

## Robots Móviles en Colaboración con Desplazamientos Caóticos

A. Y. Aguilar-Bustos, E. Bugarin

Instituto Tecnológico de Ensenada, Baja California, México  
(e-mail: [yaveni@hotmail.com](mailto:yaveni@hotmail.com); [eusebio@hotmail.com](mailto:eusebio@hotmail.com)).

**Resumen:** Este artículo presenta una propuesta de control para el seguimiento de trayectorias caóticas de dos robots móviles omnidireccionales en colaboración para aplicaciones de vigilancia o patrullaje y exploración. La propuesta garantiza un barrido completo del área vigilada o explorada y una difícil predicción de las trayectorias realizadas por los robots. Se destaca que se logra un espacio de trabajo rectangular determinado solamente a través del cambio de parámetros en los osciladores caóticos de referencia y que la ley de control incorpora un procedimiento continuo y sin permutaciones para la no colisión entre dichos robots. El objetivo de control de seguimientos de trayectorias caóticas se demuestra mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov. Finalmente, para validar lo propuesto, se presentan simulaciones con resultados satisfactorios.

*Palabras claves:* Caos, robots móviles, control de robots, seguimiento, vigilancia.

### 1. INTRODUCCIÓN

Una de las finalidades principales para el uso de robots es el logro de tareas eficaces y eficientes, muchos ejemplos de éxito se pueden observar tanto en la Robótica Industrial como en la Robótica Avanzada. Recientemente, en este último campo de la Robótica, se han estado proponiendo tareas de exploración y vigilancia mediante robots móviles, en donde es necesario que los robots cumplan al menos con los objetivos de cubrir toda un área determinada y de realizarlo de una manera impredecible (sobre todo para los casos de vigilancia o patrullaje). Para cumplir con estos objetivos se ha propuesto el empleo de sistemas caóticos (Nakamura y Sekiguchi, 2001; Rubezic *et al.*, 2004) debido a sus características de transitividad topológica, que precisamente garantizan el barrido completo de un área específica, y a su alta sensibilidad a condiciones iniciales, que incrementa la impredecibilidad del movimiento de los robots.

Trabajos relacionados que incluyen la evasión de obstáculos fijos los podemos ver en Sooraksa y Klomkarn (2010) y en Anwar (2012) en donde emplean la técnica conocida de “mapeo en espejo” para lograr dicha evasión. En Bae (2004) se presentan, además de la técnica de “mapeo en espejo”, una técnica de evasión basada en el oscilador de Van der Pol y otra mediante el “grado de riesgo”.

Ahora bien, existen tareas que no pueden ser realizadas con un solo robot o que pueden ser completadas de una mejor manera utilizando varios de ellos, lo anterior fundamenta la Robótica Móvil Colaborativa. En Cao *et al.* (1997) se describen los antecedentes de trabajos donde se emplean varios robots enfatizándose que uno de los principales problemas, en este tipo de tareas, es evitar colisiones entre ellos para lograr que se cumpla el objetivo común.

En Fallahi (2012) se describe un trabajo utilizando varios robots para cubrir un área determinada, basado en la

sincronización de sistemas caóticos y manejándose también la técnica de “mapeo en espejo” para lograr tanto la evasión de obstáculos como la no colisión entre los robots.

Cabe destacar que en los trabajos mencionados, para lograr los desplazamientos caóticos en los robots, solamente se introduce una variable caótica en sus orientaciones deseadas. En contraste, el presente artículo propone un esquema de seguimiento de trayectorias caóticas en donde se diseña una única ley de control continua (sin permutaciones ni intercambios, como ocurre con la técnica de “mapeo en espejo”), la cual garantiza que dos robots móviles omnidireccionales con ruedas sincronicen su posición con variables obtenidas de osciladores caóticos (en este caso de sistemas caóticos de Arnold) y consiguiendo que ambos robots trabajen de forma colaborativa en el barrido de un área específica evitando la colisión entre ellos. Cabe mencionar que el área de trabajo se obtiene directamente de los parámetros de los sistemas caóticos.

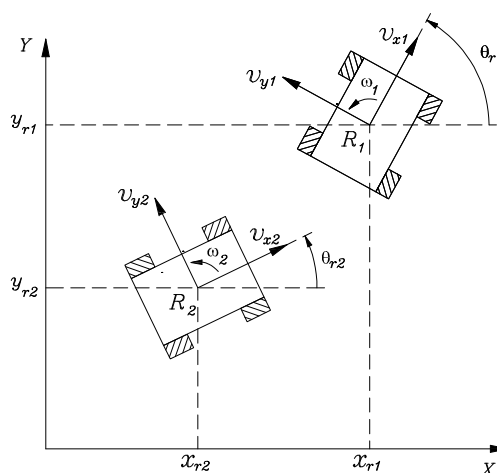


Fig. 1. Esquema del sistema robótico.

## 2. MODELO DEL SISTEMA ROBÓTICO

El sistema robótico está compuesto por 2 robots móviles omnidireccionales que se mueven en un plano fijo horizontal  $X - Y$ , según se muestra en la Figura 1.

Considérese el siguiente modelo cinemático para cada robot:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{ri} \\ y_{ri} \\ \theta_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{ri}) & -\text{sen}(\theta_{ri}) & 0 \\ \text{sen}(\theta_{ri}) & \cos(\theta_{ri}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $\xi_i = [x_{ri} \ y_{ri} \ \theta_{ri}]^T$  denota la postura (posición y orientación) del robot  $i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) y  $[v_{xi} \ v_{yi} \ \omega_i]^T$  su vector de velocidades lineales y angulares de entrada (ver Figura 1).

## 3. CONTROL DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA ROBÓTICO

### 3.1 Sistema a controlar

Para efectos del control de movimiento del sistema robótico, considérese solamente la posición de los robots, que ahora se denotará mediante

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{2x} \\ q_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r1} \\ y_{r1} \\ x_{r2} \\ y_{r2} \end{bmatrix}.$$

De manera que si

$$\begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{ri}) & -\text{sen}(\theta_{ri}) \\ \text{sen}(\theta_{ri}) & \cos(\theta_{ri}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces obtenemos el siguiente modelo a controlar:

$$\dot{q} = u \quad (3)$$

donde  $u = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2}]^T$  (ver Figura 2).

### 3.2 Señales caóticas de referencia

Ahora bien, la búsqueda es el diseño de un controlador para el seguimiento de trayectorias caóticas por parte de los robots móviles. En este sentido, se utilizará un par de osciladores de Arnold para establecer la referencia de movimiento de cada robot.

A continuación se presentan las ecuaciones dinámicas del sistema de Arnold:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1ji} &= A \text{sen} x_{3ji} + C \text{cos} x_{2ji} \\ \dot{x}_{2ji} &= B \text{sen} x_{1ji} + A \text{cos} x_{3ji} \\ \dot{x}_{3ji} &= C \text{sen} x_{2ji} + B \text{cos} x_{1ji} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $x_{ji} = [x_{1ji} \ x_{2ji} \ x_{3ji}]^T$  son los estados del sistema con  $j \in \{x, y\}$  para diferenciar el par de osciladores tanto en el robot  $i = 1$  como en el robot  $i = 2$ .  $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros constantes de los osciladores. Es bastante conocido que para valores "grandes" en el parámetro  $C$  el sistema de Arnold muestra un comportamiento caótico y que las derivadas de los estados están acotadas por los parámetros

$A$ ,  $B$  y  $C$  (Nakamura y Sekiguchi, 2001); en particular  $\dot{x}_{3ji} \leq |B + C|$ .

De esta manera, las posiciones deseadas serán definidas mediante

$$q_d = \begin{bmatrix} q_{d1x} \\ q_{d1y} \\ q_{d2x} \\ q_{d2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{dr1} \\ y_{dr1} \\ x_{dr2} \\ y_{dr2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xd} \dot{x}_{3x1} + x_{cd} \\ k_{yd} \dot{x}_{3y1} + y_{cd} \\ k_{xd} \dot{x}_{3x2} + x_{cd} \\ k_{yd} \dot{x}_{3y2} + y_{cd} \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde  $k_{xd}$ ,  $k_{yd} > 0$  son factores de escalamiento y  $x_{cd}$ ,  $y_{cd} \in \mathcal{R}$  términos de corrimientos para cubrir el área deseada. Lo anterior significa que se tienen referencias caóticas que barrerían un área rectangular con

$$x_{dri} \leq |k_{xd}(B + C)| + x_{cd} \quad (6)$$

$$y_{dri} \leq |k_{yd}(B + C)| + y_{cd}, \quad (7)$$

tanto para el robot  $i = 1$  como para el robot  $i = 2$ .

### 3.3 Controlador con procedimiento de no colisión

Primeramente, defínase el siguiente objetivo de control:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (8)$$

donde  $e(t) = [e_{1x} \ e_{1y} \ e_{2x} \ e_{2y}]^T = q_d(t) - q(t)$  es el error de seguimiento de las trayectorias caóticas deseadas para los 2 robots móviles omnidireccionales. Este objetivo de control permitiría que los dos robots trabajen de manera conjunta en la tarea de exploración, vigilancia o patrullaje de un área delimitada de acuerdo a (6) y (7).

Ahora, para que los robots no colisionen entre sí, se tomará como base la metodología presentada en Aguilar-Bustos y Bugarin (2012), en donde un procedimiento propuesto por El Kamel *et al.* (2009) de evasión de obstáculos para un solo robot ha sido utilizado.

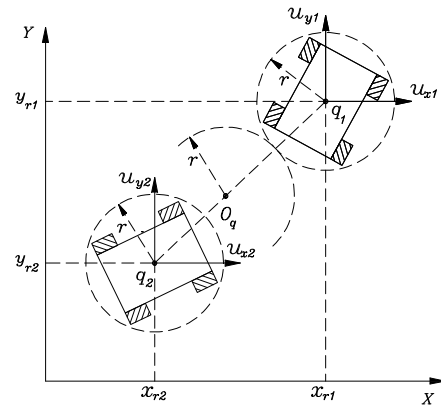


Fig. 2. Esquema para la no colisión entre robots.

De esta manera, el robot 2 tendrá el mecanismo de no colisión considerando al robot 1 como un obstáculo. Como puede observarse en la Figura 2, cada robot está encerrado por un círculo imaginario de radio  $r$ , de forma que cuando el

robot 2 se acerca al robot 1 significaría que  $q_2$  se aproxima al punto  $O_q$  localizado en la línea imaginaria que une  $q_1$  y  $q_2$  a una distancia  $2r$  de  $q_1$ . Por lo tanto, el punto  $O_q$  puede encontrarse mediante

$$O_q = q_1 + 2r \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|}. \quad (9)$$

Consecuentemente, la ley de control propuesta para cumplir con el objetivo de control (8) y la no colisión entre robots es

$$u = \dot{q}_d + Ke + u_r \quad (10)$$

donde  $K = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$  es la matriz de ganancia diagonal definida positiva y  $u_r$  es la parte dedicada a la no colisión expresada mediante

$$u_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{r2x} \\ u_{r2y} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

con

$$u_{r2x} = -\frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{2y} \quad (12)$$

$$u_{r2y} = \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{2x} \quad (13)$$

donde  $\lambda, \epsilon > 0$  y  $L(q_{2x})$  es la ecuación de la línea recta que une el punto  $q_{d2}$  con  $q_1$  evaluado en  $q_{2x}$ .

Para la prueba de estabilidad considérese la ecuación de malla cerrada del sistema obtenida al sustituir la ley de control (10) en (3):

$$\dot{q} = \dot{q}_d + Ke + u_r,$$

de manera que reacomodando tenemos

$$\begin{aligned} \dot{q}_d - \dot{q} &= -Ke - u_r \\ \dot{e} &= -Ke - u_r. \end{aligned} \quad (14)$$

Esta ecuación (14) representa la dinámica del error de seguimiento para el sistema en malla cerrada; obsérvese que es no autónoma debido a las señales de referencia no constantes. También nótese que su origen  $e_e = 0$  es su único punto de equilibrio; puesto que, primero, claramente  $e_{e_{1x}} = e_{e_{1y}} = 0$ , y luego debe verificarse que

$$0 = -k_3 e_{e_{2x}} + \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{e_{2y}}$$

$$0 = -k_4 e_{e_{2y}} - \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{e_{2x}},$$

lo cual se cumple sólo en  $e_{e_{2x}} = e_{e_{2y}} = 0$  debido a que el determinante de este sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas es igual a

$$k_3 k_4 + \left[ \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} \right]^2 > 0.$$

Continuando con la prueba de estabilidad del origen del sistema no autónomo (14), ahora considere la siguiente función candidata de Lyapunov (la cual es definida positiva, radialmente no acotada y decreciente):

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e \quad (15)$$

La derivada temporal de (15) a lo largo de las trayectorias de (14) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_{1x} \dot{e}_{1x} + e_{1y} \dot{e}_{1y} + e_{2x} \dot{e}_{2x} + e_{2y} \dot{e}_{2y} \\ &= e_{1x}[-k_1 e_{1x}] + e_{1y}[-k_2 e_{1y}] \\ &\quad + e_{2x} \left[ -k_3 e_{2x} + \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{2y} \right] \\ &\quad + e_{2y} \left[ -k_4 e_{2y} - \frac{\tanh(\lambda[q_{2y}-L(q_{2x})][q_{d2x}-q_{1x}])}{\|q_2 - O_q\| + \epsilon} e_{2x} \right] \\ &= -e^T K e < 0. \end{aligned}$$

Con lo anterior se concluye que el origen de (14) es asintóticamente estable de forma uniforme y global (ver Khalil, 2001). Esto demuestra el cumplimiento del objetivo de control (8) y que (10) es entonces una ley de control efectiva para lograr el seguimiento de las trayectorias caóticas deseadas, las cuales han sido especificadas de manera que los robots se muevan en un área delimitada por los parámetros constantes  $A$  y  $B$  en los osciladores caóticos. También se destaca que la ley de control tiene inmerso el procedimiento de no colisión propuesto por El Kamel *et al.* (2009).

Finalmente, a partir de (10) se puede encontrar  $v = [v_{xi} \ v_{yi}]^T$  (para  $i \in \{1, 2\}$ ) utilizando (2) y para el control de la orientación  $\theta_{ri}$  propóngase

$$\omega_i = -k_{\theta_i} \theta_{ri} \quad (16)$$

donde  $k_{\theta_i} > 0$  (para  $i \in \{1, 2\}$ ) para que tanto  $\theta_{r1}$  como  $\theta_{r2}$  tiendan exponencialmente a cero.

#### 4. SIMULACIONES

A continuación se detallarán simulaciones para corroborar la teoría propuesta. Los parámetros empleados en todos los sistemas de Arnold para generar las señales caóticas de referencia han sido  $A = 0.25$  y  $B = C = 0.12$ , con las siguientes condiciones iniciales:

$$x_{x1}(0) = [0.00 \ 0.00 \ 0.00]^T,$$

$$x_{y1}(0) = [0.10 \ 0.00 \ -0.01]^T,$$

$$x_{x2}(0) = [-1.00 \ -1.00 \ -1.00]^T \text{ y}$$

$$x_{y2}(0) = [0.01 \ 0.00 \ 0.12]^T.$$

Y debido a que se han utilizado  $k_{xd} = k_{yd} = 6.25$  y  $x_{cd} = y_{cd} = 0$  es que el área a cubrir o a patrullar correspondería a un cuadrado de 3 [m] por lado, es decir,  $-1.5 \leq x_{dri}, y_{dri} \leq 1.5$  [m] (para  $i \in \{1, 2\}$ ) de acuerdo a (6) y a (7); un área relativamente pequeña con la intención de realizar y comparar trabajos futuros experimentales con robots móviles académicos.

Las condiciones iniciales en las posturas de los robots fueron:

$$\xi_1(0) = [0.00 \text{ [m]} \ 0.00 \text{ [m]} \ \pi/2 \text{ [rad]}]^T \text{ y}$$

$$\xi_2(0) = [0.60 \text{ [m]} \ 0.85 \text{ [m]} \ \pi/2 \text{ [rad]}]^T.$$

Las ganancias en los controladores (10) y (16) corresponden a:

$$K = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\} \text{ y } k_{\theta_1} = k_{\theta_2} = 1,$$

utilizando  $\lambda = 1 \times 10^{12}$ ,  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  y  $r = 0.10$  [m] (lo que significa que todos los componentes en cada robot deben poderse encerrar por un círculo imaginario de 0.10 [m] de radio).

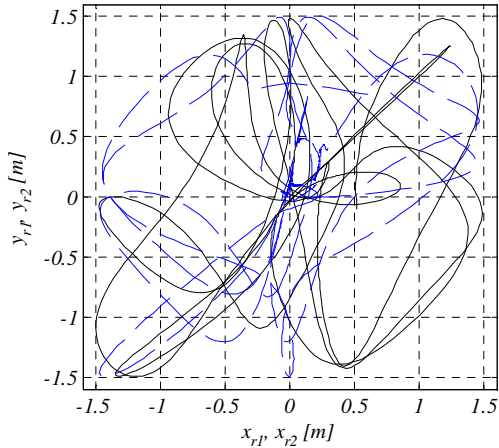


Fig. 3. Trayectorias de los robots en 300 [s] de simulación (el trazo continuo negro corresponde al robot 1 y el trazo discontinuo azul al robot 2).

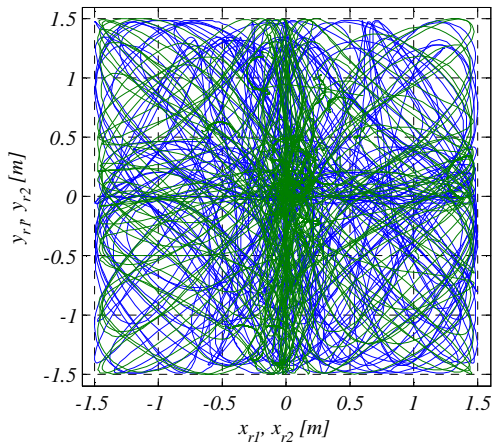


Fig. 4. Trayectorias de los robots en 3000 [s] de simulación.

La Figura 3 presenta las trayectorias de los robots en los primeros 300 [s] de simulación. Obsérvese que cada robot comienza a describir un movimiento caótico completamente diferente al del otro (también se pueden apreciar las condiciones iniciales de partida para cada robot).

Las trayectorias de los robots, ahora durante 3000 [s] de simulación, se muestran en la Figura 4. Nótese los movimientos caóticos de cada robot (en una vista a colores, el trazo azul correspondería al robot 1 y el trazo verde al robot 2) confinados completamente en un área cuadrada de 3 [m] por lado. La Figura 5 ilustra la distancia entre los robots ( $\|q_1 - q_2\|$ ) en los 3000 segundos de simulación y como

puede verse los robots efectivamente no colisionan puesto que

$$\|q_1 - q_2\| > 2r = 0.2 \text{ [m]}.$$

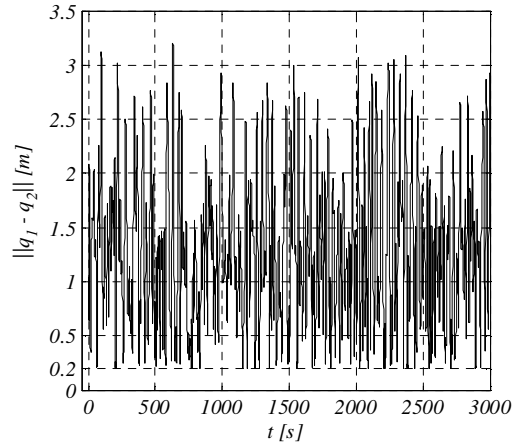


Fig. 5. Distancia entre robots.

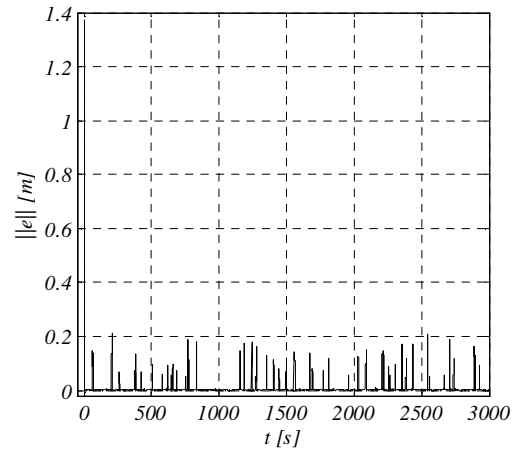


Fig. 6. Norma del error de seguimiento.

Finalmente, en la Figura 6 se puede observar la evolución contra el tiempo de la norma del error de seguimiento. La teoría demuestra que el error tiende asintóticamente a cero, lo cual se aprecia después de cada pico en la norma del error puesto que el sistema se perturba y reacciona en cada riesgo de colisión entre los robots.

Debe mencionarse que, debido al procedimiento de no colisión empleado (continuo y sin permutaciones), el robot 2 puede salirse del área de barrido deseado; es decir, en el caso en que las trayectorias deseadas para ambos robots fueran cercanas al perímetro del área cuadrada, por acción de evasión, el robot 2 podría salirse unos cuantos centímetros e inmediatamente regresar a lo determinado por las trayectorias deseadas.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una propuesta de control que cumple el seguimiento de trayectorias caóticas de dos robots móviles

omnidireccionales colaborando en aplicaciones de vigilancia o patrullaje y exploración; puesto que se garantiza un barrido completo del área vigilada o explorada y una difícil predicción de las trayectorias de los robots. Se destaca que se logra un espacio de trabajo rectangular (definido solamente mediante parámetros en los osciladores caóticos) y que la no colisión entre robots se consigue sin permutación en la ley de control. El análisis de seguimiento de las trayectorias caóticas deseadas se ha realizado mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov. Finalmente, las simulaciones presentadas muestran resultados satisfactorios, lo cual valida la metodología propuesta.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo de CONACYT México (Proyecto 166654), de PRODEP, del Tecnológico Nacional de México (antes DGEST) y del Instituto Tecnológico de Ensenada.

#### REFERENCIAS

- Aguilar-Bustos A. Y. y Bugarín E. (2013). Robot móvil con desplazamientos caóticos delimitados y evasión de obstáculos. *XV Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2012*.
- Anwar A. (2012). Performance Evaluation of Chaotic Mobile Robot Controllers. *Int. Trans. J. of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*, 3(2), 145-158.
- Bae Y. (2004) Obstacle Avoidance Method in the chaotic robot. *Digital Avionics Systems Conference. DASC 04*
- Cao Y. U., Fukunaga A. S. and Kahng A. B. (1997). Cooperative Mobile Robotics: Antecedents and Directions. *Autom. Robots* 4, 1-23.
- El Kamel M. A., Beji L., Abichou A. and Mammari S. (2009). A Novel Obstacle Avoidance Approach for Mobile Robot System Including target Capturing. In: *Intelligent Systems and Automation, 2nd Mediterranean Conference*, 249-253.
- Fallahi K. and Leung H. (2010). A Cooperative Mobile Robot Task Assignment and Coverage Planning Based on Chaos Synchronization. *Int. J. of Bif. And Chaos*, 20(1), 161-176.
- Khalil, H. (2001). *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 3ed.
- Nakamura Y. and Sekiguchi A. (2001). The chaotic mobile robot. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 17(6), 898-904.
- Rubezic V., Radulovic M., Jovanovic A. and Dakovic M. (2004). The Chaotic Mobile Robot. *WSEAS Trans. On Computers*, 3(4),959-962.
- Sooraksa P. and Klomkarn K. (2010). No-CPU chaotic robots: from classroom to Commerce. *IEEE Circuits and Syst. Magazine*, 10, 46-53.