para sistemas homogéneos de segundo orden. Este método, llamado Método por Reducción de Variable, permite obtener familias completas de FL y aprovecha la propiedad de homogeneidad para transformar la EDP del MDL, originalmente en dos variables, en dos EDO de una sola variable. Por tanto, para aplicar el método MRV, sólo es necesario proponer una función en una sola variable y un grado de homogeneidad deseado. Las condiciones para la continuidad y la positividad definida de esta función también fueron analizadas. Finalmente, utilizando el MRV, se obtuvo una expresión general simple y explícita de familias de FL para el algoritmo Terminal con grado de homogeneidad arbitrario.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen ampliamente el apoyo financiero de PAPIIT, UNAM, subvención IN113614, Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, IISGBAS-109-2013, CONACyT CVU:371652 y CONACyT CVU:488179.

BIBLIOGRAFÍA

Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, second edition.

Graham, R.L., Knuth, D.E., y Patashnik, O. (1989). Concrete mathematics. *Massachusetts: Addison-Wesley*.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upsaddle River, NJ, third edition.

Krasovskii, N.N. (1959). Problems of the theory of stability of motion. *(Russian)*, English translation: Stanford University Press, 1963.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.

Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5), 823–830.

Orlov, Y. (2004). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.

Polyakov, A. y Fridman, L. (2014). Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351 Issue 4, 1831–1865.

Polyakov, A. y Poznyak, A. (2012). Unified lyapunov function for a finite-time stability analysis of relay second-order sliding mode control systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 29(4), 529–550.

Sánchez, T. (2012). *Construcción de Funciones de Lyapunov para algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior*. Tesis de Maestría, UNAM.

Sanchez, T. y Moreno, J.A. (2012). Construction of lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, 6454–6459. IEEE.

Schultz, D. y Gibson, J.E. (1962). The variable gradient method for generating liapunov functions. *American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, Transactions of the*, 81(4), 203–210.

Weisstein, E.W. (2002). *CRC concise encyclopedia of mathematics*. CRC press.

Zubov, V.I. (1964). *Methods of AM Lyapunov and their Application*. . 263pp. Noordhoff Groningen.