Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014 Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México

Controlabilidad de Sistemas Descriptores Semilineales ⋆

Hugo Leiva * **Addison Ríos** ** **Jose Luis Sanchez** *** **Ambrosio Tineo Moya** *

* *Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela. (e-mail: hleiva@ula.ve, atemoya@ula.ve).*
** *Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Departamento de Control, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela. (e-mail: ilich@ula.ve).*
*** *Universidad Central de Venezuela Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática Caracas. Venezuela, (e-mail: jsanchez@hotmail.com)*

Resumen: En este artículo se estudia la controlabilidad de sistemas descriptores no autónomos semilineales. La condición de controlabilidad es probada por aplicación del teorema de punto fijo de Rothe para un sistema no autónomo semilineal, el cual se obtiene por transformación del sistema descriptor original, a partir de una aplicación inyectiva lineal. En consecuencia, la controlabilidad del sistema no autónomo semilineal es equivalente a la condición de controlabilidad del sistema descriptor no autónomo semilineal.

Keywords: Controlabilidad, Sistemas Descriptores, Sistemas no lineal no autónomos, Teorema de punto fijo de Rothe.

1. INTRODUCCIÓN.

Los sistemas descriptores, denominados también sistemas singulares, sistemas de semi-estado, sistemas diferencial-algebraicos o sistemas generalizados de estado-espacio; han sido uno de los campos principales de la investigación de la teoría de control, desde su introducción en 1977 por Luenberger Luenberger (1977). Durante las últimas dos décadas, los sistemas descriptores han atraído mucha atención debido a los usos comprensivos en la economía, como en el modelo dinámico de Leontief, en sistemas eléctricos y los modelos mecánicos. Desde entonces, un considerable progreso ha sido hecho en la investigación de tales sistemas.

En el estudio de la controlabilidad para tales sistemas, muchos resultados pueden ser evaluados en (Mehrmann and Stykel, 2006; Berger and Reis, 2009). En general, los resultados allí mostrados son referidos a sistemas descriptores lineales. Por el contrario, en este artículo aplicamos el Teorema de punto fijo de Rothe para probar la controlabilidad del siguiente Sistema Descriptor Semilineal no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$Ey'(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t, y(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau], \tag{1.1}$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$, con $n \leq m$, $F(t)$, $B(t)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times l$ respectivamente, la función control u pertenece a $L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$. Además,

1. $det(EE^\star) \neq 0$
2. La función no lineal $g \in C([0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ y existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|g(t, y, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_0\|y\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|^{\beta}_{\mathbb{R}^l} + c, \quad u \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^n.$$

Bajo las condiciones anteriores tenemos que:

$$\Gamma = E^\star(EE^\star)^{-1}$$

es una inversa por la derecha de E, es decir:

$$E \circ \Gamma = I.$$

El sistema (1.1) no es cuadrado y la soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} Ey'(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t, z(t), u(t)), \ t \in (0, \tau], \\ y(0) = y_0 \in Ran(\Gamma), \end{cases} \tag{1.2}$$

no tiene porque ser únicas.

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$y(t) = \Gamma z(t), \text{ entonces } y'(t) = \Gamma z'(t) \text{ y } y_0 = \Gamma z_0.$$

Como Γ es una inversa por la derecha de E, sustituyendo el cambio en la ecuación (1.1) tenemos:

$$z'(t) = F(t)\Gamma z(t) + B(t)u(t) + g(t, \Gamma z(t), u(t)).$$

Ahora, tomando $A(t) = F(t)\Gamma$ y $g_\Gamma(t, z, u) = g(t, \Gamma z, u)$, y haciendo los cambios, obtenemos el siguiente sistema semilineal lineal:

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + g_\Gamma(t, z, u), \ t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$, $A(t)$ y $B(t)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times l$ respectivamente, la función control u pertenece a $L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$ y la función no

⋆ Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Banco Central de Venezuela.

lineal function $g_\Gamma : [0,\tau]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ es continua y existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2} \le \beta < 1$ tal que

$$\|g_\Gamma(t,y,u)\|_{\mathbb{R}^n} \le a\|y\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|^\beta_{\mathbb{R}^l} + c, \quad u \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

donde $a = a_0\,\|\Gamma\|$.

La aplicación $E^\star$ es inyectiva, lo que implica que Rang$(E^\star) \cong \mathbb{R}^n$, así, el Rang$(\Gamma) = \mathbb{R}^n$.

Estudiaremos la controlabilidad del sistema (1.1) restringido a $Ran(\Gamma) = \mathbb{R}^n$, es decir, estudiaremos la controlabilidad del sistema (1.3).

Proposición 1.1. *Si y es la solución de la ecuación (1.3), entonces $z = \Gamma y$ es una solución del problema de valor inicial (1.2) con $y_0 = \Gamma z_0$*

Definición 1.1. *(**Controlabilidad**) El sistema (1.3) se dice controlable sobre $[0,\tau]$ si para todo z_0, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, existe un control $u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ tal que la solución $z_u(t)$ de (1.3) correspondiente a u verifica:*

$$z(0) = z_0 \quad y \quad z(\tau) = z_1.$$

$z(\tau) = z_1$

$z(0) = z_0$

Figura 1. La noción de controlabilidad.

Bajo las condiciones antes mencionadas, sabemos que, para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = A(t)z(t) + B(t)u(t), & z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,\tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

admite una única solución dada por

$$z(t) = U(t,0)z_0 + \int_0^t U(t,s)B(s)u(s)ds, \;\; t \in [0,\tau], \tag{1.6}$$

donde $U(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ y $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema lineal no controlado

$$z'(t) = A(t)z(t). \tag{1.7}$$

Es decir, la matriz $\Phi(t)$ satisface:

$$\begin{cases} \Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \\ \Phi(0) = I_{\mathbb{R}^n}, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde $I_{\mathbb{R}^n}$ es la matriz identidad de orden $n \times n$. Además, existen constantes $M > 0$ y $\omega > 0$ tal que

$$\|U(t,s)\| \le Me^{\omega(t-s)}, \quad 0 \le s \le t \le \tau. \tag{1.9}$$

Bajo las condiciones (1.4) y

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|^2_\infty M^3 a\sqrt{\tau}e^{aM\tau}\left(\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \tag{1.10}$$

probaremos la siguiente afirmación: Si el sistema lineal

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \tag{1.11}$$

es controlable, entonces el sistema semilineal no autónomo (1.3) es controlable sobre $[0,\tau]$. Más aún, podemos exhibir un control que lleva el sistema no lineal de un estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo time $\tau > 0$, el cual es muy importante en la practica y de un punto de vista numérico.

La controlabilidad del sistema lineal (1.11) es bien conocida y existen una amplia gama de bibliografía acerca de este, incluyendo libros, artículos, podemos citar (Chukwu, 1992), (Lee and Markus, 1967) y (Sontag, 1998).

A diferencia de los sistemas lineales, la bibliografía no es muy amplia cuando se trata de sistemas semilineales no autónomos, en este sentido podemos mencionar el trabajo realizado por Lukes en (Lukes, 1973), donde probó que, si el sistema lineal (1.11) es controlable, entonces el sistema no lineal (sistema perturbado) es también controlable, probando que la función no lineal g_Γ es acotada; Leiva en (Leiva, 2014) prueba la controlabilidad del sistema semilineal no autónomo (1.3), usando la acotación (1.4) de la función no lineal g_Γ y asumiendo la controlabilidad de la ecuación (1.11). El resultado de Lukes aparece en un contexto más general en (Coron, 2007) (ver Teorema 3.40 y 3.41 Corolario de (Coron, 2007)), pero el término no lineal sigue dependiendo sólo de las variables (t, z). En (Vidyasager, 1972) se presenta el caso cuando la función g_Γ no depende del parámetro $u \in \mathbb{R}^m$, y allí se ha demostrado la controlabilidad utilizando el teorema de punto fijo de Schauder que, en caso de cada par de números positivos (a, c) existe un número $M > 0$ tal que

$$a|g_\Gamma(t,z)| + c \le M, \quad \text{para} \quad \|z\| \le M \quad \text{y} \quad t \in [0,\tau], \tag{1.12}$$

entonces la controlabilidad del sistema lineal (1.11) es preservada bajo la perturbación de la función no lineal g_Γ; es decir, el sistema no lineal (1.3) es controlable. En (Dauer, 1976) se obtienen varias condiciones suficientes sobre la función g_Γ para la controlabilidad del sistema perturbado (1.3). En algunos trabajos la perturbación no lineal g_Γ esta sujeta al sistema lineal, el cual es natural cuando el sistema es perturbado, en este sentido, mientras que en (Do, 1990) se encuentra una condición débil sobre el término no lineal g_Γ para la controlabilidad del sistema (1.3) conteniendo la condición de Dauer; sin embargo esta condición depende fuertemente sobre el sistema lineal (1.11), particularmente, sobre la matriz fundamental $\Phi(t)$ de el sistema lineal no controlable (1.7), el cual es, en general, no es viable en forma cerrada. Para la controlabilidad de sistema semilineal de ecuaciones de evolución infinito dimensional, podemos ver los trabajos de (Balachandran and Dauer, 1987) y (Balachandran et al., 2003).

La controlabilidad nula local, la cual es equivalente a decir que $0 \in \text{int}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es el dominio de controlabilidad nula, ha sido estudiada en (Chukwu, 1992), (Chukwu, 1991), (Chukwu, 1987), (Chukwu, 1979), (Chukwu, 1980), (Chukwu, 1984),(Mirza and Womack, 1972),(Sinha, 1985), (Nieto and Tisdell, 2010) y (Sinha and Yokomoto, 1980). Particularmente, en (Chukwu, 1992) se estudia la controlabilidad nula local del siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t), u(t)), \; t \in (0,\tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

donde la función no lineal $g : [0,\tau]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua y en la segunda y tercera variable es continuamente diferenciable. En adición a (1.13), es considerar el sistema linealizado

$$z'(t) = D_2 g(t,0,0)z(t) + D_3 g(t,0,0)u(t), \tag{1.14}$$

Teorema 1.2. *(Teorema 8.1.1 de (Chukwu, 1992)) Supongamos que:*

i) Es continua y en la segunda y tercera variable es continuamente diferenciable.

ii) $g(t,0,0)=0$.
iii) el sistema lineal (1.14) es controlable Euclidian.

Entonces el dominio $\mathcal{C}$ de controlabilidad nula de (1.13) tiene a $0 \in Int(\mathcal{C})$

Según nuestros conocimientos, y evaluando los trabajos mencionados en la literatura, la principal hipótesis cuando se estudia la controlabilidad de sistemas semilineales de control gobernados por ecuaciones diferenciales, es que el sistema lineal asociado es controlable, entonces la controlabilidad del sistema semilineal dependerá de la perturbación $f(t,z,u)$ aplicada a sistemas lineales. En ese sentido, el tipo de perturbación utilizada en este trabajo no se había considerado anteriormente; esto, unido a la técnica utilizada, forma parte de la novedad de este trabajo.

Finalmente, la controlabilidad del sistema (1.3) se sigue de la controlabilidad de (1.11), la continuidad de la matriz fundamental del sistema lineal no controlado y la condición (1.4) que satisface el término g_Γ y la aplicación de los siguientes resultados:

Proposición 1.3. *Sea (X,Σ,μ) el espacio de medida con $\mu(X)<\infty$ y $1\le q<r<\infty$. Entonces $L_r(\mu)\subset L_q(\mu)$ y*

$$\|f\|_q \le \mu(X)^{\frac{r-q}{rq}}\|f\|_r,\ \ f\in L_r(\mu). \tag{1.15}$$

Prueba: La prueba del la Proposición se sigue del Teorema I.V.6 de (Brezis, 1984) y asumiendo que $p=\frac{r}{q}>1$ y considerando la relación

$$\int_X (|f|^q)^p d\mu = \int_X |f|^r d\mu,\ \ \forall f\in L_r(\mu).$$

Teorema 1.4. *([(Isac, 2004),(Smart, 1974)]) Sea E un espacio de Banach y sea $B\subset E$ un subconjunto cerrado y convexo tal que cero de E esta contenido en el interior de B.*
Sea $\Phi: B\to E$ una función continua con $\Phi(B)$ relativamente compacta en E y $\Phi(\partial B)\subset B$.
Entonces existe un punto $x^*\in B$ tal que $\Phi(x^*)=x^*$.

Así, en este artículo aplicamos el Teorema de punto fijo de Rothe para probar la controlabilidad del siguiente Sistema Descriptor Semilineal no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$Ey'(t)=F(t)y(t)+B(t)u(t)+g(t,y(t),u(t)),\quad t\in[0,\tau], \tag{1.16}$$

donde $y(t)\in\mathbb{R}^n$, $E\in\mathbb{R}^{n\times m}$, con $n\le m$, $F(t)$, $B(t)$ son matrices continuas de dimensiones $n\times n$ y $n\times l$ respectivamente, la función control u pertenece a $L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$. Además, supongamos que:

1. $det(EE^\star)\neq 0$
2. La función no lineal $g\in C([0,\tau]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y existen $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $\frac{1}{2}\le\beta<1$ tal que

$$\|g(t,y,u)\|_{\mathbb{R}^n}\le a_0\|y\|_{\mathbb{R}^n}+b\|u\|^\beta_{\mathbb{R}^l}+c,\quad u\in\mathbb{R}^l, y\in\mathbb{R}^n.$$

Bajo las condiciones anteriores tenemos que:

$$\Gamma=E^\star(EE^\star)^{-1}$$

es una inversa por la derecha de E, es decir:

$$E\circ\Gamma=I.$$

El sistema (1.16) no es cuadrado y la soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} Ey'(t)=F(t)y(t)+B(t)u(t)+g(t,y(t),u(t)),\ t\in(0,\tau],\\ y(0)=y_0\in \mathrm{Rang}(\Gamma),\end{cases} \tag{1.17}$$

no tiene porque ser únicas.

Así, retomando el cambio de variable

$$y(t)=\Gamma z(t),\ \text{entonces}\ y'(t)=\Gamma z'(t)\ \text{y}\ y_0=\Gamma z_0.$$

Como Γ es una inversa por la derecha de E, sustituyendo el cambio en la ecuación (1.16) tenemos:

$$z'(t)=F(t)\Gamma z(t)+B(t)u(t)+g(t,\Gamma z(t),u(t)).$$

Ahora, tomando $A(t)=F(t)\Gamma$ y $g_\Gamma(t,z,u)=g(t,\Gamma z,u)$, y haciendo los cambios, obtenemos el siguiente sistema semilineal lineal:

$$\begin{cases} z'(t)=A(t)z(t)+B(t)u(t)+g_\Gamma(t,z(t),u(t)),\ t\in(0,\tau],\\ z(0)=z_0\in\mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{1.18}$$

La aplicación $E^\star$ es inyectiva, lo que implica que $\mathrm{Rang}(E^\star)\cong\mathbb{R}^n$, así, el $\mathrm{Rang}(\Gamma)=\mathbb{R}^n$.

Estudiaremos la controlabilidad del sistema (1.16) restringido a $\mathrm{Rang}(\Gamma)=\mathbb{R}^n$, es decir, estudiaremos la controlabilidad del sistema (1.18).

Bajo condiciones adicionales, probaremos la siguiente afirmación: Si el sistema lineal $z'(t)=A(t)z(t)+B(t)u(t)$ es controlable sobre $[0,\tau]$, entonces el sistema Descriptor semilineal es también controlable sobre $[0,\tau]$. Más aún, podríamos exhibir un control que transfiera el sistema (1.18) de un punto inicial z_0 hasta un punto final z_1 en un tiempo $\tau>0$.

2. RESULTADOS PRINCIPALES

Probamos la controlabilidad del sistema no lineal (1.3), probando que el sistema lineal (1.11) es controlable. Para esto, consideremos para todo $z_0\in\mathbb{R}^n$ y $u\in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t)=A(t)z(t)+B(t)u(t)+g_\Gamma(t,z(t),u(t)),\ t\in(0,\tau],\\ z(0)=z_0\in\mathbb{R}^n\end{cases} \tag{2.19}$$

admite como solución la ecuación dada por

$$z_u(t)=U(t,0)z_0+\int_0^t U(t,s)B(s)u(s)ds \tag{2.20}$$
$$+\int_0^t U(t,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\,ds,\ \ t\in[0,\tau].$$

Lema 2.1. *La solución del problema de valor inicial (2.19) satisface la siguiente estimación*

$$\|z(t)\|\le\Big\{K+\int_0^\tau \|B\|_\infty M e^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|ds \tag{2.21}$$
$$+\int_0^\tau b\,Me^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|^\beta ds\Big\}e^{aM\tau},$$

donde $\|B\|_\infty=\sup_{0\le t\le\tau}\|B(t)\|$ y $K=M\|z_0\|+\int_0^\tau cMe^{-\omega s}ds$.

Observación 2.2. *Sin perdida de generalidad, podemos suponer cuando sea necesario que el estado inicial $z_0=0$ es fijo y $c=0$.*

Definición 2.1. *Para los sistemas (1.11) y (1.3) se definen los siguientes conceptos: Los operadores de controlabilidad (para $\tau>0$) $G, G_{g_\Gamma}: L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ están dados por*

$$Gu = \int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds, \tag{2.22}$$

y

$$G_{g_\Gamma}u = \int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds + \int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds, \tag{2.23}$$

donde $z_u(\cdot)$ es la única solución del problema de valor inicial (2.19).

El operador adjunto $G^\star : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ del operador G esta dado por

$$(G^\star z)(s) = B^\star(s)U^\star(\tau,s)z, \quad \forall s \in [0,\tau], \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.24}$$

Proposición 2.3. *Los sistemas (1.11) y (1.3) es controlable en $[0,\tau]$ si y sólo si,* $\text{Rang}(G) = \mathbb{R}^n$ *y* $\text{Rang}(G_{g_\Gamma}) = \mathbb{R}^n$ *respectivamente.*

Además, utilizaremos el siguiente resultado de curtain and Pritchard (1978),pp 55, y Curtain and Zwart (1995).

Lema 2.4. *Sean Y y Z espacios Hilbert, $S \in L(Y,Z)$ y $S^* \in L(Z,Y)$ el operador adjunto. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen,*

(i) $\text{Rang}(S) = Z \iff \exists\gamma > 0 \ / \ \|S^\star z\|_W \geq \gamma\|z\|_Z$, $z \in Z$.

(ii) $\overline{\text{Rang}(S)} = Z \iff Ker(S^\star) = \{0\} \iff S^\star$ *is* $1-1$.

Lema 2.5. *(Ver Iturriaga and Leiva (2010)) Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\text{Rang}(S) = Z$.
b) $Ker(S^*) = \{0\}$.
c) $\exists\gamma > 0 \ / \ \langle SS^\star z, z\rangle > \gamma\|z\|^2$, $z \neq 0$ *in* Z.
d) $\exists(SS^\star)^{-1} \in L(Z)$.

Por lo tanto, $(GG^\star)^{-1}$ existe y el operador $\Gamma : \mathbb{R}^n \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ definido por

$$\Gamma z = B^\star(\cdot)U^\star(\tau,\cdot)(GG^\star)^{-1}z = G^\star(GG^\star)^{-1}z, \tag{2.25}$$

es una inversa por la derecha del operador G, en el sentido que

$$G\Gamma = I. \tag{2.26}$$

Más aún,

$$\|(GG^\star)^{-1}z\| \leq \gamma^{-1}\|z\|, \ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.27}$$

Por otro lado, el operaror $\Gamma : \mathbb{R}^n \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ definido por la ecuación (2.23) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$G_{g_\Gamma}u = G(u) + H(u), \tag{2.28}$$

donde $H : L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \to \mathbb{R}^n$ es un operador no lineal dado por

$$H(u) = \int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds, u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \tag{2.29}$$

Definición 2.2. *La siguiente ecuación se denomina ecuación de controlabilidad asociada a la ecuación no lineal (1.3)*

$$u = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.30}$$

Ahora, presentaremos y probaremos el resultado principal de este trabajo, que es la controlbilidad del sistema no lineal (1.3).

Teorema 2.6. *Si el sistema lineal (1.11) es controlable en* $[0,\tau]$ *y*

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|_\infty^2 M^3 a\sqrt{\tau}e^{aM\tau}\left(\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \tag{2.31}$$

entonces el sistema (1.3) es controlable en $[0,\tau]$. Más aún, exhibimos un control que lleva el sistema (1.3) de un punto inicial z_0 a un punto final z_1 en un tiempo $\tau > 0$, el control, para $t \in [0,\tau]$, está dado por

$$u(t) = B^*(t)U^*(\tau,t)(GG^*)^{-1}(z_1 - U(\tau,0)z_0 - H(u)). \tag{2.32}$$

Prueba: Para cada $z \in \mathbb{R}^n$ fijo consideraremos el siguiente operador auxiliar
$K : L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ dado por

$$K(u) = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)). \tag{2.33}$$

En primer lugar, vamos a demostrar que el operador K tiene un punto fijo u dependiendo de z. En efecto, ya que el operador de evolución $U(t,s)$ es continuo (en este caso por la compacidad $\text{Rang}(U(t,s)) = \mathbb{R}^n$), la suavidad y la condición (1.4) que satisface el término no lineal g_Γ,obtenemos que el operador H es compacto.
Más aún,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1). \tag{2.34}$$

En efecto, de (1.4), (2.21), de la definición del operador $H(u)$ y de la Proposición 1.3, obtenemos que, para $u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$, la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|H(u)\| &\leq \int_0^\tau Me^{\omega(\tau-s)}\|g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\|ds, \\
&\leq \left(\int_0^\tau M^2e^{2\omega(\tau-s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\tau \|g_\Gamma(s,z_u(s),\right. \\
&\quad \left. u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= N\left(\int_0^\tau \|g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N\left(\int_0^\tau \left(a\|z(s)\| + b\|u(s)\|^\beta\right)^2ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N\left(\int_0^\tau (4a^2\|z(s)\|^2 + 4b^2\|u(s)\|^{2\beta})ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2Na\left(\int_0^\tau \|z(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2Nb\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2Na\left(\int_0^\tau\left\{\int_0^\tau \|B\|_\infty Me^{\omega(\tau-r)}\|u(r)\|dr+\right.\right.\\
&\left.\left.\int_0^\tau bMe^{\omega(\tau-r)}\|u(r)\|^\beta dr\right\}^2 e^{2aM\tau}\right)^{\frac{1}{2}} ds\\
&+2Nb\left\{\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\right\}^\beta\\
&\leq 2Na\sqrt{\tau}\left\{\int_0^\tau \|B\|_\infty Me^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|ds+\right.\\
&\left.\int_0^\tau bMe^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|^\beta ds\right\} e^{aM\tau}+2Nb\|u\|^\beta_{L_{2\beta}}\\
&=2N^2a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}\|u\|_{L_2}+(2N^2ab\sqrt{\tau}e^{aM\tau}+\\
&2Nb)\|u\|^\beta_{L_{2\beta}},
\end{aligned}
$$

donde $L_{2\beta} = L_{2\beta}(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ y $N = \left(\int_0^\tau M^2e^{2\omega(\tau-s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Ahora, como $\frac{1}{2} \leq \beta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\beta < 2$, aplicando la Proposición 1.3, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|H(u)\| \leq\, & 2N^2a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}\|u\|_{L_2}\\
&+2Nb\tau^{\frac{1-\beta}{2}}(Na\sqrt{\tau}e^{aM\tau}+1)\|u\|^\beta_{L_2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|H(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1).
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} \leq\, & \|G^*(GG^*)^{-1}\|\frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\\
&\|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} \leq\, & \frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|^2_\infty M^3a\sqrt{\tau}e^{aM\tau}\\
&\left(\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} = R < 1.
\end{aligned}
$$

Entonces, de la condición (2.34) se sigue que, para un ρ fijo, cumpliendo la siguiente condición, $R < \rho < 1$, existe $R_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$
\|K(u)\|_{L_2} \leq \rho\|u\|_{L_2},\;\; \|u\|_{L_2} = R_0.
$$

Por lo tanto, si denotamos por $B(0,R_0)$ la bola de centro cero y radio $R_0 > 0$, obtenemos que $K(\partial B(0,R_0)) \subset B(0,R_0)$. Como K es un operador compacto y aplica de la esfera $\partial B(0,R_0)$ en el interior de la bola $B(0,R_0)$, podemos aplicar el Teorema de punto fijo de Rothe's 1.4 para asegurar la existencia de un punto fijo $u \in B(0,R_0) \subset L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ tal que

$$
u = \Gamma(z-H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z-H(u)).
$$

Entonces,

$$
Gu = G\Gamma(z-H(u)) = z - H(u),
$$

y

$$
Gu + H(u) = z.
$$

Así, tomando $z = z_1 - U(\tau,0)z_0$ y usando (2.20), obtenemos el resultado

$$
\begin{aligned}
z_1 =\, & U(\tau,0)z_0 + \int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds\\
&+\int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds
\end{aligned}
$$

Corolario 2.7. *Si el sistema lineal (1.11) es controlable en $[0,\tau]$ y a o $\|B\|_\infty$ son lo suficientemente pequeño, entonces el sistema (1.3) es controlable en $[0,\tau]$. Más aún, se determina un control que lleva el sistema (1.3) de un punto inicial z_0 a un punto final z_1 en un tiempo $\tau > 0$, el cual, para $t \in [0,\tau]$, está dado por*

$$
u(t) = B^*(t)U^*(\tau,t)(GG^*)^{-1}(z_1 - U(\tau,0)z_0 - H(u)). \tag{2.35}
$$

3. COMENTARIOS CONCLUYENTES

La controlabilidad de sistemas descriptores semilineales ha sido probada; mediante una condición de existencia de una pseudo inversa, el sistema descriptor semilineal se transforma en un sistema semilineal, el cual, bajo condiciones de acotación relativa, es evaluada su controlabilidad. Al contrario de resultados previos, donde la hipótesis principal, cuando se estudia la controlabilidad de sistemas semilineales de control, gobernado por ecuaciones diferenciales, es que el sistema lineal asociado es controlable, entonces la controlabilidad del sistema semilineal dependerá de la perturbación aplicada a sistemas lineales, lo cual ha sido considerado, conjuntamente con el teorema de punto fijo de Rothe, para la verificación de la controlabilidad de sistemas descriptores semilineales.

REFERENCIAS

Balachandran, K. and Dauer, J.P. (1987). Controllability of perturbed nonlinear delay systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32, 172–174.

Balachandran, K., Dauer, J.P., and Sangeetha, S. (2003). Controllability of nonlinear evolution delay integrodifferential systems. *Appl. Math. Comput.*, 139, 63–84.

Berger, T. and Reis, T. (2009). Controllability of linear differential-algebraic systems - a survey. Technical report, Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau, Germany.

Brezis, H. (1984). *Analisis Funcional, Teoria y Applicaciones*. Alianza Editorial, Madrid.

Chukwu, E.N. (1979). Controllability of delay systems with restrained controls. *Optim. Theo. Appl.*, 29, 301–320.

Chukwu, E.N. (1980). On the null-controllability of nonlinear delay systems with restrained controls. *Math. Anal. Appl.*, 76, 283–296.

Chukwu, E.N. (1984). Null controllability in function space of nonlinear retarded systems with limited control. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 103, 198–210.

Chukwu, E.N. (1987). Global null controllability of nonlinear delay equations with controls in a compact set. *Optim. Theo. Appl.*, 53, 43–57.

Chukwu, E.N. (1991). Nonlinear delay systems controllability. *Math. Anal. Appl.*, 162, 564–576.

Chukwu, E.N. (1992). Stability and time-optimal control of hereditary systems. *Mathematics in Science and Engineering*, 188.

Coron, J.M. (2007). Control and nonlinearity. *Mathematical Surveys and Monographs*, 136.

curtain, R. and Pritchard, A. (1978). *Infinite Dimensional Linear Systems*. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, Berlin.

Curtain, R. and Zwart, H. (1995). *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, volume 21 of *Text in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York.

Dauer, J. (1976). Nonlinear perturbation of quasilinear control systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 54(3), 717–725.

Do, V. (1990). Controllability of semilinear systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 65(1), 41–52.

Isac, G. (2004). On rothe's fixed point theorem in general topological vector space. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 12(2), 127–134.

Iturriaga, E. and Leiva, H. (2010). A characterization of semilinear surjective operators and applications to control problems. *Applied Mathematics*, 1, 137–145.

Lee, E.B. and Markus, L. (1967). *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley, New York.

Leiva, H. (2014). Rothe's fixed point and controllability of semilinear nonauntonomous systems. *Systems & Control Letters*, 67, 14–18.

Luenberger, D.G. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22(3), 312–321.

Lukes, D. (1973). Global controllability of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 10(1), 112–126.

Mehrmann, V. and Stykel, T. (2006). Descriptor systems: A general mathematical framework for modelling, simulation and control. Technical report, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin,, Germany.

Mirza, K.B. and Womack, B.F. (1972). On the controllability of nonlinear time-delay systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, 812–814.

Nieto, J. and Tisdell, C. (2010). On exact controllability of first-order impulsive differential equations. *Advances in Difference Equations*.

Sinha, A.S.C. (1985). Null-controllability of non-linear infinite delay systems with restrained controls. *Int. J. Control*, 42, 735–741.

Sinha, A.S.C. and Yokomoto, C.F. (1980). Null controllability of a nonlinear system with variable time delay. *IEEE Trans. Auto. Control*, 25, 1234–1236.

Smart, D. (1974). *Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press.

Sontag, E.D. (1998). *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York.

Vidyasager, M. (1972). A controllability condition for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 17, 569–570.