

Control robusto para salidas de interés diferentes a las medidas, basado en la parametrización de controladores estabilizantes *

M. A. Flores * R. Galindo **

* *Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, 66450 Av. Universidad, San Nicolás de los Garza, México, (e-mail: miguel.floresgr@uanl.edu.mx).*

** *Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, 66450 Av. Universidad, San Nicolás de los Garza, México, (e-mail: rgalindo@gama.fime.uanl.mx).*

Resumen Se diseña un controlador robusto para una planta lineal invariante en el tiempo dada, basado en la parametrización de controladores estabilizantes, cuando se desea regular salidas diferentes a las medidas. Las expresiones analíticas propuestas de la parametrización de controladores, permiten dar una forma explícita de su parámetro libre para resolver un problema de sensibilidad mezclada, logrando atenuar los efectos de incertidumbre multiplicativa a la salida y disturbios aditivos a la salida en un esquema de control con un controlador de dos parámetros.

Keywords: Control robusto, controladores estabilizantes, sensibilidad mezclada, esquema general estándar.

1. INTRODUCCIÓN

Los controladores robustos ofrecen a un sistema en lazo cerrado características deseadas, como estabilidad en presencia de incertidumbre dinámica y paramétrica, y desempeño ante disturbios. Una forma de obtener uno de estos controladores, es utilizar la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE). Esta parametrización, es una fórmula que describe todos los posibles controladores, por retroalimentación, para la estabilización de una planta dada, en función de un parámetro libre; fue inicialmente propuesta por Youla et al. (1976) y Kučera (1975), y desarrollada para funciones racionales por Desoer et al. (1980) y Vidyasagar (1985). La relevancia de esta fórmula es que su parámetro se puede ajustar de tal manera que se cumplan criterios adicionales. Esta parametrización ha sido desarrollada utilizando dos enfoques. El enfoque en la frecuencia (Desoer et al. (1980) y Vidyasagar (1985)) consiste en encontrar las factorizaciones coprimas de la planta para resolver la Identidad de Bezout y finalmente parametrizar a todos los controladores estabilizantes. Las factorizaciones de la planta y la Identidad de Bezout, se obtienen utilizando operaciones elementales de matrices. El enfoque en espacio de estados (Nett et al. (1984) y Zhou et al. (1995)) consiste en encontrar un controlador estabilizante basado en observador; es decir, obtener una retroalimentación estabilizante a partir del estado estimado para finalmente parametrizarlo. Ambos enfoques dan solución a diversos problemas de control en el esquema general estándar de control robusto (ver Zhou et al. (1995)). Las ventajas que se tienen con la para-

metrización son que *i*) garantiza la estabilidad entrada-salida o interna asumiendo que el sistema es detectable y estabilizable, *ii*) todas las funciones de transferencia son afines al parámetro libre, *iii*) su parámetro libre se puede ajustar para satisfacer otras especificaciones o resolver otros problemas de control, y *iv*) garantiza que no exista cancelación polo-cero entre el controlador y la planta. Un enfoque diferente es el del trabajo de Galindo y Conejo (2012) y Bonilla y Galindo (2011) donde se dan expresiones analíticas para un controlador basado en la PTCE, cuyas ventajas son *i*) no requieren operaciones elementales, y no requiere estabilización por realimentación del estado estimado, en comparación con los enfoques en la frecuencia y en espacio de estados, *ii*) el esfuerzo computacional disminuye, *iii*) presenta menos parámetros de control, y *iv*) se puede resolver fácilmente el problema de estabilidad fuerte, determinando cuando el controlador es estable si el sistema satisface la propiedad de entrelazamiento par (Vidyasagar (1985)). Este enfoque es aplicado a sistemas cuadrados donde las variables a controlar son utilizadas para la retroalimentación; las factorizaciones coprimas de la planta están dadas en función de las particiones de las matrices del sistema en su representación en espacio de estados y el controlador estabilizante es obtenido al resolver la Identidad de Bezout y finalmente parametrizado. Una vez obtenida la PTCE, se fija el parámetro libre resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada, esto es, satisfacer varios criterios de desempeño al mismo tiempo (Glover y McFarlane (1989), Zhou et al. (1995)) para dar estabilidad robusta ante incertidumbre dinámica y paramétrica, y para dar una condición de desempeño robusto ante perturbaciones externas. En particular en Galindo y Conejo (2012) y Conejo y Galindo (2013) se

* Under project PAICyT IT956-11.

fija el parámetro libre para resolver problemas de control robusto, que incluyen sistemas subactuados y sistemas en tiempo discreto, respectivamente.

En este trabajo se extienden los resultados de Bonilla y Galindo (2011) a sistemas cuyas salidas de interés son diferentes a las salidas medidas, en el esquema general estándar de control robusto usado en Desoer (1986).

El artículo está dividido de la siguiente manera. En la sección 2 se revisan las condiciones de estabilidad para el esquema general estándar de Desoer (1986) y las factorizaciones coprimas de Bonilla y Galindo (2011) para una planta dada. La sección 3 define el problema y da los resultados principales; ésto es, fórmulas explícitas para la PTCE con su parámetro libre que resuelve un problema de sensibilidad mezclada. La sección 4 presenta un ejemplo que muestra los resultados y las conclusiones se dan en la sección 5.

Notación. $\mathbb{R}(s)$ representa el conjunto de todas las funciones racionales de la variable compleja s con coeficientes reales; \mathcal{RH}_∞ representa el conjunto de funciones racionales propias y estables de la variable compleja s con coeficientes reales; \mathbb{R} representa el conjunto de los números reales; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ y $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ son las aproximaciones asintóticas de la matriz $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ de dimensiones $p \times m$ en bajas y altas frecuencias respectivamente; e I_m representa la matriz identidad de dimensión $m \times m$.

2. ANTECEDENTES

El sistema mostrado en la Fig. 1 representa una configuración general en la que la salida de interés no es necesariamente la salida medida que es retroalimentada. Este esquema es utilizando en Desoer (1986) para resolver el problema de desacoplamiento entrada-salida.

Considere las siguientes suposiciones para el sistema Lineal Invariante en el Tiempo con Muchas Entradas y Muchas Salidas (MEMS) mostrado en la Fig. 1.

S1) La planta $P \in \mathbb{R}(s)^{2q \times q}$ tiene la siguiente factorización coprima derecha.

$$P = \begin{bmatrix} P_o \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_o \\ N_m \end{bmatrix} D^{-1} \quad (1)$$

donde, $N_o \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$, $N_m \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$, y $D \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$

S2) El controlador K tiene la siguiente factorización coprima izquierda.

$$K = [K_0 \ K_1] = \tilde{D}_K^{-1} [\tilde{N}_{K0} \ \tilde{N}_{K1}] \quad (2)$$

donde, $\tilde{D}_K \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$, $\tilde{N}_{K0} \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$, y $\tilde{N}_{K1} \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$

Sean, $u := [y_d^T \ d_m^T \ d_i^T \ d_s^T]^T$ las entradas exógenas del sistema y $y := [v_1^T \ y_o^T \ y_m^T]^T$ las salidas, entonces, el sistema en la Fig. 1 está descrito por,

$$y = N_d D_{di}^{-1} N_i u + E u \quad (3)$$

donde,

$$N_d = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N_o \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \quad N_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_n & 0 \\ \tilde{N}_{K0} & -\tilde{N}_{K1} & 0 & -\tilde{N}_{K1} N_m \end{bmatrix}$$

$$D_{di} = \begin{bmatrix} I_n & -D \\ \tilde{D}_K & \tilde{N}_{K1} N_m \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_o \\ 0 & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

tienen elementos en \mathcal{RH}_∞ .

Los siguientes Lema y Teorema (ver Vidyasagar (1985)) nos dan las condiciones de estabilidad y la Parametrización de todos los Controladores Estabilizantes (PTCE) respectivamente, para el sistema mostrado en la Fig. 1.

Lema 1. Bajo las suposiciones S1 y S2 el sistema de la Fig. 1 es estable si y sólo si,

$$\tilde{N}_{K1} N_m + \tilde{D}_K D = I \quad (5)$$

Teorema 2. Suponga que (N_m, D) y (\tilde{D}, \tilde{N}_m) son factorizaciones coprimas cualesquiera derecha e izquierda de P_m respectivamente en \mathcal{RH}_∞ , y que $X \in \mathcal{RH}_\infty$ y $Y \in \mathcal{RH}_\infty$ satisfacen $X N_m + Y D = I$. Entonces el conjunto de todos los controladores de dos parámetros que estabilizan al sistema está dado por,

$$K = \tilde{D}_K^{-1} [\tilde{N}_{K0} \ \tilde{N}_{K1}] = (Y - R \tilde{N}_m)^{-1} [Q \ X + R \tilde{D}] \quad (6)$$

donde $R, Q \in \mathcal{RH}_\infty$ son parámetros libres del controlador tal que R satisface $|Y - R \tilde{N}_m| \neq 0$

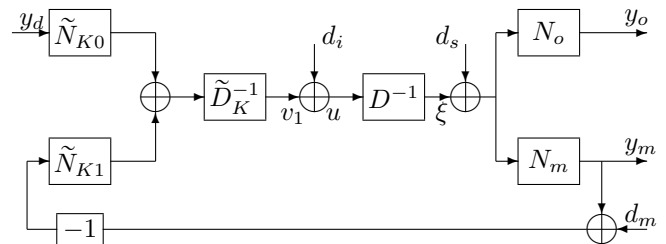


Figura 1. Esquema de K de 2 parámetros

A continuación se definen las plantas P para este trabajo. Considere la siguiente suposición.

S3) La planta P tiene la siguiente realización controlable y observable en espacio de estados,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad C = [C_{11} \ C_{12}] \quad (7)$$

donde la dimensión n del estado $x(t)$ es par, la dimensión de la entrada de la planta $u(t)$ es $m = n/2$, la dimensión de la salida de la planta es $p = m$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y A_{12} , A_{21} y B_m son matrices no singulares.

El siguiente Lema dado en Bonilla y Galindo (2011), da una solución a la factorización coprima derecha e izquierda para P_o y P_m .

Lema 3. Considere la suposición S3, que $0 < a$ y $\Gamma := (1/(s+a)^2)(s^2 I_m - A_{22} s - A_{21} A_{12})$. Si $C_{12} = 0$ y $C_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular, una solución de las factorizaciones coprimas de P_o sobre \mathcal{RH}_∞ es,

$$N_o = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12}, \quad D = B_m^{-1} \Gamma \quad (8)$$

$$\tilde{D} = \Gamma A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}, \quad \tilde{N}_o = \frac{1}{(s+a)^2} B_m \quad (9)$$

Si $C_{11} = 0$ y $C_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular, una solución de las factorizaciones coprimas de P_m sobre \mathcal{RH}_∞ es,

$$N_m = \frac{s}{(s+a)^2} C_{12}, \quad D = B_m^{-1} \Gamma \quad (10)$$

$$\tilde{D} = \Gamma C_{12}^{-1}, \quad \tilde{N}_m = \frac{s}{(s+a)^2} B_m \quad (11)$$

La suposición $S1$ no implica que ambos pares, (N_o, D) y (N_m, D) , sean factorizaciones coprimas derechas de P_o y P_m respectivamente. Hay que notar que utilizando el Lema anterior debido a que las factorizaciones coprimas derechas (N_o, D) y (N_m, D) comparten el mismo denominador nos permiten satisfacer esta suposición. Además, P_o y P_m tienen realizaciones en espacio de estados con la misma estructura de P dada en la ecuación (7).

En la siguiente sección se dan los resultados principales.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR ROBUSTO

El resultado principal de este trabajo se da en los siguientes Lema y Teorema que resuelven la identidad de Bezout para obtener el controlador mediante la PTCE, permitiendo dar así, una forma explícita del parámetro libre de la PTCE que da solución a un problema de sensibilidad mezclada, cuando se desea regular la salida de la planta en función de los primeros m estados y se tiene como salida de medición, combinaciones de los segundos m estados, en el esquema de la Fig. 1, satisfaciendo $S1$, $S2$, y $S3$.

En Galindo y Conejo (2012) y Bonilla y Galindo (2011) se da una fórmula explícita para el parámetro libre R de la PTCE que resuelve un criterio de sensibilidad mezclada, esto es, minimizar simultáneamente la función de sensibilidad a la salida $S_o(s) = (I + P_m(s)K_1(s))^{-1}$ en bajas frecuencias, y la relación de la entrada a la salida $M(s)$ de un modelo de incertidumbre en altas frecuencias, i.e., el criterio a minimizar es,

$$J = \left\| \begin{bmatrix} S_o \\ M_h \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (12)$$

en particular para un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida Δ_m , es decir $M(s) = T_o(s)$, donde $T_o(s) = P_m K_1 (I + P_m K_1)^{-1}$ es la función de sensibilidad complementaria a la salida. Este criterio tiene como objetivo atenuar Δ_m , así como las perturbaciones d_s .

En Bonilla y Galindo (2011) no se considera el caso C_{12} no singular y $C_{11} = 0$ para el parámetro libre debido a la acción derivativa presentada en las ecuaciones (10) y (11) por lo que el siguiente Lema propone una solución que permite seleccionar la forma del parámetro libre R resolviendo el criterio (12).

Lema 4. Suponga que P satisface $S1$, $S2$, y $S3$ en el esquema de la Fig. 1, donde las factorizaciones coprimas de P_o y P_m están dadas en el Lema 3, entonces el siguiente controlador estabiliza a P ,

$$\tilde{K} = (Y - R\tilde{N}_{ms})^{-1} [Q \frac{1}{s}(X + R\tilde{D})] \quad (13)$$

donde $R \in \mathcal{RH}_\infty$ y $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ son parámetros libres, $|Y - R\tilde{N}_{ms}| \neq 0$; $X, Y, \tilde{N}_{ms}, \tilde{D} \in \mathcal{RH}_\infty$ son,

$$X = \frac{1}{(s+a)} (X_1 s + X_0) C_{12}^{-1} \quad (14)$$

$$Y = \frac{1}{(s+a)} (Y_1 s + Y_0) B_m \quad (15)$$

$$\tilde{N}_{ms} = \frac{1}{(s+a)^2} B_m \quad (16)$$

$$\tilde{D} = \Gamma C_{12}^{-1} \quad (17)$$

$$(18)$$

siendo,

$$\begin{aligned} X_0 &= a^3 I_m + Y_0 A_{21} A_{12} \\ X_1 &= 3a^2 I_m + Y_0 A_{22} + A_{21} A_{12} \\ Y_0 &= 3a I_m + A_{22} \\ Y_1 &= I_m \\ \Gamma &= \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22} s - A_{21} A_{12}) \end{aligned} \quad (19)$$

Prueba. Del Lema 1, el sistema es estable si y solo si $\tilde{N}_{K1} N_m + \tilde{D}_K D = I$; de las ecuaciones (6) y (13), se tiene que $\tilde{N}_{K1} = (1/s)(X + R\tilde{D})$ y $\tilde{D}_K = (Y - R\tilde{N}_{ms})$; definiendo,

$$N_{ms} = (1/s) N_m \quad (20)$$

se tiene que,

$$(X + R\tilde{D}) N_{ms} + (Y - R\tilde{N}_{ms}) D = I \quad (21)$$

Debido a que $\tilde{N}_{ms} D = \tilde{D} N_{ms}$, se resuelve

$$X N_{ms} + Y D = I \quad (22)$$

Proponiendo X y Y como en (14) y (15) se tiene que

$$\begin{aligned} Y_1 s^3 + (Y_0 - Y_1 A_{22}) s^2 + (X_1 - Y_1 A_{21} A_{12} - Y_0 A_{22}) s \\ + (X_0 - Y_0 A_{21} A_{12}) = (s^3 + 3a s^2 + 3a^2 s + a^3) I \end{aligned} \quad (23)$$

que se satisface para X_0, X_1, Y_0 y Y_1 dados en (19). □

El problema de control robusto que se va a resolver consiste en minimizar los efectos de un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida, es decir, minimizar la función $T_o(s)$ (ver Zhou et al. (1995)) y atenuar los disturbios d_s . Del esquema de la Figura 1 se tiene que $y_o = N_o(d_s + \xi)$, donde $\xi = D^{-1} \tilde{D}_K^{-1} (\tilde{N}_{K0} y_d - \tilde{N}_{K1} (d_m + N_m(d_s + \xi)))$, por lo que la relación de d_s a y_d es,

$$N_o(I - \tilde{N}_{K1} N_m) \quad (24)$$

Con $T_o(s) = N_m \tilde{N}_{K1}$ (ver Vidyasagar (1985)) y considerando la parametrización dada en el Lema 4, entonces,

$$T_o(s) = N_{ms}(X + R\tilde{D}) \quad (25)$$

con N_{ms} dado en (20); además, con $C_{12} = I$, $N_m \tilde{N}_{K1} = \tilde{N}_{K1} N_m$, por lo que la relación de d_s a y_d dada en (24) es igual a $N_o S_o$, por lo que al minimizar S_o se atenuan los disturbios d_s , llegando de esta forma a un problema particular de sensibilidad mezclada del criterio (12). El

siguiente Teorema da una forma explícita al parámetro libre R de \bar{K} que resuelva este criterio.

Teorema 5. Suponga que P satisface $S1$, $S2$, y $S3$ en el esquema de la Fig. 1, que su controlador estabilizante está dado en el Lema 4, que se satisface,

$$w_h^2 > \frac{\|X_1 a^3\|_\infty}{\|Y_0 A_{21} A_{12}\|_\infty} \quad (26)$$

donde,

$$X_1 = 3a^2 I_m + Y_0 A_{22} + A_{21} A_{12} \quad (27)$$

$$Y_0 = 3a I_m + A_{22} \quad (28)$$

y $w_h > 0$ es una frecuencia fija en la banda de altas frecuencias de P , y que el parámetro libre del controlador R tiene la siguiente expresión,

$$R = Y_0 a r \quad (29)$$

Entonces,

$$\tilde{r} = \frac{S_{olu} - T_{ohd}}{T_{ohu} - T_{ohd} + S_{olu}} \quad (30)$$

es el valor deseado de r que minimiza el criterio (12) con $M_h = T_{oh}$, siendo

$$\begin{aligned} S_{olu} &= (1/a) \|C_{12} Y_0 A_{12} A_{12} C_{12}^{-1}\|_\infty \\ T_{ohu} &= (1/w_h^2) \|C_{12} (X_1 + Y_0 a) C_{12}^{-1}\|_\infty \\ T_{ohd} &= (1/w_h^2) \|C_{12} X_1 C_{12}^{-1}\|_\infty \end{aligned}$$

Prueba. La función T_o dada en la ecuación (25) se aproxima en altas y bajas frecuencias respectivamente resultando,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h^2} (C_{12} (X_1 + R) C_{12}^{-1}) \quad (31)$$

$$T_{ol} = I + \frac{1}{a^4} (C_{12} (Y_0 a - R) C_{12}^{-1}) \quad (32)$$

entonces $S_{ol} = I - T_{ol}$ es,

$$S_{ol} = \frac{1}{a^4} (C_{12} (R - Y_0 a) C_{12}^{-1}) \quad (33)$$

Con el parámetro libre R dado en la ecuación (29), al variar r entre el valor de 0 y 1, las funciones S_{ol} y T_{oh} describen los valores de sus normas en rectas, donde S_{olu} corresponde a $\|S_{ol}\|_\infty$ y T_{ohd} corresponde a $\|T_{oh}\|_\infty$ cuando $r = 0$, y T_{ohu} corresponde a $\|T_{oh}\|_\infty$ y $\|S_{ol}\|_\infty = 0$ cuando $r = 1$ como se muestra en la Figura 2.

Debido a que $T_{ohu} > T_{ohd}$, la intersección de las rectas se asegura si $S_{olu} > T_{ohd}$; donde, resolviendo esta última desigualdad para w_h se obtiene (26). La intersección de estas dos rectas ocurre cuando el valor de $r = \tilde{r}$, dado en la ecuación (30). \square

Utilizando el parámetro libre dado en el Teorema anterior, las normas de T_{oh} y S_{ol} son iguales y además se minimizan al aumentar el valor de w_h y de a , respectivamente, logrando así satisfacer el criterio de sensibilidad mezclada dado en (12) con $M_h = T_{oh}$.

En la siguiente sección se aplican los resultados a un sistema no-lineal.

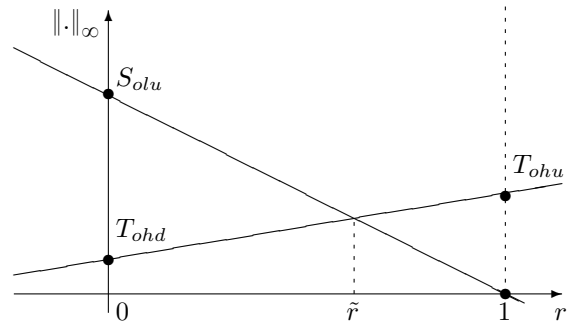


Figura 2. Intersección

4. EJEMPLO

Se considera un robot rotacional de dos grados de libertad mostrado en la Fig. 3 con ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange. Los modelos Euler-Lagrange linealizados con un actuador por cada grado de libertad, toman la representación de la suposición $S3$.

Las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange para el robot son,

$$M(\theta(t))\ddot{\theta}(t) + C(\theta(t), \dot{\theta}(t))\dot{\theta}(t) + G(\theta(t)) = u(t) \quad (34)$$

donde

$$M(\theta(t)) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1 + \gamma_1 + 2\gamma_2 \gamma_1 + \gamma_2 \cos(\theta_2(t)) & \\ \gamma_1 + \gamma_2 \cos(\theta_2(t)) & \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$C(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = \begin{bmatrix} -\gamma_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 & -\gamma_2 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \gamma_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$G(\theta(t)) = g \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \cos(\theta_1) + m_2 l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$\gamma_1 := m_2 l_{c2}^2 + J_1$, y $\gamma_2 := m_2 l_1 l_{c2}$; siendo l_{c1} y l_{c2} las distancias al centro de masas desde las uniones, J_1 y J_2 las inercias de las uniones y g la aceleración de la gravedad.

Para este ejemplo, se considera que se tienen mediciones de las velocidades angulares, es decir,

$$y_m(t) = [0 \ C_{12}] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad C_{12} = I_2 \quad (38)$$

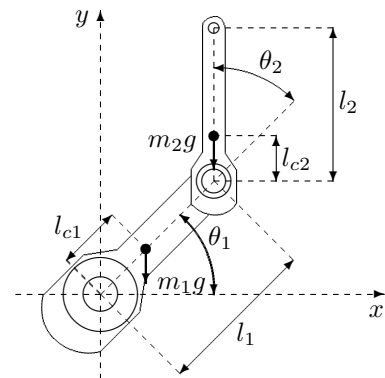


Figura 3. Robot Rotacional Planar.

y se desea regular las posiciones angulares, es decir,

$$y_o(t) = [C_{11} \ 0] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad C_{11} = I_2 \quad (39)$$

de acuerdo al esquema de la Fig. 1.

Linealizando el modelo en el punto de equilibrio $(\theta_e, 0)$ donde $\theta_e = [\pi/2 \ 0]^T$ y usando los datos de la planta mostrados en la Tabla 1 tomados de Galindo (2009) se llega a la siguiente representación numérica para las matrices A y B .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16.09 & -0.6888 & 0 & 0 \\ -12.96 & 19.18 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4586 & -0.8356 \\ -0.8356 & 11.33 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Se propone un valor de $a = 9$ y se selecciona $w_h = 200$ que satisface la ecuación (26); entonces, el parámetro libre $R = 240.3692I_2$ logra minimizar el criterio (12). Debido a que la relación de y_d a y_o está determinada por N_oQ (ver Vidyasagar (1985)), se propone el parámetro libre Q como,

$$Q = A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} a^2 \quad (41)$$

para lograr regulación en bajas frecuencias. El controlador obtenido se utiliza primero en el modelo lineal, se considera llevar las posiciones θ_1 y θ_2 de condiciones iniciales cero a $(90^\circ, 0)$. Se le agrega perturbación aditiva $d_m(t) = \text{sen}(40t)$ para $t > 2.5\text{seg}$ y una perturbación aditiva $d_s(t) = 2\text{sen}(5t)$ para $t > 5\text{seg}$. Los resultados se muestran en las Figuras 4 y 5, donde se observa que se atenúan $d_s(t)$ y $d_m(t)$ en bajas y altas frecuencias respectivamente. Para la simulación del controlador en el modelo no lineal del robot rotacional, se considera llevar las posiciones θ_1 y θ_2 de $(-90^\circ, 0)$ a $(90^\circ, 0)$ por lo que se agrega una compensación de 90° en la entrada de referencia para reducir el error en estado estacionario debido a las incertidumbres de modelo. Se le agrega perturbación aditiva $d_m(t) = \text{sen}(40t)$ para $t > 2.5\text{seg}$. Los resultados se muestran en las Figuras 6 y 7. En la Figura 6 se muestran las posiciones angulares, donde se observa que las salidas tienden asintóticamente a las referencias deseadas. La respuesta es suave con un sobreimpulso “pequeño”. En la Figura 7 se muestra la magnitud de la ley de control, donde se observa una magnitud relativamente “grande” en un principio y un sobre impulso negativo “pequeño”.

Tabla 1. Parámetros del Robot rotacional de dos grados de libertad

Parámetro	Valor	Unidad
l_1	0.450	m
l_{c1}	0.091	m
l_{c2}	0.048	m
m_1	23.902	Kg
m_2	3.880	Kg
J_1	1.266	$Kg \ m^2$
J_2	0.093	$Kg \ m^2$
g	9.81	m/s^2

5. CONCLUSIONES

Se dió una forma explícita de un controlador que estabiliza a una planta dada proponiendo una acción integral a la parametrización de controladores estabilizantes y así lograr

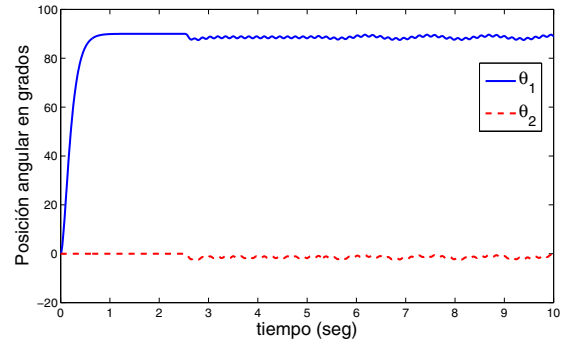


Figura 4. Posiciones angulares para el modelo lineal del robot rotacional

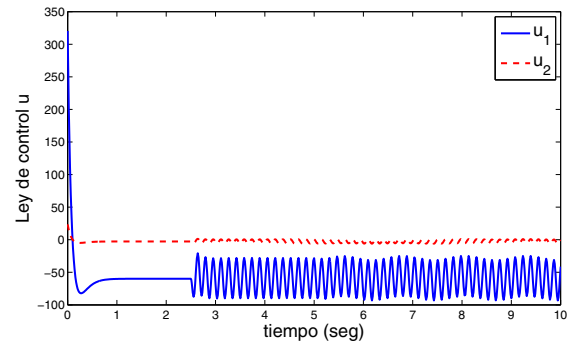


Figura 5. Ley de control u para el modelo lineal del robot rotacional

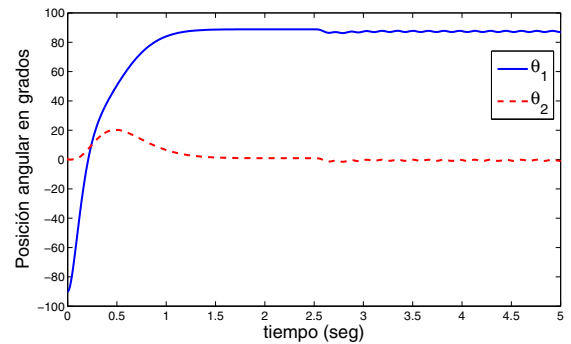


Figura 6. Posiciones angulares para el modelo no-lineal del robot rotacional

regulación de salidas de interés diferentes a las medidas. Se resolvió un criterio de sensibilidad mezclada que permitió usar el controlador diseñado en un modelo no lineal. En particular en el ejemplo se ilustra el caso donde las salidas de interés son las posiciones y las salidas medidas son velocidades, que resulta de utilidad práctica.

REFERENCIAS

- Bonilla, A. y Galindo, R. (2011). Expresión analítica de la doble factorización coprime para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada. *Asociación de México de Control Automático*, -.
- Conejo, C. y Galindo, R. (2013). Discrete-time formulas of one parameter stabilizing controllers and mixed sensitivity problem, for square systems. *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*.

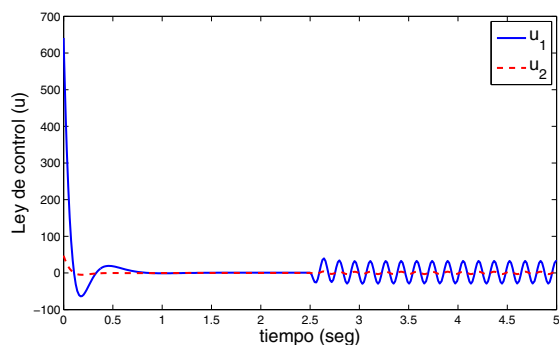


Figura 7. Ley de control u para el modelo no-lineal del robot rotacional

- Desoer, C.A. (1986). Decoupling linear multiinput multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(8), 744–750.
- Desoer, C.A., Liu, R., Murray, J., y Sacks, R. (1980). Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3), 399–412.
- Galindo, R. (2009). Parameterization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part I: journal of Systems and Control Engineering*, 223(7), 957–971.
- Galindo, R. y Conejo, C. (2012). A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems. *Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 1–6.
- Glover, K. y McFarlane, D. (1989). Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with \mathcal{H}_∞ -bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 821–830.
- Kučera, V. (1975). Stability of discrete linear feedback systems. *Proceedings of the 6th IFAC World Congress*.
- Nett, C.N., Jacobson, C., y Balas, M.J. (1984). A connection between state-space and doubly coprime fractional representations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(9), 831–832.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. M.I.T. Press.
- Youla, D.C., Jabr, H.A., y Bongiorno, J.J. (1976). Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(3), 319–338.
- Zhou, K., Doyle, J.C., y Glover, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.