

Sintonización de un controlador PID-PID en cascada aplicado a un giroscopio de 2 g.d.l.

Cordero Gustavo * Dzul Alejandro ** Santibáñez Víctor ***
Ollervides E. Javier ****

Instituto Tecnológico de la Laguna,
Apdo. Postal 49, Adm. 1, Torreón Coahuila, 27001, MEXICO. Fax: +52 871
7 05 13 26

* e-mail: gustavo.cordero.hdz@gmail.com

** e-mail: dzul@faraday.itlalaguna.edu.mx

*** e-mail: vsantiba@itlalaguna.edu.mx

**** e-mail: jollervi@itlalaguna.edu.mx

Resumen: El control en cascada es uno de los métodos más exitosos para mejorar el desempeño de un sistema en lazo simple (SISO) o para controlar aquellos sistemas que cuentan con múltiples entradas y una salida (MISO) y no pueden ser controlados con un lazo simple. Sin embargo, la literatura acerca del diseño y la sintonización de sistemas con control en cascada parece ser limitada. En este artículo se presenta un controlador Proporcional Integral Derivativo en cascada (PID-PID) semi-sintonizable, es decir, la mitad de las ganancias son sintonizadas de manera directa por el usuario, aplicando cualquier método de sintonización conocido (heurístico o formal), y la otra mitad son calculadas indirectamente a partir de ciertas suposiciones hechas para este método. La principal contribución de este trabajo radica en la reducción considerable de las ganancias a sintonizar, haciendo que el controlador en cascada pueda sintonizarse como un PID simple. Además, se aplica dicho controlador a un giroscopio de dos grados de libertad subactuado. Finalmente se compara el controlador propuesto con un controlador PID-PID completamente sintonizado por el usuario y se presentan los resultados, en simulación y experimentales, demostrando que el método de sintonización propuesto consigue un desempeño equiparable, con un esfuerzo de sintonización menor por parte del usuario.

Palabras clave: giroscopio, controlador PID, controlador en cascada, semi-sintonización.

1. INTRODUCCIÓN

El control en cascada puede utilizarse cuando existen varias señales de entrada y una sola variable de control (Åström, 2006). Se construye anidando los lazos de control, como se muestra en la Figura 1, donde C_p hace referencia al controlador primario, u es la variable de control, P_1 y P_2 indican las diferentes dinámicas de la planta, la variable y_{sp} indica la señal de referencia, y es la variable controlada. Además, el control en cascada emplea una señal de entrada secundaria y_s y también un controlador secundario realimentado C_s . La

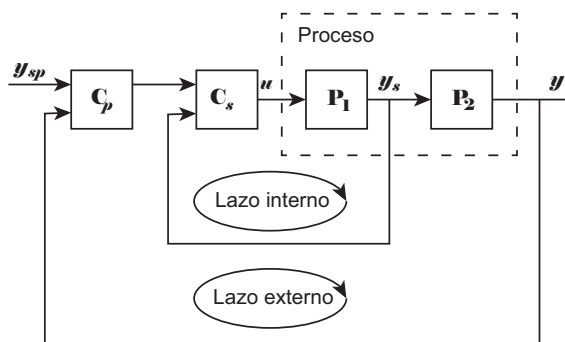


Fig. 1. Diagrama de bloques de un sistema con control en cascada.

entrada secundaria detecta la condición de error más rápido que la variable controlada y . Dicho controlador también es usado cuando las perturbaciones son asociadas con la variable controlada o cuando el elemento final de control presenta un comportamiento no lineal (Seborg, 2004).

El control en cascada es ampliamente utilizado en los procesos industriales (Seborg, 2004) y tiene dos características principales:

- La señal de salida del controlador primario C_p (a veces llamado maestro) sirve como *set point* para el controlador secundario C_s (a veces llamado esclavo).
- Los dos controladores realimentados son anidados, es decir, el lazo de control secundario (a veces llamado lazo interno) está localizado dentro del lazo de control primario (a veces llamado lazo externo).

Algunas ventajas de usar un controlador en cascada son:

- El control en cascada puede proveer un mejor desempeño que los controladores convencionales cuando ambos controladores están bien sintonizados, ya que reduce el tiempo de respuesta de los elementos del lazo interno que afectan directamente al lazo externo (Seborg, 2004).

- Es ampliamente usado debido a su desempeño cuando hay cambio de carga en el sistema (rechazo de perturbaciones) (Newell, 1988).
- Hace que el sistema en lazo cerrado sea menos sensible a errores del modelo (Brosilow, 1978).

Algunas desventajas de usar un controlador en cascada son:

- Controlador más complejo.
- Para que un sistema con control en cascada funcione apropiadamente, la respuesta del lazo de control secundario debe ser más rápida que la del lazo primario (Shinsky, 1988; Arrieta et al., 2008).
- Aumento de las ganancias a sintonizar.
- Si el controlador secundario es re-sintonizado, generalmente el controlador primario debe ser también sintonizado (Seborg, 2004).

El control en cascada a utilizar en este trabajo involucra el uso y la sintonización de dos controladores PID. Las reglas de sintonización implican primero la sintonización del controlador secundario, después, como segundo paso, el controlador primario es sintonizado considerando la acción del controlador secundario en el lazo interno. Por consecuencia, el procedimiento de diseño es más complicado que un sistema con control PID en lazo simple (Åström, 2006; Seborg, 2004; Arrieta et al., 2008; Visioli, 2006).

Algunos estudios proporcionan métodos que ayudan en el diseño y sintonización de un sistema con control en cascada. En Hang et al. (1994) se usa un procedimiento de auto sintonizado basado en el método de realimentación con relevador (*relay feedback*); el procedimiento consume mucho tiempo (Visioli, 2006). Otros resultados proporcionan reglas de sintonización para el controlador principal y secundario (Lee et al., 1998; Tan et al., 2000); o sugieren estructuras de control alternas basados en la modificación de la configuración convencional en cascada (Kaya et al., 2007; Yin et al., 2012); sin embargo no existe una guía clara de como automatizar el proceso y la razón que hay detrás de la sintonización propuesta. En Visioli (2006) se muestra un excelente método para sintonizar automáticamente las ganancias de un control en cascada, sin embargo, dicha sintonización se basa en el modelo (función de transferencia de primer orden más tiempo muerto FOPDT) que describe el comportamiento de muchos procesos industriales; pero no todos los sistemas tienen ese comportamiento y se agrega el problema de elegibilidad del controlador a utilizar (saber si a un proceso desconocido se puede aplicar dicha sintonización). En la mayoría de los artículos publicados se encuentran estudios basados en el modelo, el cual debe ser lineal o linealizado (lo cual agrega problemas cuando el modelo del sistema a trabajar es no lineal y no se puede o es difícil de linealizar); además, generalmente se muestran sólo resultados en simulación y no resultados experimentales que avalen sus conclusiones.

Debido a que la literatura acerca del diseño y la sintonización de sistemas con control en cascada es limitada (Cesca, 2005; Lee et al., 1998) y la existente es un tanto compleja y se basa en el modelo (el cual debe ser lineal), en este artículo, se propone un método nuevo, sencillo y eficiente para sintonizar un sistema con controlador en cascada PID-PID, cuyas ventajas radican en sintonizar solamente uno de sus dos controladores y en que está libre del modelo, por lo tanto aplica a todo sistema que necesite un controlador en cascada. Para demostrar la efectividad del

controlador en cascada se propone aplicarlo a un giroscopio de dos grados de libertad subactuado.

Una introducción a los controladores en cascada, análisis del estado del arte y la contribución principal de este artículo se encuentran en la presente sección. Una breve introducción al sistema giroscópico y el modelado no lineal y lineal se encuentran en la sección dos. En la sección tres se presenta el análisis del control en cascada PID-PID y se presenta el proceso de cómo obtener las ecuaciones de semi sintonización. En la sección cuatro se aplica el controlador en cascada semi sintonizable al giroscopio de dos grados de libertad subactuado que se propuso en la sección dos y se compara con un controlador en cascada sintonizado en su totalidad por el usuario. Se muestran resultados en simulación y también los resultados experimentales obtenidos al aplicar ambos controladores al giroscopio de Quanser. En la sección cinco se generan las conclusiones obtenidas durante el trabajo de investigación y se propone el trabajo a futuro. Finalmente, en la última sección se encuentran las referencias utilizadas en la elaboración de este artículo.

2. GIROSCOPIO Y MODELO DINÁMICO LINEAL Y NO LINEAL

2.1 Giroscopio

El giroscopio es un aparato usado para medir o mantener la orientación, basado en los principios del momento angular. Los giroscopios sensan el movimiento angular y son el corazón de los aviones equipados con piloto automático, guía de lanzamiento de cohetes, control de orientación de vehículos espaciales, giro-brújulas de barcos y autonavegadores inerciales de submarinos. Para el presente artículo se ha usado el giroscopio de tres grados de libertad de Quanser, el cual se muestra en la Figura 2. Este sistema consiste en un disco (D) montado dentro de un anillo interior de color azul (C), el cual a su vez está montado dentro de un anillo exterior de color rojo (B). Toda la estructura anterior está soportada por un marco rectangular de color plata (A) que gira libremente alrededor de su eje de simetría vertical. La estructura total tipo Cardan le permite al disco girar libremente y le confiere tres grados de libertad (en realidad el sistema de Quanser tiene cuatro grados de libertad, uno del disco y tres del mecanismo Cardan. En muchas aplica-

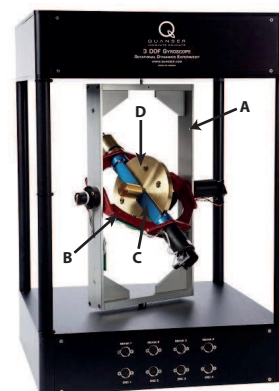


Fig. 2. Giroscopio de tres g.d.l. de Quanser y nomenclatura de cuerpos.

ciones la velocidad del disco es constante, entonces se dice que el giroscopio tiene 3 g.d.l.).

2.2 Modelo No Lineal

En esta sección se presenta el modelo no lineal del giroscopio de Quanser de tres g.d.l. obtenido por el método de Euler-Lagrange. El modelo físico de dicho giroscopio se muestra en la Figura 3. Entonces q_1 es el ángulo asociado al cuerpo D medido respecto al eje X ; q_2 es el ángulo asociado al cuerpo C medido respecto al eje Y y q_3 es el ángulo asociado al cuerpo B medido respecto al eje Z . El marco rectangular (A) se mantiene inmóvil de tal manera que $q_4 = \dot{q}_4 = \ddot{q}_4 = 0$. La velocidad angular $n = \dot{q}_1$ del disco del giroscopio se mantiene constante respecto al anillo interior (C) de tal manera que las ecuaciones de movimiento pueden reducirse a dos, convirtiendo el giroscopio en un sistema de dos grados de libertad. Por conveniencia solamente se actúa un grado de libertad ($\tau_3 = 0$) para finalmente convertir al giroscopio en un sistema de dos grados de libertad subactuado.

Usando matrices de rotación en X, Y y Z se obtiene

$$R_B^0 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_C^B = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}, R_D^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -S_1 \\ 0 & S_1 & C_1 \end{bmatrix}.$$

siendo $C_i = \cos(q_i)$ y $S_i = \sin(q_i)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$. Supóngase que en general la velocidad angular del cuerpo I con respecto al marco del cuerpo J ($I, J \in \{B, C, D\}$) está dada por el vector ω_I^J , usando las matrices de rotación R_B^0, R_C^B y R_D^C , se obtiene

$$\omega_B^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \omega_C^B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega_D^C = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las velocidades angulares de los cuerpos B, C y D respecto a su propio marco se obtienen definiendo $\omega_B^B = R_B^0 \omega_B^0 = (R_B^0)^T \omega_B^0$, $\omega_C^C = (R_C^B)^T (\omega_C^B + \omega_C^B)$ y $\omega_D^D = (R_D^C)^T (\omega_D^C + \omega_D^C)$. Sustituyendo y haciendo operaciones se obtienen las siguientes velocidades angulares:

$$\omega_B^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \omega_C^C = \begin{bmatrix} -S_2 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \\ C_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \omega_D^D = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - S_2 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \\ C_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}.$$

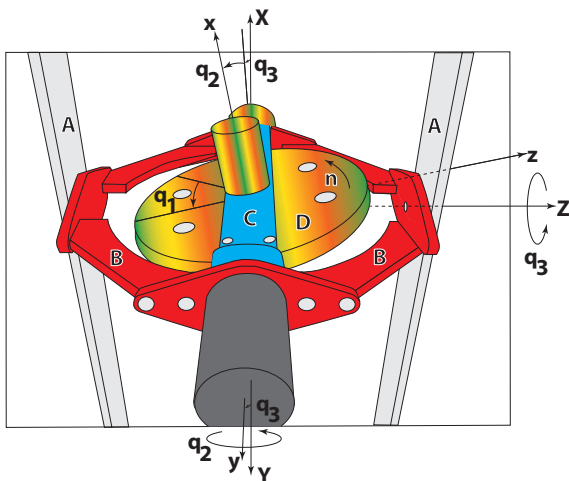


Fig. 3. Giroscopio en una configuración arbitraria.

En la velocidad angular ω_D^D se han omitido los términos en función de q_1 ya que la posición del disco no es relevante ($q_1 = 0$), solamente la velocidad $n = \dot{q}_1$ lo es.

La energía cinética de cada uno de los cuerpos del giroscopio se obtiene a partir de la ecuación $\mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{I=A}^D \omega_I^{I^T} \mathbf{I}_I \omega_I^I$. Donde falta por definir \mathbf{I}_I como la matriz de momentos de inercia del cuerpo I referida al marco del mismo cuerpo. (Nótese que al no haber movimiento de traslación el término $\frac{1}{2} m_I \mathbf{v}_I^T \mathbf{v}_I$ es suprimido).

La energía cinética del cuerpo D se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_D(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} \omega_D^{D^T} \mathbf{I}_D \omega_D^D, \\ \mathcal{K}_D(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} I_{Dxx} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{Dyy} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{Dzz} \dot{q}_3^2 \\ &\quad - I_{Dxx} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} (I_{Dxx} - I_{Dzz}) S_2^2 \dot{q}_3^2. \end{aligned} \quad (1)$$

La energía cinética del cuerpo C es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_C(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} \omega_C^{C^T} \mathbf{I}_C \omega_C^C, \\ \mathcal{K}_C(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} (I_{Cxx} - I_{Czz}) S_2^2 \dot{q}_3^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{Cyy} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{Czz} \dot{q}_3^2. \end{aligned} \quad (2)$$

La energía cinética del cuerpo B queda como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_B(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} \omega_B^{B^T} \mathbf{I}_B \omega_B^B, \\ \mathcal{K}_B(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} I_{Bzz} \dot{q}_3^2. \end{aligned} \quad (3)$$

La energía cinética total ($\mathcal{K} = \mathcal{K}_B + \mathcal{K}_C + \mathcal{K}_D$) es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &= \frac{1}{2} I_{Dxx} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_3^2 \\ &\quad - I_{Dxx} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} J_1 S_2^2 \dot{q}_3^2. \end{aligned} \quad (4)$$

donde $J_1 = I_{Cxx} - I_{Czz} - I_{Dzz} + I_{Dxx}$, $J_2 = I_{Bzz} + I_{Czz} + I_{Dzz}$ y $J_3 = I_{Cyy} + I_{Dyy}$.

La energía potencial total del giroscopio $\mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) = 0$, ya que los marcos asociados a todos los cuerpos del giroscopio coinciden con los centros de masa. Para encontrar las ecuaciones de movimiento es necesario encontrar el Lagrangiano \mathcal{L} que se define como $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(t))$ y ya que $\mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) = 0$, entonces $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$. Aplicando entonces las ecuaciones de movimiento de Lagrange $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para el giroscopio:

$$I_{Dxx} [\ddot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - S_2 \ddot{q}_3] = \tau_1, \quad (5)$$

$$J_3 \ddot{q}_2 + I_{Dxx} C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - J_1 S_2 C_2 \dot{q}_3^2 = \tau_2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (J_2 + J_1 S_2^2) \ddot{q}_3 + 2J_1 S_2 C_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ - I_{Dxx} [S_2 \ddot{q}_1 + C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2] = \tau_3. \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Modelo Lineal

El modelo lineal se utiliza para demostrar por qué un controlador PID de lazo simple no es capaz de controlar el giroscopio,

teniendo, por lo tanto, la necesidad de recurrir al controlador Proporcional Integral Derivativo en cascada (PID-PID).

Ya que la velocidad del disco $n = \dot{q}_1$ es constante, se tiene $\ddot{q}_1 = 0$. Definiendo $h = I_{Dxx}n = I_{Dxx}\dot{q}_1$ y aplicando las aproximaciones por variaciones pequeñas de ángulos alrededor de $q_2 = 0$ se tiene $\sin(q_2) \approx q_2$ y $\cos(q_2) \approx 1$; tomando en cuenta que $h\dot{q}_3 \gg J_1S_2\dot{q}_3^2$, $h\dot{q}_3 \gg J_1S_2^2\ddot{q}_3$ y $h\dot{q}_2 \gg 2J_1S_2C_2q_2\dot{q}_3$ ya que la velocidad n es muy grande, alcanzando las 750 rpm, entonces los términos a la derecha de las desigualdades anteriores pueden considerarse cero; por lo tanto las ecuaciones (6) y (7) quedan linealizadas de la siguiente manera:

$$J_3\ddot{q}_2 + h\dot{q}_3 = \tau_2, \quad (8)$$

$$J_2\ddot{q}_3 - h\dot{q}_2 = 0. \quad (9)$$

Llevando las ecuaciones (8) y (9) al dominio de la frecuencia se llega a

$$J_3q_2s^2 + hq_3s = \tau_2, \quad (10)$$

$$J_2q_3s^2 - hq_2s = 0. \quad (11)$$

Despejando q_2 de (11) se obtiene $q_2 = \frac{J_2q_3s}{h}$, que al sustituirlo en (10) y haciendo operaciones se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$\frac{q_3}{\tau_2} = \frac{h}{J_2J_3s^3 + h^2s}. \quad (12)$$

Las ecuaciones (6), (7), (8) y (9) fueron obtenidas analíticamente por los autores, siendo equivalentes a las obtenidas por Canon (2003) quien usó el método de D'alembert. La ecuación (12) es idéntica a la utilizada por Quanser (2011).

3. CONTROLADOR PID-PID EN CASCADA SEMI SINTONIZABLE

3.1 Objetivo de control

El objetivo de control es llevar el anillo exterior del giroscopio (B) asociado a q_3 , el cual es subactuado, a una configuración deseada q_{3d} actuando simplemente el anillo interior (C) asociado a q_2 . Para que surja el efecto giroscópico, el disco (D) rotará a velocidad $n = \dot{q}_1 = 750$ rpm.

3.2 Controlador PID de lazo simple

El primer paso antes de proponer un controlador en cascada PID-PID es asegurarse que el sistema giroscópico no puede controlarse con un lazo simple PID. Con este fin, se propone un controlador PID de lazo simple $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_v s$ y usando la ecuación $H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$, donde $G(s)$ es la ecuación (12), se obtiene la siguiente función de transferencia del giroscopio en lazo cerrado:

$$H(s) = \frac{h(k_v s^2 + k_p s + k_i)}{J_2J_3s^4 + (h^2 + hk_v)s^2 + hk_p s + hk_i}. \quad (13)$$

donde k_p , k_v y k_i son las ganancias proporcional, derivativa e integral del controlador, respectivamente. Para obtener $H(s)$ en forma numérica, se usan los siguientes valores proporcionados por Quanser (2011) : $h = 1.0891[\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}]$, $J_3 = 0.0026[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ y $J_2 = 0.0342[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$.

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz, para conocer la estabilidad de la función de transferencia en lazo cerrado (13),

se utiliza el polinomio característico del denominador de dicha función para formar la matriz de Routh y se analiza la primera columna para encontrar cambio de signos. En el tercer término puede comprobarse que $k_v > \frac{J_2J_3K_p}{\epsilon} \rightarrow \infty$, con $\epsilon \rightarrow 0$ y en el tercer y cuarto término existe una contradicción, a saber, $k_p < 0$ y $k_p > 0$ lo que lleva a concluir que no existen valores de k_p , k_v y k_i que hagan estable el sistema en lazo cerrado. Se concluye que un controlador PID en lazo simple no es capaz de estabilizar el sistema. Esto es debido a que el controlador PID agrega dos ceros al sistema y un polo en el origen. Si el polo en el origen pudiese moverse entonces el controlador PID podría estabilizar el sistema; es por eso que un compensador de fase de la forma $C(s) = \frac{k(s+\alpha)}{s+\beta}$ sí puede proporcionarle estabilidad al sistema, tal y como se menciona en Quanser (2011).

3.3 Controlador en cascada PID-PID

Para utilizar controladores del tipo PID, se requiere utilizar una variable intermedia q_2 y un controlador secundario PID, que al conectarse en cascada con el primero pueda cumplir con el objetivo de control. Se propone un controlador en cascada siguiendo la configuración de la Figura 1. Los controladores C_p y C_s se proponen como PIDs. Según Kelly y Santibáñez (2003) la ley de control PID puede expresarse como $\tau = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i\int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma)d\sigma$, donde los valores de diseño K_p , K_v , $K_i \in \mathbb{R}$, son las llamadas respectivamente ganancias proporcional, derivativa e integral; y τ es el par aplicado. Las siguientes son las leyes de control PID para cada uno de los lazos (interno y externo) con las variables adaptadas al giroscopio.

$$k_{p1}\tilde{q}_3 + k_{v1}\dot{\tilde{q}}_3 + k_{i1}\int_0^t \tilde{q}_3(\sigma)d\sigma = \tau, \quad (14)$$

$$k_{p2}\tilde{q}_2 + k_{v2}\dot{\tilde{q}}_2 + k_{i2}\int_0^t \tilde{q}_2(\sigma)d\sigma = \tau_2. \quad (15)$$

La ecuación (14) pertenece al controlador primario C_p y es escogido así, pues contiene la variable a controlar q_3 . Por ende, la ecuación (15) es la del controlador secundario C_s ; siendo $\tilde{q}_3 = q_{3d} - q_3$ y $\tilde{q}_2 = q_{2d} - q_2$. Si se derivan estas ecuaciones, es claro que $\dot{\tilde{q}}_3 = \dot{q}_{3d} - \dot{q}_3$ y $\dot{\tilde{q}}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2$, donde $\tilde{}$ denota error y el sufijo $_d$ significa deseada.

El controlador en cascada surge al hacer la salida del controlador primario la entrada de referencia o *setpoint* del secundario ($q_{2d} = \tau$). Así,

$$\tilde{q}_2 = \tau - q_2, \quad (16)$$

$$\dot{\tilde{q}}_2 = \dot{\tau} - \dot{q}_2. \quad (17)$$

Sustituyendo (16) y (17) en la ecuación (15), haciendo operaciones y reduciendo términos, se obtiene la ley de control PID-PID en cascada:

$$\begin{aligned} & (k_{p1}k_{p2} + k_{v1}k_{i2} + k_{v2}k_{i1})\tilde{q}_3 + (k_{p1}k_{v2} + k_{p2}k_{v1})\dot{\tilde{q}}_3 \\ & + (k_{p1}k_{i2} + k_{p2}k_{i1})\int_0^t \tilde{q}_3(\sigma)d\sigma + k_{v1}k_{v2}\ddot{\tilde{q}}_3 \\ & + k_{i1}k_{i2}\int_0^t \int_0^t \tilde{q}_3(\sigma)d\sigma \\ & - \left(k_{p2}q_2 + k_{v2}\dot{q}_2 + k_{i2}\int_0^t q_2(\sigma)d\sigma \right) = \tau_2. \end{aligned} \quad (18)$$

La ecuación (18) contiene seis ganancias a ser sintonizadas por el usuario, para las cuales no existe un método de sintonización uniforme y heurísticamente el proceso de sintonización es complicado.

3.4 Controlador en cascada PID-PID semi sintonizable

A partir de la ley de control (18) se obtiene el controlador en cascada PID-PID semi sintonizable haciendo algunas suposiciones, que tienen origen al observar las ganancias de la misma ley, las cuales son:

$$k_{vt} = k_{v1}k_{v2} = k_{p1}k_{v2} + k_{p2}k_{v1}, \quad (19)$$

$$k_{it} = k_{i1}k_{i2} = k_{p1}k_{i2} + k_{p2}k_{i1}. \quad (20)$$

Si esto es cierto, entonces, implica que el coeficiente de la segunda derivada del error de q_3 se puede obtener directamente del coeficiente de la primera derivada y el coeficiente de la segunda integral del error de q_3 se puede obtener directamente del coeficiente de la primera integral. Ya que se han unificado sus respectivas ganancias, despejando k_{v1} y k_{i1} de las ecuaciones (19) y (20) se obtienen las siguientes ecuaciones de diseño.

$$k_{v1} = k_{p1} \frac{k_{v2}}{D_v}, \quad (21)$$

$$k_{i1} = k_{p1} \frac{k_{i2}}{D_i}. \quad (22)$$

donde $D_i = k_{i2} - k_{p2}$ y $D_v = k_{v2} - k_{p2}$. Además, por conveniencia, se hace la siguiente equivalencia:

$$k_{pt} = k_{p1}k_{p2} + k_{i1}k_{v2} + k_{v1}k_{i2} = \frac{k_{p2}}{D_i D_v}. \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (21) y (22) en (23) y despejando k_{p1} se obtiene

$$k_{p1} = \frac{k_{p2}}{k_{p2}D_i D_v + k_{i2}k_{v2}(D_v + D_i)}. \quad (24)$$

Puede observarse en las ecuaciones (21), (22) y (24), que k_{p1} , k_{v1} y k_{i1} dependen de las ganancias del controlador secundario k_{p2} , k_{v2} y k_{i2} ; esto implica que se pueden sintonizar las ganancias del controlador secundario C_s relacionado a q_2 y las otras tres ganancias del controlador primario C_p relacionado a q_3 quedan implícitamente ajustadas.

Si en la ley de control (18) se sustituyen las suposiciones (19), (20) y la equivalencia (23), entonces la nueva ley de control semi sintonizable queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & k_{pt}\ddot{\tilde{q}}_3 + k_{vt}\dot{\tilde{q}}_3 + k_{it} \int_0^t \tilde{q}_3(\sigma) d\sigma \\ & + k_{vt}\ddot{\tilde{q}}_3 + k_{it} \int_0^t \int_0^t \tilde{q}_3(\sigma) d\sigma \\ & - \left(k_{p2}q_2 + k_{v2}\dot{q}_2 + k_{i2} \int_0^t q_2(\sigma) d\sigma \right) = \tau_2. \end{aligned} \quad (25)$$

El diagrama a bloques del controlador propuesto en la ecuación (25) se encuentra en la Figura 4. De las ecuaciones (21) y (22) se puede observar que para que k_{v1} y k_{i1} no sean infinitas, se requiere que $k_{v2} > k_{p2}$ y $k_{i2} > k_{p2}$; y para que no tengan valores muy elevados, entonces se requiere que $k_{v2} \gg k_{p2}$ y $k_{i2} \gg k_{p2}$.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

Para obtener resultados en simulación se utilizó el paquete Simulink de Matlab. Se utiliza el modelo dinámico no lineal propuesto en las ecuaciones (5) (6) y (7) y el lazo se cierra aplicando los controladores propuestos en las ecuaciones (18) y (25). Se propone como señal de referencia $q_{3d} = \text{sigmf}(y, [a, c])$, la cual genera una señal sigmoideal de y usando la función $f(y, a, c) = \frac{1}{1+e^{-a(y-c)}}$ siendo a y c parámetros de diseño escogidos convenientemente. A su vez $y = \text{sgn}(A \sin[\omega t])$, siendo sgn la función signo, A la amplitud, ω la frecuencia y t el tiempo. La señal q_{3d} es una señal casi cuadrada cuyos cambios de dirección son suaves. La amplitud se ha elegido como $A = 20^\circ$ y la frecuencia como $\omega = 0.1$ Hz.

La Figura 5 muestra el desempeño de los controladores en cascada PID-PID y PID-PID semi sintonizable ante la señal de referencia q_{3d} y la Figura 6 muestra el error de seguimiento para ambos controladores. Para el controlador PID-PID se han usado las ganancias $k_{p1} = 140 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v1} = 0.1 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$, $k_{i1} = 70 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$, $k_{p2} = 0.05 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v2} = 0.5 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ y $k_{i2} = 0.1 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$. Para el controlador PID-PID semi sintonizable se han usado las ganancias $k_{p2} = 0.004 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v2} = 0.005 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ y $k_{i2} = 0.15 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$. Por simplicidad, el método de sintonización ha sido heurístico. Se puede observar en la Figura 5 que el desempeño del controlador en cascada PID-PID semi sintonizable es bueno y equiparable al desempeño del controlador PID-PID totalmente sintonizado por el usuario, con la ventaja de sintonizar solamente tres ganancias.

Las Figuras 7 y 8 muestran los resultados experimentales obtenidos. La Figura 7 muestra el desempeño de los controladores en cascada PID-PID y PID-PID semi sintonizable ante la señal de referencia q_{3d} . La Figura 8 muestra el error de seguimiento para ambos controladores. Para el controlador PID-PID se han usado las ganancias $k_{p1} = 50 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v1} = 0.1 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$, $k_{i1} = 25 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$, $k_{p2} = 0.05 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v2} = 0.5 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ y $k_{i2} = 0.1 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$. Para el controlador PID-PID semi sintonizable se sintonizaron: $k_{p2} = 0.001 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$, $k_{v2} = 0.002 \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ y $k_{i2} = 0.25 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}\cdot\text{s}}$. Por simplicidad, el método de sintonización ha sido heurístico. Se puede observar en la Figura 7 que el desempeño del controlador en cascada PID-PID semi sintonizable es bueno y equiparable al desempeño del controlador PID-PID totalmente sintonizado por el usuario, con la ventaja de sintonizar solamente tres ganancias.

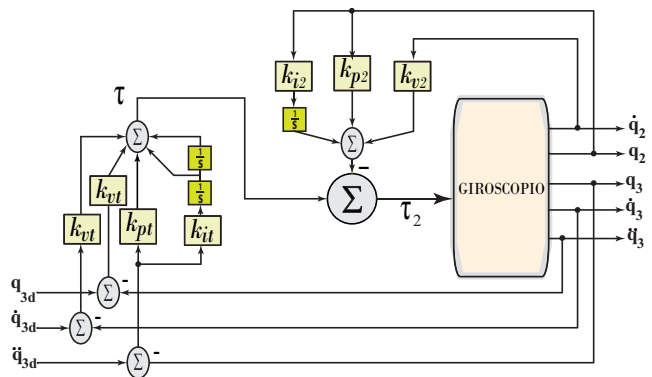


Fig. 4. Diagrama de bloques del controlador PID-PID semi sintonizable

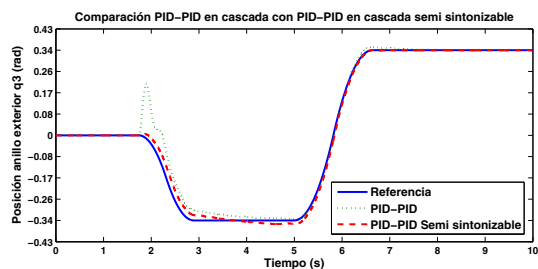


Fig. 5. Comparación entre un controlador PID-PID en cascada y un PID-PID en cascada semi sintonizable.

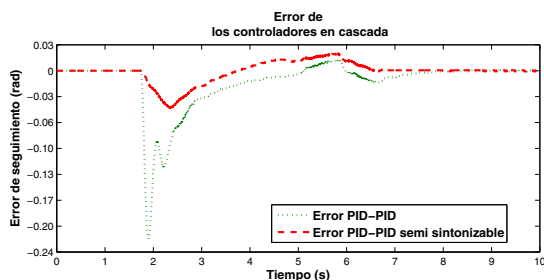


Fig. 6. Error de seguimiento de los controladores en cascada PID-PID y PID-PID semi sintonizable.

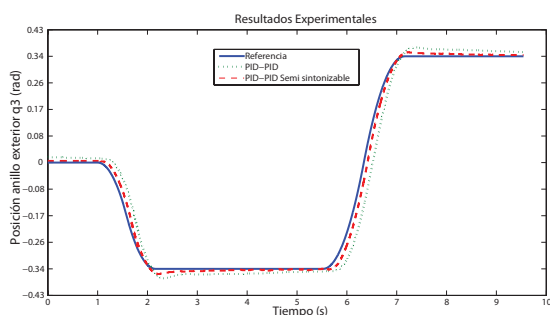


Fig. 7. Resultados experimentales del controlador PID-PID en cascada y el PID-PID en cascada semi sintonizable.

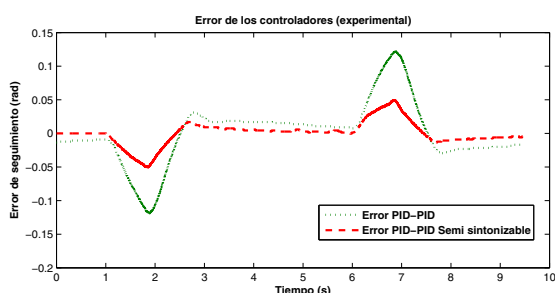


Fig. 8. Resultados experimentales del error de seguimiento de los controladores en cascada PID-PID y PID-PID semi sintonizable.

5. CONCLUSIONES

5.1 Contribuciones

A lo largo de la investigación sobre controladores se ha querido tener aquellos que sean sencillos de aplicar, de sintonizar, robustos y que el error con respecto a la referencia tienda a cero. En el presente artículo se encuentra un controlador exento de complicaciones matemáticas y libre del modelo de la planta.

Una ventaja del controlador propuesto respecto al controlador de fase, es que se tiene acceso a la señal secundaria de entrada, permitiendo así su total manipulación; para ciertos procesos esto es deseable. El objetivo de este trabajo no es mostrar que el método de sintonización propuesto produce mejores respuestas en lazo cerrado que el controlador PID-PID sintonizado totalmente por el usuario, sino que se puede conseguir la misma respuesta con ambas sintonizaciones pero con un esfuerzo menor de cálculo, especialmente para el usuario. De tal manera que el controlador propuesto, ayuda a aquellos que son principiantes, inexpertos o estudiantes, y a aquellos que buscan prescindir de la complejidad de otros controladores.

5.2 Trabajo futuro

Se propone trabajar con la prueba de estabilidad de los controladores en cascada PID-PID y PID-PID semi sintonizable. Además aplicar el controlador propuesto a otros sistemas subactuados, como: el carro-péndulo, el sistema bola-barras, el péndulo con rueda de reacción y el sistema bicicleta.

5.3 Agradecimientos

Este trabajo es apoyado por el proyecto CONACYT 134534 y DGEST.

REFERENCIAS

- Arrieta, O., Vilanova, R., y Balaguer, P. (2008). "Procedure for Cascade Control Systems Design: Choice of Suitable PID Tunings". *Int. J. of Computers, Communications and Control*, Vol. III, No. 3, pp. 235-248.
- Åström, K. J. y Hägglund, T. (2006). "Advanced PID Control". ISBN 1-55617-942-1. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society. pp. 373-378.
- Brosilow, C.B. y Tong, M. (1978). "The structure and dynamics of inferential control systems", *AIChE J.* 24,492, pp. 156.
- Cannon, R. H. (2003). "Dynamics of Physical Systems", Capítulo 5, Sección 5, pp 159-163, Dover.
- Cesca, M. R. y Marchetti, J. L. (2005). "IMC Design of Cascade Control". *European Symposium on Computer Aided Process Engineering*. L Puigjaner and A. Espuña (Editors).
- Hang, C.C., Loh, A. P. y Vasnani, V. U. (1994). "Relay feedback auto tuning of cascade controllers," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 2.
- Kaya, I., Tan, N. y Atherton, D. P. (2007). "Improved cascade control structure for enhanced performance," vol. 17, pp. 3-16.
- Kelly, R. y Santibañez, V. (2003). "Control de Movimiento de Robots Manipuladores", Pearson Education, S.A., Madrid, ISBN:84-205-3831-0. Ingeniería general 62. pp. 187.
- Lee, Y. Park, S. y Lee, M. (1998). "PID Controller Tuning To Obtain Desired Closed Loop Responses for Cascade Control Systems". *Ind. Eng. Chem. Res.* vol. 37, pp. 1859-1865. American Chemical Society.
- Newell, R. B. y Lee, P. L. (1988). "Applied Process Control", Prentice-Hall of Australia, Brookvale, NSW, Australia, pp. 212.
- Quanser (2011). "Gyroscope Position Control-Instructor Manual", Document Number 807, Revision 1,0.
- Seborg, D. E., Edgar, T. F. y Mellichamp, D. A. (2004). "Process Dynamics and Control". Segunda Edición. Editorial John Wiley and Sons, NY. pp 412-419.
- Shinsky, F. G. (1988). "Process Control Systems", 3a ed., McGraw-Hill, New York.
- Tan, K. K., Lee, T. H. y Ferdous, R. (2000). "Simultaneous online automatic tuning of cascade control for open loop stable processes," *ISA Transactions*, vol. 39, pp. 233-242.
- Visioli, A. y Piazzi, A. (2006). "An automatic tuning method for cascade control systems", *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications Munich, Germany, October 4-6*.
- Yin, Ch., Hui, H., Yue, J. (2012). "Cascade control based on minimum sensitivity in outer loop for processes with time delay" *J. Central South University Press y Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg*, pp. 2686-2696.