

# Modelado Dinámico y Control de un Robot Móvil con Distribución de Masa No Uniforme

J. Álvarez-Gallegos, R. Castro-Linares, R. García-Saldívar

CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07300 México D.F., México (e-mail: {jalvarez,rcaastro,garcias}@cinvestav.mx).

Resumen: En el presente trabajo se desarrolla el modelo dinámico de un robot móvil diferencial con una distribución de masa no uniforme y un controlador por par calculado, en el cual se incluye un controlador auxiliar diseñado con la técnica de backstepping. Se dan condiciones bajo las cuales el sistema en lazo cerrado es estable. Los resultados obtenidos en varias condiciones de simulación presentan un desempeño satisfactorio del controlador.

Palabras Clave: Robot móvil, backstepping, control por par calculado

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se empieza a observar un incremento en el uso de robots móviles autónomos en el transporte de objetos dentro de la cadena productiva. La mayoría de estos robots móviles son diseñados para tener una distribución de masa simétrica, pero en la mayoría de los casos, los objetos que transportan no tienen una distribución de masa uniforme, por lo que al ser transportados por el robot móvil el sistema, en su conjunto, ve alterada su distribución de masa. En la literatura la mayoría de los trabajos que usan el modelo dinámico del robot móvil, localizan al centro de masa sobre el eje de simetría del robot (Barghijand et al. (2011), Zohar et al. (2009)). A pesar de que existen trabajos como el desarrollado por Gholipour y Yazdanpanah (2003) y Yo (2012), donde se presenta un esquema de control que considera incertidumbres en los parámetros físicos del robot móvil, en ningún caso se consideran los efectos que podrían tener un cambio en la posición del centro de masa fuera del eje de simetría. En el presente trabajo se aborda el modelado dinámico y cinemático de un robot móvil diferencial con una distribución de masa no uniforme que provoca que el centro de masa del robot móvil se localice fuera del eje de simetría del robot móvil, el cual mantiene su posición fija dentro del sistema móvil. Para controlar el movimiento del robot se desarrolla un controlador tomando como base el trabajo realizado por Fierro y Lewis (1995), en el cual se hacen los cambios pertinentes para que el controlador funcione con el modelo dinámico planteado.

## 2. ROBOT MÓVIL DIFERENCIAL

En la figura 1 se observa la configuración de un robot móvil diferencial con una distribución de masa no uniforme y los parámetros que conforman su geometría básica usada para la construcción de los modelos. El robot móvil está referenciado a un marco inercial fijo  $\{O X_w Y_w\}$ , donde la posición del centro de masa del robot está definida por

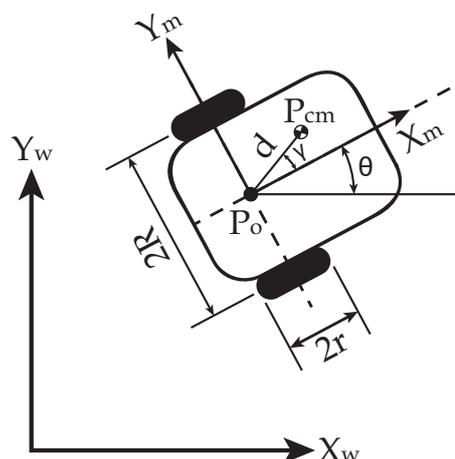


Figura 1. Robot móvil diferencial

el vector  $q_{cm} = [x_c \ y_c \ \theta + \gamma]^T$ , donde  $x_c$  y  $y_c$  son las coordenadas cartesianas del punto  $P_{cm}$  y  $\theta$  es el ángulo de orientación medido desde el eje  $X_w$  al eje  $X_m$ . El parámetro  $d$  es la distancia de  $P_o$  a  $P_{cm}$ , donde  $P_{cm}$  es la posición del centro de masa,  $R$  es la distancia de  $P_o$  a la rueda a lo largo del eje  $Y_m$ , el parámetro  $r$  es el radio de la rueda y el parámetro  $\gamma$  es el ángulo de desviación del centro de masa medido a partir del eje  $X_m$ .

Este tipo de robot móvil es considerado un sistema mecánico con restricciones no holónomas. En este caso las restricciones se tienen al considerar que el robot no se puede desplazar en dirección del eje  $Y_m$  y no se consideran los efectos de deslizamiento, por lo que cumple con las condiciones de rodamiento puro sin deslizamiento (Campion et al. (1991)).

La posición cartesiana del robot se maneja en metros, la velocidad lineal del robot en metros sobre segundo, la orientación en radianes, la velocidad angular en radianes sobre segundo y los pares de entrada en cada una de las ruedas en Newtons-metro.

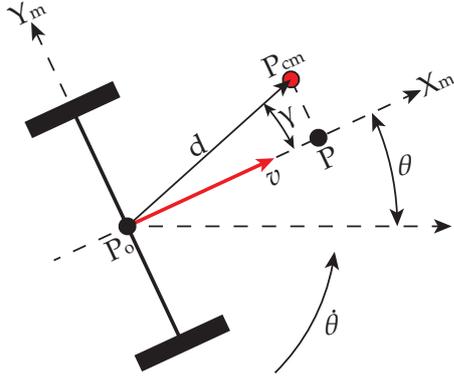


Figura 2. Velocidades del robot móvil diferencial

### 2.1 Modelo cinemático

El modelo cinemático de un robot móvil diferencial puede obtenerse de dos formas, la primera es tomando el punto  $P_o$  como referencia (véase figura 1) y la segunda forma se considera un punto fuera de  $P_o$  como referencia. En este trabajo se usa la segunda forma debido a que la primera tiene el inconveniente de no poder controlar de forma directa la orientación del robot para el seguimiento de trayectorias. El modelo cinemático es el siguiente, considerando a  $P$  como la referencia

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \cos(\gamma) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & d \cos(\gamma) \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $v$  es la velocidad lineal en dirección del eje  $X_m$ ,  $\omega$  es la velocidad angular alrededor del punto  $P_o$  y  $(\dot{x} \ \dot{y})$  es la velocidad del robot móvil en el punto  $P$  (véase figura 2).

Otro aspecto cinemático presente en este tipo de robot móvil, es la presencia de restricciones de tipo no holónomas. En el caso del robot móvil presentado, la restricción no holónoma satisface la ecuación siguiente

$$-\sin(\theta) \dot{x}_o + \cos(\theta) \dot{y}_o - d \cos(\gamma) \dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

donde  $v = [\dot{x}_o \ \dot{y}_o]^T$  es la velocidad en el punto  $P_o$ .

### 2.2 Modelo dinámico

Para obtener el modelo dinámico se usa la siguiente ecuación presentada en Rosenberg (1977). Esta ecuación permite obtener el modelo dinámico de robots móviles con restricciones no holónomas.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i} \lambda_1, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3)$$

donde  $K$  es la energía cinética,  $Q_i$  son los pares de entrada del sistema,  $a_{1i}$  son los elementos de la matriz de restricciones no holónomas y  $\lambda_1$  es un multiplicador de Lagrange. La energía cinética del robot móvil se obtiene de la siguiente ecuación Lewis et al. (1993), usando las velocidades presentadas en la figura 2

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^T v_{cm} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I \quad (4)$$

donde

$$v_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - d \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ \dot{y}_o + d \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso,  $v_{cm}$  es la velocidad del centro de masa la cual queda expresada en términos de  $q = [x_o \ y_o \ \theta]^T$ , por lo que al sustituir (4) en (3) se obtiene el modelo dinámico

$$M(q) \ddot{q} + V_m(q, \dot{q}) \dot{q} = B(q) \tau - A^T(q) \lambda \quad (5)$$

con:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \\ 0 & m & md \cos(\theta + \gamma) \\ -md \sin(\theta + \gamma) & md \cos(\theta + \gamma) & md^2 + I \end{bmatrix}$$

$$V_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -md \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ R - d \sin(\gamma) & -R - d \sin(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$A = [-\sin(\theta) \ \cos(\theta) \ -d \cos(\gamma)]$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_d \end{bmatrix}$$

donde  $\tau_i$  y  $\tau_d$  son los pares de entrada de las ruedas,  $m$  es la masa del robot móvil e  $I$  es el momento de inercia en  $P_{cm}$  alrededor del eje  $Z_m$ .

En este modelo dinámico no se calculan los multiplicadores de Lagrange ya que no son necesarios debido a simplificaciones mostradas más adelante. El modelo dinámico presentado, además de ser no holónomo, tiene el inconveniente de ser un sistema subactuado ya que tiene mas variables a controlar que controles, sin embargo, es posible reducir su dimensión y convertirlo en un sistema totalmente actuado (Bates y Sniatycki (1993)). Para lograr esta reducción es necesario representar a las restricciones no holónomas como

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad (6)$$

Además es posible encontrar una matriz  $S(q)$  tal que sus columnas se encuentren en el espacio nulo de  $A(q)$  de tal modo que

$$S^T(q) A^T(q) = 0 \quad (7)$$

Por otro lado, la velocidad  $\dot{q}$  se encuentra también en el espacio nulo de  $A(q)$  y existe un vector suave  $\eta$  tal que

$$\dot{q} = S(q) \eta \quad (8)$$

En este caso el vector  $\eta = [v \ \omega]^T$ , por lo que la ecuación anterior está directamente relacionada con el modelo cinemático del robot móvil en el punto  $P_{cm}$  y la matriz  $S(q)$  está dada por

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para tener un modelo dinámico más apropiado, es necesario sustituir la ecuación (8) en (5) y multiplicar por la izquierda por  $S(q)^T$  con lo que se obtiene

$$S^T M (\dot{S} \eta + \dot{S} \eta) + S^T V_m S \eta = S^T B \tau \quad (10)$$

Una representación simplificada de la ecuación (10) es

$$\bar{M} \dot{\eta} + \bar{V}_m \eta = \bar{B} \tau \quad (11)$$

donde

$$\bar{M} = S^T M S$$

$$\bar{V}_m = S^T M \dot{S} + S^T V_m S$$

$$\bar{B} = S^T B$$

$\bar{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sigue siendo una matriz simétrica definida positiva,  $\bar{V}_m \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz que sustituye a la matriz

de coriolis y fuerzas centripetas y  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de transformación de los pares de entrada. Además se cumple que  $\dot{\bar{M}} - 2\dot{\bar{V}}_m$  es una matriz antisimétrica.

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En la mayoría de los casos basta con poder controlar al robot móvil con su modelo cinemático; esto permite controlar al robot únicamente con las velocidades del sistema. Por otro lado, si es necesario controlar las fuerzas que se involucran en el movimiento del robot móvil, como en el caso de transportar un objeto, sin algún dispositivo que evite su movimiento relativo al robot, se necesita controlar al robot móvil con el modelo dinámico. En este documento, se usa un esquema de control parecido al desarrollado por Fierro y Lewis (1995), pero con un modelo dinámico y cinemático diferente, en el cual se controla la posición del punto  $P$  mostrado en la figura 2.

Primero se considera una entrada de control auxiliar  $u$  en el control por par calculado, el cual convierte el problema de control dinámico en uno cinemático mediante las relaciones siguientes:

$$\tau = \bar{B}^{-1}(q) [\bar{M}(q)u + \bar{V}_m(q, \dot{q})\eta] \quad (12)$$

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (13a)$$

$$\dot{\eta} = u \quad (13b)$$

La ecuación (12) corresponde a un control por par calculado el cual contiene una entrada de control auxiliar  $u$  que es diseñada a partir de la técnica de backstepping.

#### 3.1 Control por Backstepping

El control propuesto a continuación tiene como objetivo el seguimiento punto a punto de una trayectoria considerando las siguientes velocidades y posiciones de referencia

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r \cos(\theta_r), & \dot{y}_r &= v_r \sin(\theta_r), & \dot{\theta}_r &= \omega_r, \\ q_r &= [x_r \ y_r \ \theta_r]^T, & V_r &= [v_r \ \omega_r]^T \end{aligned} \quad (14)$$

donde es necesario en contrar una velocidad de control  $v_c = f_c(e, V_r, K)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_r - q) = 0$

Para desarrollar el control por backstepping se usa como base el trabajo desarrollado por Fierro y Lewis (1995). Esta metodología de control es adaptada para el caso específico del modelo dinámico dado por la ecuación (5). Para ello es necesario presentar las posiciones y velocidades de referencia de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & -d \cos(\gamma) \sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & d \cos(\gamma) \cos(\theta_r) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para el problema de seguimiento, se define de acuerdo al trabajo de Canudas et al. (1993)

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde  $e_1$  y  $e_2$  son los errores de posición referenciados al marco de referencia móvil  $\{P_o \ X_m \ Y_m\}$ ,  $e_3$  es el error en orientación y  $q_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$  es la trayectoria a seguir. La derivada del error  $e$  con respecto al tiempo tiene la forma

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) - v_1 + v_2 e_2 \\ v_r \sin(e_3) + \omega_r d \cos(\gamma) \cos(e_3) - v_2 (d + e_1) \\ \omega_r - v_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde  $v_r$  y  $\omega_r$  son las velocidades de referencia lineal y angular respectivamente,  $v_1$  y  $v_2$  pertenecen a un vector de velocidades de control  $v_c = [v_1 \ v_2]^T = [v \ \omega]^T$  dado por

$$v_c = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) + K_x e_1 \\ \omega_r + v_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_\theta$  son constantes.

La ecuación (18) se desarrolla a partir de la función de Lyapunov mostrada más adelante, esta ecuación se desarrolla con la finalidad de que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa. La derivada de (18) con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \begin{bmatrix} \dot{v}_r \cos(e_3) - \dot{\omega}_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) \\ \dot{\omega}_r + \dot{v}_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} K_x & 0 & -v_r \sin(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \cos(e_3) \\ 0 & v_r K_y & v_r K_\theta \cos(e_3) \end{bmatrix} \dot{e} \end{aligned} \quad (19)$$

Y se introducen ahora las siguientes suposiciones

*Suposición 1.* La velocidad lineal de referencia  $v_r$  es tal que

$$v_r \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (20)$$

*Suposición 2.* Las constantes  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_\theta$  en el vector de velocidades de control  $v_c$  dado por (18) son suficientemente grandes de tal modo que se satisface la desigualdad

$$K_x e_1^2 + v_r (d \cos(\gamma) K_y e_2^2 + K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1}) \geq d \cos(\gamma) e_2 (\omega_r (1 - \cos(e_3)) + v_r K_\theta \sin(e_3)) \quad (21)$$

La *suposición 1* significa que la velocidad lineal debe ser siempre positiva, lo que implica que el robot solo se puede mover en dirección de  $X_m$  positiva; esto impide que el robot se mueva hacia atrás con la finalidad de seguir la trayectoria. Por otro lado, la *suposición 2* puede verificarse a priori al suponer que el error  $e_2$  es suficientemente pequeño para la trayectoria que se quiere seguir, esto implica que el robot debe de iniciar lo suficientemente cerca de la trayectoria a seguir.

Se tiene entonces el siguiente resultado sobre la dinámica del error de seguimiento.

*Teorema 1.* Considere la dinámica del error dada por la ecuación (17) junto con el vector de velocidades de control dado por (18) y las *suposiciones 1 y 2*. Entonces el error  $e = 0$  es un punto de equilibrio estable para el sistema (17)-(18)

**Demostración.** Considere la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + (1 - \cos(e_3)) K_y^{-1} \quad (22)$$

Es claro que la ecuación (22) es definida positiva y  $V = 0$  solo cuando  $e = 0$ . Al obtener la derivada con respecto al tiempo de  $V$  y sustituyendo  $\dot{e}$  y  $v_c$  de (17) y (18) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K_x e_1^2 - v_r (d \cos(\gamma) K_y e_2^2 + K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1}) \\ &\quad - d \cos(\gamma) e_2 (\omega_r (1 - \cos(e_3)) + v_r K_\theta \sin(e_3)) \end{aligned} \quad (23)$$

Por restricciones de espacio, el análisis formal de  $\dot{V}$  se presentará en un trabajo futuro. Entonces bajo las *suposiciones 1 y 2*, se puede mostrar que el punto de equilibrio  $e = 0$  del sistema (17) en lazo cerrado es estable.  $\square$

Tabla 1. Parámetros físicos del robot móvil

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	2.593	[Kg]
d	0.022	[m]
r	0.045	[m]
R	0.13	[m]
I	0.02	[Kg - m <sup>2</sup> ]
$\gamma$	0.262	[rad]

De la ecuación (12) proponemos el siguiente control auxiliar.

$$u = \dot{v}_c + K(v_c - \eta) \quad (24)$$

Este control auxiliar tiene como objetivo que  $v_c \rightarrow \eta$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , esto implica que si las velocidades virtuales tienden a las velocidades reales y con esto se puede usar a  $\dot{v}_c$  en lugar de  $\dot{\eta}$  ya que en ocasiones es difícil poder medir las aceleraciones en la implementación en un prototipo. Con la ecuación (24) se completa la ley de control por par calculado definida en la ecuación (12).

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se presentan tres simulaciones con la finalidad de observar de forma más detallada el comportamiento de los parámetros involucrados en el control, cada una de estas simulaciones aborda un caso específico de combinación de parámetros.

Los parámetros del robot móvil usados para las simulaciones se muestran en la tabla 1. En todas las simulaciones se considera a la velocidad lineal tangente a la trayectoria, a la velocidad angular como el cambio en la orientación de la velocidad lineal y el robot debe iniciar su trayectoria sobre la curva a seguir.

##### 4.1 Seguimiento de una línea recta

En esta simulación, el robot móvil sigue una línea recta que une al origen con el punto  $P_f = [2 \ 2]$  e inicia con condiciones iniciales  $q_0 = [0 \ 0 \ 0]$ . En esta trayectoria la velocidad angular en cero y la velocidad lineal es constante y positiva, con lo que basta con elegir a  $k_x$  mucho mayor a  $k_y$  y  $k_\theta$  para garantizar que el control es asintóticamente estable y los errores de posición y orientación son cero en estado estacionario (véase figura 4).

En la figura 3 se puede ver como el robot móvil sigue muy bien la trayectoria planeada, además observamos en la figura 5 que las velocidades de control tienden a las reales, por lo que el control bajo estas condiciones se comporta adecuadamente.

##### 4.2 Seguimiento de una trayectoria circular

En esta simulación, el robot sigue una trayectoria circular con centro en el origen y radio de un metro, el robot inicia en la trayectoria en la condición inicial  $q_0 = [0 \ 1 \ 0]$ . En esta trayectoria, la velocidad lineal y angular son constantes, además, la velocidad lineal es siempre positiva. Bajo estas condiciones, para garantizar la estabilidad del controlador basta con seleccionar  $k_x$  y  $k_y$  más grandes que  $k_\theta$ . En la figura 7 se puede ver que los errores angular y de posición son pequeños y se encuentran acotados, por lo que la trayectoria generada es muy parecida a la real (véase figura 6). Por otro lado, en la figura 8 se puede apreciar que la velocidad virtual tiende a la velocidad real, por lo que el controlador se sigue comportando satisfactoriamente.

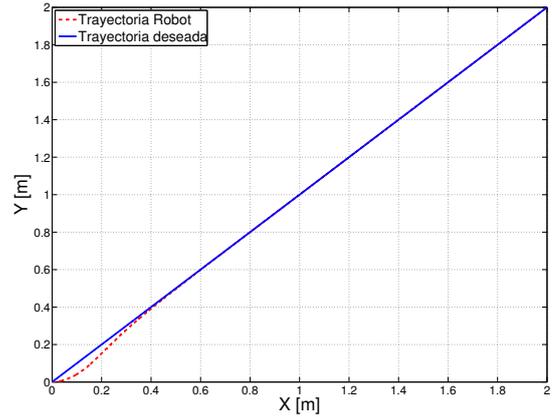


Figura 3. Seguimiento de línea recta

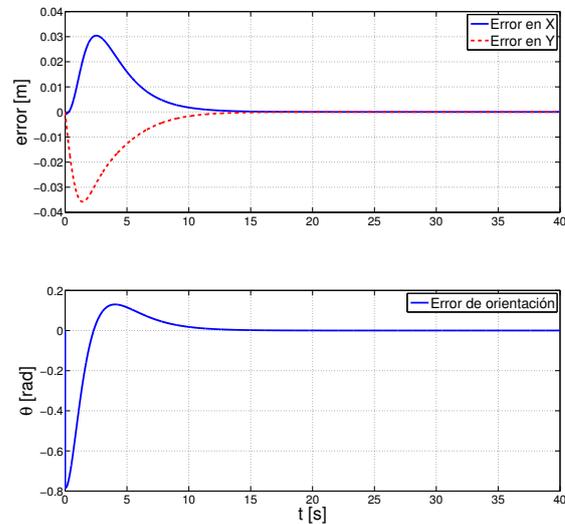


Figura 4. Error de posición y error angular

##### 4.3 Seguimiento de una curva de Lissajous

En esta simulación, el robot móvil sigue una curva de Lissajous, la cual tiene la siguiente función paramétrica

$$\begin{aligned} x_r &= A \sin(awt + \alpha) \\ y_r &= B \cos(bwt) \end{aligned} \quad (25)$$

donde:

- A** Es la amplitud de la curva en el eje X.
- B** Es la amplitud de la curva en el eje Y.
- $aw$  La frecuencia en el eje X.
- $bw$  La frecuencia en el eje Y.
- $\alpha$  Ángulo de desfase entre las señales.

Se usa esta curva porque presenta una trayectoria que fácilmente puede ser modificada cambiando las constantes de la función paramétrica, además de que presenta curvas cerradas donde el robot puede presentar comportamientos no esperados. Esta curva además presenta una velocidad angular y lineal variantes en el tiempo, lo que complica el análisis de estabilidad del controlador. En esta trayectoria solo se garantiza que la velocidad lineal siempre es positiva

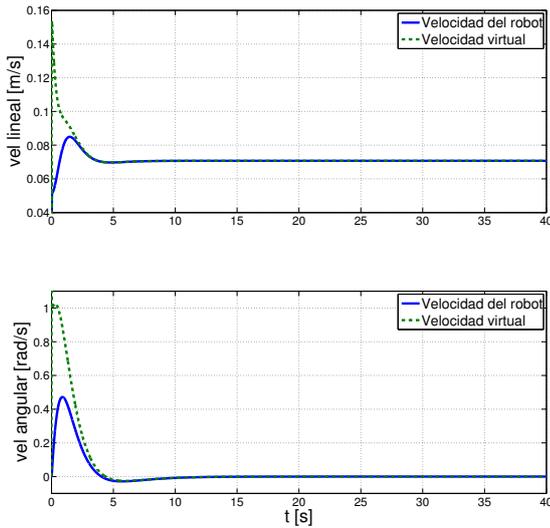


Figura 5. Comparación de la velocidad real con la de control

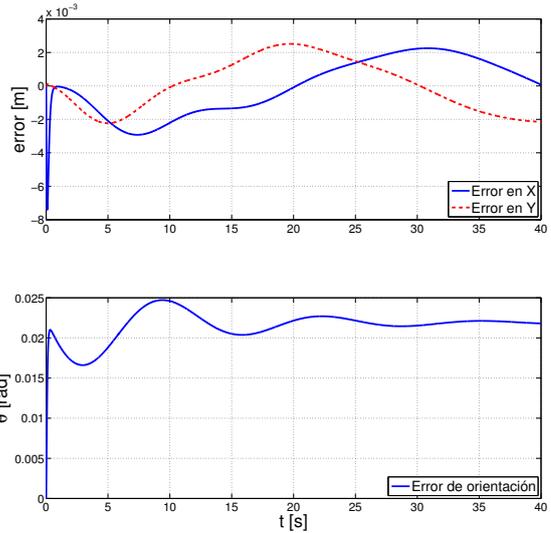


Figura 7. Error de posición y error angular

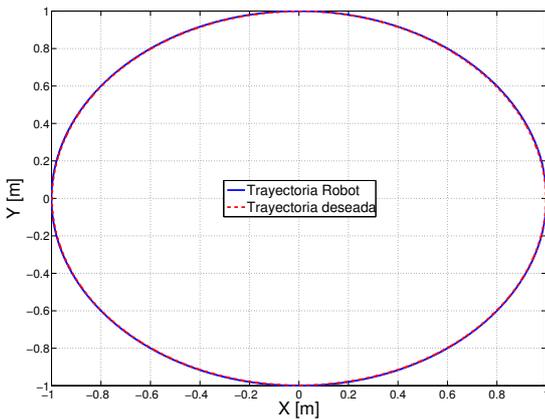


Figura 6. Seguimiento de una trayectoria circular

(véase figura 11), por lo que para verificar las condiciones de estabilidad se realizaron varias simulaciones donde se observa que es suficiente seleccionar las constantes  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_\theta$  lo suficientemente grandes para que la parte de la ecuación (19) donde se encuentran los términos cuadráticos sea mayor que la que no los tiene, esto se puede verificar de forma numérica para garantizar estabilidad. En la figura 9 se observa que la trayectoria se sigue muy bien en las rectas y curvas amplias, lo cual no sucede en las curvas más cerradas; por otro lado, este error se mantiene acotado (véase figura 10).

#### 4.4 Discusión de los resultados

Los resultados obtenidos en donde las velocidades lineales y angulares son constantes presentan un comportamiento muy bueno, las velocidades de control convergen rápidamente a las velocidades reales; estos datos presentan una similitud con los presentados en Fierro y Lewis (1995), donde ellos suponen las mismas condiciones de velocidad. Por otro lado, no se analiza el efecto que tiene que las

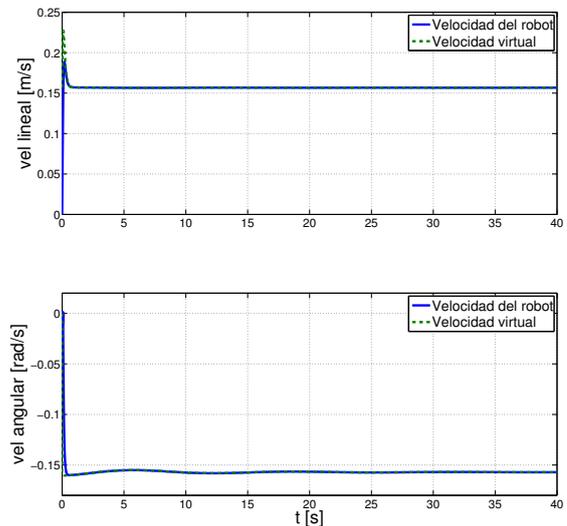


Figura 8. Comparación de la velocidad real con la de control

trayectorias presenten velocidades variantes en el tiempo. En el proceso de simulación del seguimiento de la curva de Lissajous se observó que existe un compromiso entre el seguimiento de la posición y el seguimiento de la orientación, si se eligen constantes que favorecen al seguimiento de la posición se tiene un error más grande en el seguimiento de la orientación (véanse figuras 4 y 11).

## 5. CONCLUSIONES

Aunque con el controlador propuesto no se logra estabilidad asintótica, los resultados obtenidos indican que el controlador mantiene al sistema estable durante el seguimiento de la trayectoria punto a punto, considerando un desbalance en el centro de masa. En el trabajo mostrado no se considera a la desviación del centro de masa como una variable ya que el objetivo

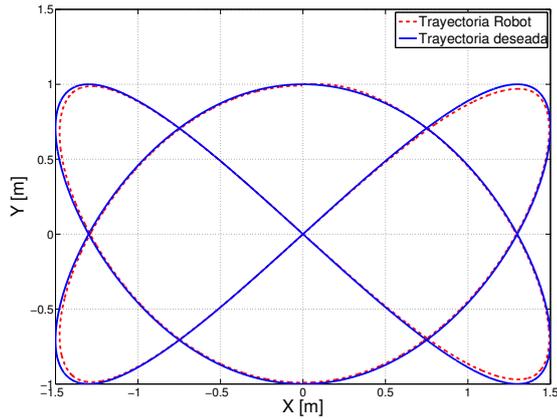


Figura 9. Seguimiento de una curva de Lissajous

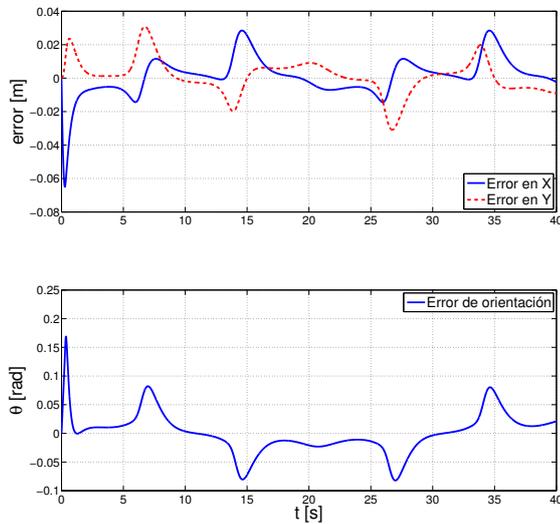


Figura 10. Error de posición y error angular

es que el robot pueda manipular un objeto sin que exista un movimiento relativo de éste con el robot móvil, por lo que los resultados obtenidos son válidos y se deja para un trabajo a futuro el análisis de robustez del controlador ante cambios más drásticos en la posición del centro de masa. El análisis más riguroso de la ecuación (23), con el fin de garantizar la estabilidad del sistema sin la elección arbitraria de las ganancias del controlador, se deja también para trabajo a futuro.

#### REFERENCIAS

Barghijand, H., Akbarimajd, A., y Keighobadi, J. (2011). Quasi-static object manipulation by mobile robot: Optimal motion planning using ga. *11th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 202–207.

Bates, L. y Sniatycki, J. (1993). Nonholonomic reduction. *Reports on Mathematical Physics*, 32, 99–115.

Campion, G., d'Andréa Novel, B., y Bastain, G. (1991). Modeling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1184–1189.

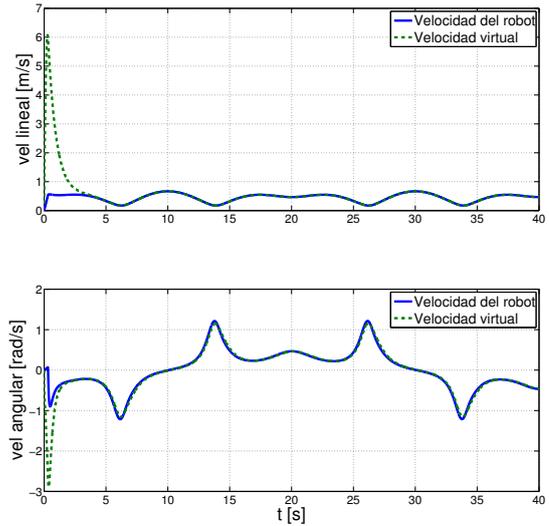


Figura 11. Comparación de la velocidad real con la de control

Canudas, C., Khennouf, H., Samson, C., y Sordalen, O.J. (1993). *Nonlinear Control Design for Mobile Robots*, 121–156. Recent Trends in Mobile Robots, world scientific edition.

Fierro, R. y Lewis, F. (1995). Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. *Proc. 34th Conference on Decision and Control*, 3805–3810.

Gholipour, A. y Yazdanpanah, M.J. (2003). Dynamic tracking control of nonholonomic mobile robot with model reference adaptation for uncertain parameters.

Lewis, F.L., Abdallah, C.T., y Dawson, D.M. (1993). *Control of Robot Manipulators*. McMillan, New York.

Rosenberg, R.M. (1977). *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. Plenum Press, New York.

Yo, S.J. (2012). Approximation-based adaptive control for class of mobile robots with unknown skidding and slipping. *International Journal of Control, Automation and Systems*.

Zohar, I., Ailon, A., y Rabinovici, R. (2009). Controllers for mobile robot dynamic models: trajectory tracking with applications to convoy-like vehicles. *17th Mediterranean Conference on Control and Automation*.