

Promediación de un proceso de tratamiento de aguas residuales con lodos activados basado en el modelo ASM3

Cegarra, Layimar¹; Gómez, Claudia²; Márquez, Richard²; y Ríos-Bolívar, Miguel²

¹ Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (e-mail: l.cegarra@gmail.com)

² Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (e-mail: {marquez,claudiag,riosm}@ula.ve)

Resumen

El presente artículo presenta un modelo reducido no lineal del modelo ASM3, que representa esencialmente la dinámica del nitrógeno en el agua residual por lodos activados que se lleva a cabo en un único reactor en alternancia de fases (aerobia/anoxia). Este tipo de modelos puede contextualizarse en el marco de los modelos discontinuos. Por consiguiente, se presenta un modelo promedio no lineal del modelo reducido obtenido, que logra aproximar de forma satisfactoria la dinámica lenta de los modelos conmutados que representan el proceso de lodos activados. El modelo promedio obtenido, por ser un modelo continuo, permite realizar de manera más sencilla el análisis y diseño de leyes de control para el proceso biológico de lodos activados.

Palabras Clave: Lodos activados, aguas residuales, reducción de modelo, perturbaciones singulares, promediación.

1. Introducción

Según Metcalf y Eddy (1995) se entiende por agua residual a las aguas portadoras de residuos, de naturaleza residencial o industrial. El progresivo deterioro de los recursos hídricos hace que el proceso de tratamiento de aguas residuales tenga una importancia fundamental en la recuperación del agua.

Las Plantas de Tratamiento de Aguas Residuales (PTAR), tienen por objeto separar las sustancias no deseables presentes en el agua, de forma que ésta pueda ser vertida al medio ambiente mitigando su impacto. En el conjunto de PTAR, el proceso de lodos activados es la tecnología más utilizada para eliminar contaminantes orgánicos de las aguas residuales, debido a que es muy flexible, es confiable y tiene la capacidad de producir efluente de alta calidad (Mulas, 2006). El objetivo de los procesos de diseño y operación de lodos activados es crear las condiciones adecuadas para el desarrollo de la biomasa de interés (Marquot, 2006).

La gran cantidad de nitrógeno y fósforo presente en las aguas residuales es una de las principales causas de eutrofización. Una de las medidas para evitar la eutrofización es incluir tratamientos para eliminar los compuestos nitrogenados en las PTAR de acuerdo a los estándares de vertido (Alisano y col., 2009).

La eliminación biológica de nitrógeno en una PTAR, utilizando el proceso de lodos activados, se basa en la conversión de amoníaco a nitrógeno gaseoso, usando para ello microorganismos (Belandria-Carvajal y col., 2012). Se lleva a cabo en dos etapas; la primera etapa es el proceso de nitrificación en presencia de oxígeno molecular, el amoníaco es oxidado a nitrito y posteriormente a nitrato; en la segunda etapa, en ausencia de oxígeno, los microorganismos transfor-

man el nitrato en nitrógeno gaseoso, proceso que se conoce como desnitrificación en anoxia.

El tratamiento de agua residual con lodos activados puede combinar procesos en condiciones tanto aerobias como anoxias y puede llevarse a cabo en un único tanque reactor que trabajará de manera aerobia y anoxia de forma alterna (Figura 1). Su funcionamiento se describe en Belandria-Carvajal (2010).

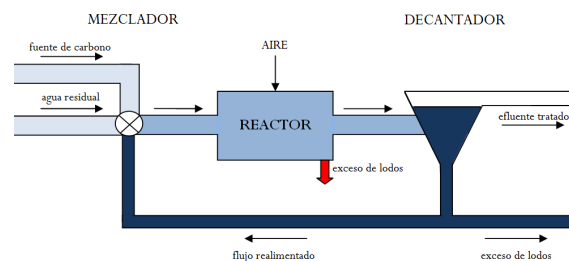


Figura 1. Esquema del proceso de lodos activados.

Varios modelos han sido desarrollados para procesos de lodos activados, pero hoy en día el más ampliamente aceptado para la descripción de la remoción biológica de nitrógeno es el modelo de lodos activados N° 3 (ASM3) (Alasino y col., 2009), presentado por la *International Association on Water Quality IAWQ* (actual *IWA*) por Gujer y col., (1999); además, este modelo corrigió ciertos defectos que habían surgido en la aplicación del modelo ASM1 (Germaey y col., 2004).

Este trabajo tiene por objetivo caracterizar modelos simplificados del proceso biológico para el tratamiento de aguas residuales para el modelo ASM3, manteniendo sólo las variables asociadas al nitrógeno, ya que el propósito final de la línea de investigación en la que se enmarca es regular la concentración de nitrógeno a la salida del decantador.

Esta investigación es parte del proyecto Nro. I-1391-13-02-A, financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Este documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe el modelo ASM3 desarrollado por Gujer y col., (1999); la sección 3 presenta la obtención de un modelo reducido no lineal del modelo ASM3, que representa esencialmente la dinámica del nitrógeno en el proceso de lodos activados; en la sección 4 se da una breve introducción a la teoría de promediación de sistemas discontinuos; la sección 5 presenta un modelo promedio de la dinámica no lineal del modelo reducido no lineal. Finalmente, se presentan las conclusiones acerca de los resultados obtenidos.

2. Modelo de lodos activados N° 3 (ASM3)

El modelo ASM3 considera 13 compuestos, divididos en siete compuestos solubles (S) y seis compuestos en partículas (X), los cuales son (Gujer y col., 1999): oxígeno disuelto (S_{O_2}), material orgánico inerte soluble (S_I), sustrato orgánico soluble fácilmente biodegradable (S_S), nitrógeno amoniacal (S_{NH_4}), nitrógeno gaseoso (S_{N_2}), nitrato (S_{NOX}), alcalinidad (S_{ALK}), materia orgánica inerte particulado (X_I), sustrato lentamente biodegradable (X_S), microorganismos heterótrofos (X_H), compuestos intracelulares acumulados por heterótrofos (X_{STO}), microorganismos autótrofos (X_A) y sólidos suspendidos (X_{SS}).

Las expresiones cinéticas del ASM3 se basan en las funciones de conmutación (ecuaciones de Monod). El modelo ASM3 considera 12 procesos de transformación, los cuales se describen con sus expresiones cinéticas respectivas en Gujer y col., (1999) y son: hidrólisis de X_S (ρ_1), almacenamiento aeróbico de S_S (ρ_2), almacenamiento anóxico de S_S (ρ_3), crecimiento aeróbico de X_H (ρ_4), crecimiento anóxico de X_H (ρ_5), respiración endógena aeróbica de X_H (ρ_6), respiración endógena anoxia de X_H (ρ_7), respiración aeróbica de X_{STO} (ρ_8), respiración anoxia de X_{STO} (ρ_9), crecimiento de X_A (ρ_{10}), respiración endógena aeróbica de X_A (ρ_{11}), respiración endógena anoxia de X_A (ρ_{12}).

La modelización del proceso está basada en el balance de materia de los componentes del proceso en el decantador, en el mezclador y en el aireador. Debido a la presencia del decantador, son necesarias hipótesis adicionales para obtener un modelo que describa el proceso en estudio (Gómez-Quintero, 2002): el líquido en el reactor está perfectamente mezclado; las reacciones biológicas ocurren solamente en el reactor; el decantador se considera perfecto. La fuente externa de carbono (S_{Sc}) se considera completamente soluble y biodegradable.

Las ecuaciones en espacio de estados del proceso de lodos activados para cada componente se presentan en Cegarra (2014). En estas ecuaciones $k_L a \neq 0$ en el período de aireación (fase aeróbica), y $k_L a = 0$ en el período de ausencia de aireación (fase de no aireación).

La programación del ASM3 se realizó utilizando el lenguaje C, con base a la estrategia de módulos de programación elaborada por Julien (1997) para el ASM1. Los datos *in silico* utilizados se obtuvieron por simulación de un proceso de lodos activados en fase alterna, con el software G.P.S.-X, desarrollado por Hydromantis Inc. La duración de las fases aerobia y de no aireación es de una hora; por lo tanto, el período del proceso es $T = 2$ h.

En Cegarra (2014) se muestra que los valores de las concentraciones de amoníaco, nitrato y oxígeno obtenidas por la simulación del modelo ASM3, son cercanos a los valores

de dichas concentraciones dados por la simulación del software G.P.S.-X.; por lo tanto, se puede concluir que el modelo ASM3 programado en C, es representativo de la dinámica del proceso de lodos activados.

3. Modelo ASM3 de orden reducido

El ASM3 permite obtener una buena representación de la evolución de las variables de estado. Sin embargo, desde el punto de vista numérico es muy difícil de utilizar para fines de identificación y control, ya que está compuesto por más de treinta parámetros y por trece ecuaciones de estado, cuyas dinámicas son no lineales y complejas.

Julien (1997) desarrolló un modelo de orden reducido del ASM1 para la identificación y control de un solo reactor de lodos activados operando en alternancia de fases (utilizando consideraciones bioquímicas), que utiliza sólo las concentraciones que estaban disponibles (amoníaco, nitrato y oxígeno). Gómez-Quintero (2002) desarrolló un modelo reducido no lineal del ASM1 orientado hacia la disminución de los niveles de nitrógeno, que garantiza las propiedades de controlabilidad y de observabilidad, y está constituido por cuatro variables de estado.

Consideraciones bioquímicas y dinámicas realizadas sobre las variables de estado y procesos del modelo ASM3, permiten la reducción del orden del modelo; éstas son:

1. S_I , X_I , S_{N_2} y X_{SS} son variables de estado que no intervienen en las ecuaciones diferenciales de las otras variables, por lo que se eliminan;

2. la alcalinidad sólo interviene en los procesos ρ_4 y ρ_5 por medio de la función ($S_{ALK}/(K_{ALK} + S_{ALK})$), y en el proceso ρ_{10} con la función ($S_{ALK}/(K_{A,ALK} + S_{ALK})$). Ambas funciones pueden ser consideradas constantes, debido a que el valor de la alcalinidad varía muy poco, y se sustituyen por los nuevos parámetros constantes β_1 y β_2 respectivamente;

3. X_H , X_A y X_{STO} no varían mucho durante un período de tiempo corto (algunos ciclos de nitrificación-desnitrificación), por lo que son reemplazadas por sus valores medios, que serán los parámetros $X_{H,C}$, $X_{A,C}$ y $X_{STO,C}$, respectivamente. Esto hace que el término $\frac{X_{STO}/X_H}{K_{STO} + X_{STO}/X_H}$, que se encuentra en los procesos ρ_4 y ρ_5 , sea un parámetro constante denominado β_3 ;

4. ρ_1 alcanza rápidamente un valor en estado estable, en el cual permanece durante el resto de los ciclos de nitrificación-desnitrificación, por lo cual esta cinética se considerará constante, denominada ρ_{1c} ; esto implica que la concentración de X_S , que sólo participa en este proceso de hidrólisis, no necesita continuarse calculando;

5. la concentración de S_{O_2in} es muy baja; por lo tanto, puede considerarse insignificante.

Las consideraciones empleadas para reducir el número de parámetros, con la finalidad de simplificar su estructura y facilitar futuras identificaciones paramétricas, son:

1. los coeficientes t_i y los parámetros $i_{SS,XI}$, $i_{SS,XS}$, $i_{SS,BM}$, ya no son necesarios, debido a que sólo intervienen en la dinámica de la concentración de X_{SS} ;

2. al reemplazar ρ_1 por un valor constante, los parámetros k_H y K_X , no se emplean en el modelo reducido;

3. no se requiere el conocimiento del valor de los parámetros asociados a la alcalinidad (K_{ALK} y $K_{A,ALK}$) y de los coeficientes estequiométricos z_i ;

4. el coeficiente y_1 , según los valores de parámetros sugeridos por Gujer y col., (1999) y Koch y col., (2000), siempre es cero; por lo tanto, los parámetros $i_{N,SI}$ e $i_{N,XS}$ no participan en el modelo reducido;

5. los coeficientes y_6, y_7, y_{11} y y_{12} , iguales a la resta de los parámetros $i_{N,BM} - f_{X_1}(i_{N,X_1})$, se pueden aproximar por $i_{N,BM}$, ya que $i_{N,BM} \gg f_{X_1}(i_{N,X_1})$; como consecuencia, el conocimiento de i_{N,X_1} y de f_{X_1} no es necesario;

6. los coeficientes x_6 y x_{11} , iguales a $(-1 + f_{X_1})$, pueden aproximarse a (-1) ; los coeficientes x_7 y x_{12} , iguales a $((f_{X_1} - 1)/2,86)$, pueden aproximarse por $(-1/2,86)$, ya que $(f_{X_1}/2,86) \gg (1/2,86)$; por lo tanto, el parámetro f_{X_1} ya no es utilizado.

Finalmente, el modelo de orden reducido se expresa por:

$$\begin{aligned} \dot{S}_S &= D_S \cdot S_{Sin} + D_C \cdot S_{Sc} - (D_S + D_C) \tilde{S}_S + \rho_{1c} - \tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_3 \\ \dot{S}_{NH_4} &= D_S \cdot S_{NH_4in} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NH_4} + i_{N,S_S} \cdot \tilde{\rho}_2 + i_{N,S_S} \cdot \tilde{\rho}_3 \\ &\quad - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_4 - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_5 + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_6 + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_7 \\ &\quad - ((1/Y_A) + i_{N,BM}) \cdot \tilde{\rho}_{10} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{11} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{12} \\ \dot{S}_{NOX} &= D_S \cdot S_{NOXin} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NOX} + \frac{(Y_{STO,NOX} - 1)}{2,86} \cdot \tilde{\rho}_3 \\ &\quad + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_5 + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_7 + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_9 \\ &\quad + (1/Y_A) \cdot \tilde{\rho}_{10} + (-1/2,86) \cdot \tilde{\rho}_{12} \\ \dot{S}_{O_2} &= -(D_S + D_C) S_{O_2} + k_{LA} (S_{O_2,SAT} - \tilde{S}_{O_2}) - (1 - Y_{STO,O_2}) \cdot \tilde{\rho}_2 \\ &\quad + (1 - (1/Y_{H,O_2})) \cdot \tilde{\rho}_4 - \tilde{\rho}_6 - \tilde{\rho}_8 + (1 - (4,57/Y_A)) \cdot \tilde{\rho}_{10} - \tilde{\rho}_{11} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\tilde{\rho}_i, i = 2, 3, \dots, 12$, son las expresiones cinéticas de los procesos de transformación para el modelo de orden reducido.

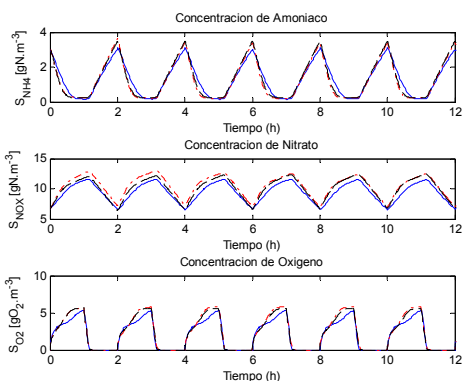


Figura 2. Comparación de las concentraciones obtenidas por medio de simulación numérica del modelo ASM3 (línea discontinua roja, -) y del modelo reducido (línea continua negra), con los datos *in silico* (línea continua azul, --).

La figura 2 muestra que las curvas de concentraciones de nitrato, amoníaco y oxígeno, obtenidas por medio de la simulación numérica del modelo reducido, son una buena representación de los datos *in silico* empleados y tienen un comportamiento muy similar a las concentraciones obtenidas utilizando el modelo ASM3; por lo tanto, el comportamiento del modelo reducido obtenido es satisfactorio.

Por otra parte, el tiempo de simulación de este modelo reducido es considerablemente inferior al correspondiente

obtenido para el modelo ASM3 completo, lo cual es una característica favorable para el primero.

4. Promediación de sistemas discontinuos por dos escalas de tiempo

En el modelado matemático de un sistema físico, la presencia de algunos parámetros parásitos, tales como pequeñas constantes de tiempo, a menudo originan el incremento del orden de los sistemas y la ocurrencia de dinámicas lentas y rápidas, que dan lugar a diferentes escalas de tiempo (Kokotovic y col., 1986).

La teoría de promediación se aplica a modelos que presentan una dinámica rápida que se desarrolla alrededor de una dinámica lenta y el objetivo es despreciar la dinámica rápida y recuperar las propiedades de la dinámica lenta (Belandria-Carvajal y col., 2012); (Khalil, 2000); (Sanders y col., 2007). Los modelos que operan en una única escala de tiempo permiten reducir la complejidad de los controladores y los requerimientos computacionales.

Considere el siguiente sistema discontinuo con dos escalas de tiempo (Sun y col., 1992):

$$\frac{dX}{dt} = \epsilon f(t, X, Y), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2)$$

$$\frac{dY}{dt} = g(t, X, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (3)$$

donde $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$ y $\epsilon > 0$ es un parámetro pequeño. Las funciones f y g son discontinuas respecto a sus parámetros; además, f es periódica en t con periodo $T > 0$.

Cuando ϵ es pequeña, la solución de la ecuación (2) puede variar lentamente con t , respecto a la fluctuación periódica de f . Si la respuesta de un sistema es mucho más lenta que la excitación, entonces tal respuesta será determinada predominantemente por el promedio de la excitación (Khalil, 2000).

Suponga que la función $\varphi(t, X, t', c_0)$ es la solución de la ecuación (3) con cualquier valor inicial $Y(t') = c_0$ y X fijo donde c_0 pertenece al dominio de definición (3). El sistema promedio de (2) y (3) es definido por (Sun y col., 1992):

$$\frac{dX_{prom}}{dt} = \epsilon f_0(X_{prom}), \quad X_{prom}(t_0) = X_0, \quad (4)$$

$$f_0(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, X, \varphi(\tau, X, t', c_0)) \cdot d\tau, \quad (t \geq t_0). \quad (5)$$

Se requiere que el límite en (5) exista de manera uniforme en t y X , y sea independiente de c_0 . Con algunos otros supuestos, el siguiente resultado se demuestra en Sun (1991):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|X(t) - X_{prom}(t)\| = 0, \quad \forall t \in [t_0, T_0/\epsilon], \quad (6)$$

donde $T_0 > 0$ es cualquier constante positiva. Es decir, la solución $X_{prom}(t)$ del sistema promediado (4) estará arbitrariamente cerca de la solución de $X(t)$ del sistema original en el intervalo de tiempo $[t_0, T_0/\epsilon]$, si ϵ es lo suficientemente pequeña. Se puede ver inmediatamente que la ecuación promediada (4) sólo dará una aproximación de la variable lenta $X(t)$. Si es necesario, sin embargo, la aproximación de la solución $Y(t)$ puede ser construida a partir de $X_{prom}(t)$, como se ha señalado en (Sun, 1991).

Para obtener un modelo promedio de orden reducido que represente la dinámica lenta de un sistema que tiene dos variables que cambian lenta y rápidamente, se puede aplicar

un método general presentado en (Sun y col., 1992), el cual consta de tres pasos, descritos de la siguiente manera (Sun y col., 2001):

1) Calcular la respuesta de las variables rápidas durante un ciclo de conmutación. Las variables lentas se supone que son constantes durante este cálculo.

2) Sustituir las variables rápidas en modelos de variables lentas con las respuestas calculadas en el paso uno. Esto elimina la dependencia de los modelos de variables lentas respecto a las variables rápidas.

3) Promediar los modelos de variables lentas desacoplados resultantes durante un ciclo de conmutación. El resultado es un modelo promediado de orden reducido para las variables lentas.

5. Modelo promedio del modelo ASM3 de orden reducido

5.1 Respuesta de las variables rápidas

En los trabajos de Julien (1997) y Belandria-Carvajal (2012), durante el estudio del modelo ASM1 de orden reducido, se observó que la dinámica del oxígeno durante la fase de no aireación tiende muy rápidamente a cero, lo cual llevó a la sustitución de la ecuación diferencial del oxígeno en la fase de no aireación por la ecuación algebraica $S_{O_2} = 0$.

Cuando el coeficiente de transferencia de oxígeno se hace cero ($k_L a = 0$), la concentración de oxígeno disuelto tiende rápidamente a cero, lo cual indica que la constante de tiempo asociada a esta variable es muy pequeña en comparación con el resto de las variables de estado.

La ecuación diferencial de la concentración de oxígeno disuelto, dada para el modelo de orden reducido obtenido (1), cuando $k_L a = 0$ resulta:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{O_2} = & \tilde{S}_{O_2} \left(-(D_S + D_C) + \frac{1}{K_{O_2} + \tilde{S}_{O_2}} \left((-1 + Y_{STO,O_2}) \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\tilde{S}_S}{K_S + \tilde{S}_S} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{Y_{H,O_2}} \right) \cdot \gamma_2 \cdot \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} - \gamma_3 - \gamma_5 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{K_{A,O_2} + \tilde{S}_{O_2}} \left(\left(1 - \frac{4,57}{Y_A} \right) \cdot \gamma_7 \cdot \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{A,NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} - \gamma_8 \right) \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Como consecuencia de los valores de los parámetros Y_{STO,O_2} , Y_{H,O_2} y Y_A , todos los términos del lado derecho de la ecuación (7) son de signo negativo, lo cual explica porque el oxígeno disuelto una vez que $k_L a$ se hace cero, presenta una dinámica rápida. Los términos $\frac{1}{K_{O_2} + \tilde{S}_{O_2}}$ y $\frac{1}{K_{A,O_2} + \tilde{S}_{O_2}}$ pueden ser sustituidos por $(1/K_{O_2})$ y $(1/K_{A,O_2})$ respectivamente, debido a que los valores de \tilde{S}_{O_2} son muy pequeños o nulos, ya que el oxígeno que quedó en el reactor es consumido rápidamente. Sustituyendo esto en (7), y separando los términos constantes y variantes, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{O_2} = & -\tilde{S}_{O_2} \left((D_S + D_C) + \frac{1}{K_{O_2}} (\gamma_3 + \gamma_5) + \frac{1}{K_{A,O_2}} (\gamma_8) \right) \\ & + \tilde{S}_{O_2} \left(\frac{1}{K_{O_2}} \left((-1 + Y_{STO,O_2}) \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\tilde{S}_S}{K_S + \tilde{S}_S} + \left(1 - \frac{1}{Y_{H,O_2}} \right) \cdot \gamma_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} + \frac{1}{K_{A,O_2}} \left(\left(1 - \frac{4,57}{Y_A} \right) \cdot \gamma_7 \cdot \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{A,NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} \right) \right) \right). \quad (8) \end{aligned}$$

En la ecuación (8), el factor resaltado es constante y siempre presenta grandes valores; por lo tanto, el pequeño parámetro positivo de perturbación ϵ es:

$$\epsilon = \frac{1}{(D_S + D_C) + \left(\frac{1}{K_{O_2}} \right) \cdot (\gamma_3 + \gamma_5) + (1/K_{A,O_2}) \cdot (\gamma_8)}, \quad (9)$$

y sustituyendo (9) en (8), la ecuación diferencial del oxígeno disuelto vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{d\tilde{S}_{O_2}}{dt} = & -\tilde{S}_{O_2} + \epsilon \cdot \tilde{S}_{O_2} \left(\frac{1}{K_{O_2}} \left((-1 + Y_{STO,O_2}) \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\tilde{S}_S}{K_S + \tilde{S}_S} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{Y_{H,O_2}} \right) \cdot \gamma_2 \cdot \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} \right) \right) \\ & + \frac{1}{K_{A,O_2}} \left(\left(1 - \frac{4,57}{Y_A} \right) \cdot \gamma_7 \cdot \frac{\tilde{S}_{NH_4}}{K_{A,NH_4} + \tilde{S}_{NH_4}} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon = 0$, la ecuación diferencial anterior se convierte en la ecuación algebraica:

$$0 = \tilde{S}_{O_2}. \quad (11)$$

5.2 Sustitución de los valores de las variables rápidas en el modelo ASM3 de orden reducido

Durante la fase de no aireación, la ecuación diferencial del oxígeno puede ser sustituida por el valor dado en la ecuación (11). Así, se puede escribir un submodelo para la fase aeróbica y otro para la fase de no aireación:

Submodelo para la fase aeróbica:

$$\begin{aligned} \dot{S}_S = & D_S \cdot S_{S,in} + D_C \cdot S_{S,c} - (D_S + D_C) \tilde{S}_S + \rho_{1c} - \tilde{\rho}_{2,1} - \tilde{\rho}_{3,1} \\ \dot{S}_{NH_4} = & D_S \cdot S_{NH_4,in} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NH_4} + i_{N,SS} \cdot \tilde{\rho}_{2,1} + i_{N,SS} \cdot \tilde{\rho}_{3,1} \\ & - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{4,1} - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{5,1} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{6,1} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{7,1} \\ & - ((1/Y_A) + i_{N,BM}) \cdot \tilde{\rho}_{10,1} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{11,1} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{12,1} \\ \dot{S}_{NOX} = & D_S \cdot S_{NOX,in} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NOX} + \frac{(Y_{STO,NOX} - 1)}{2,86} \cdot \tilde{\rho}_{3,1} \\ & + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{5,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{7,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{9,1} \\ & + (1/Y_A) \cdot \tilde{\rho}_{10,1} + (-1/2,86) \cdot \tilde{\rho}_{12,1} \quad (12) \\ \dot{S}_{O_2} = & -(D_S + D_C) \tilde{S}_{O_2} + k_{LA} (S_{O_2,SAT} - \tilde{S}_{O_2}) - (1 - Y_{STO,O_2}) \cdot \tilde{\rho}_{2,1} \\ & + (1 - (1/Y_{H,O_2})) \cdot \tilde{\rho}_{4,1} - \tilde{\rho}_{6,1} - \tilde{\rho}_{8,1} + (1 - (4,57/Y_A)) \\ & \cdot \tilde{\rho}_{10,1} - \tilde{\rho}_{11,1}. \end{aligned}$$

Submodelo para la fase de no aireación:

$$\begin{aligned} \dot{S}_S = & D_S \cdot S_{S,in} + D_C \cdot S_{S,c} - (D_S + D_C) \tilde{S}_S + \rho_{1c} - \tilde{\rho}_{2,2} - \tilde{\rho}_{3,2} \\ \dot{S}_{NH_4} = & D_S \cdot S_{NH_4,in} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NH_4} + i_{N,SS} \cdot \tilde{\rho}_{2,2} + i_{N,SS} \cdot \tilde{\rho}_{3,2} \\ & - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{4,2} - i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{5,2} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{6,2} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{7,2} \\ & - ((1/Y_A) + i_{N,BM}) \cdot \tilde{\rho}_{10,2} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{11,2} + i_{N,BM} \cdot \tilde{\rho}_{12,2} \\ \dot{S}_{NOX} = & D_S \cdot S_{NOX,in} - (D_S + D_C) \tilde{S}_{NOX} + \frac{(Y_{STO,NOX} - 1)}{2,86} \cdot \tilde{\rho}_{3,2} \\ & + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{5,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{7,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \tilde{\rho}_{9,2} \\ & + (1/Y_A) \cdot \tilde{\rho}_{10,2} + (-1/2,86) \cdot \tilde{\rho}_{12,2} \quad (13) \\ \dot{S}_{O_2} = & 0. \end{aligned}$$

Para las expresiones cinéticas de los procesos de transformación $\tilde{\rho}_{i,j}$, el subíndice $i=2,3,\dots,12$, indica el proceso y el subíndice $j = 1$ ó 2 , indica si se está en fase aeróbica o de no aireación, respectivamente.

5.2.1 Modelo conjunto discontinuo

Los submodelos para las fases aeróbica y de no aireación, pueden unirse en un único modelo de la forma (Márquez y col., 2005); (Belandria-Carvajal, 2010):

$$\dot{x} = f_{aeróbica}(x) \cdot u + f_{anoxia}(x) \cdot (1 - u), \quad (14)$$

donde $x = (\bar{S}_S, \bar{S}_{NH_4}, \bar{S}_{NOX}, \bar{S}_N, \bar{S}_{O_2})^T$, $f_{aeróbica}(x)$ y $f_{anoxia}(x)$ representan las ecuaciones (12) y (13) respectivamente; u es una variable que permite representar la alternancia entre las fases y posee valores discretos del conjunto $\{0,1\}$: el sistema en fase aeróbica se representa por $u = 1$ y en fase de no aireación por $u = 0$. Sustituyendo (12) y (13) en (14), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}_S &= D_S \cdot S_{S_{in}} + D_C \cdot S_{S_C} - (D_S + D_C) \bar{S}_S + \rho_{1c} + (-\bar{\rho}_{2,1} - \bar{\rho}_{3,1}) \cdot u \\ &\quad - \bar{\rho}_{3,2} \cdot (1 - u) \\ \dot{\bar{S}}_{NH_4} &= D_S \cdot S_{NH_{4in}} - (D_S + D_C) \bar{S}_{NH_4} + (i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{2,1} + i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{3,1} \\ &\quad - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{4,1} - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{5,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{6,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{7,1} \\ &\quad - ((1/Y_A) + i_{N,BM}) \cdot \bar{\rho}_{10,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{11,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{12,1}) \cdot u \\ &\quad + (i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{3,2} - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{5,2} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{7,2} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{12,2}) \cdot \\ &\quad (1 - u) \\ \dot{\bar{S}}_{NOX} &= D_S \cdot S_{NOX_{in}} - (D_S + D_C) \bar{S}_{NOX} + \left(\frac{Y_{STO,NOX} - 1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{3,1} \\ &\quad + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{5,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{7,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{9,1} \\ &\quad + \frac{1}{Y_A} \cdot \bar{\rho}_{10,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{12,1} \cdot u + \left(\frac{Y_{STO,NOX} - 1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{3,2} \\ &\quad + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{5,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{7,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{9,2} \\ &\quad + (-1/2,86) \cdot \bar{\rho}_{12,2} (1 - u) \quad (15) \\ \dot{\bar{S}}_{O_2} &= -(D_S + D_C) \bar{S}_{O_2} + k_{LA} (S_{O_2,SAT} - \bar{S}_{O_2}) - (1 - Y_{STO,O_2}) \cdot \bar{\rho}_{2,1} \\ &\quad + (1 - (1/Y_{H,O_2})) \cdot \bar{\rho}_{4,1} - \bar{\rho}_{6,1} - \bar{\rho}_{8,1} + (1 - (4,57/Y_A)) \\ &\quad \cdot \bar{\rho}_{10,1} - \bar{\rho}_{11,1} \cdot u \end{aligned}$$

La señal u anterior es una señal periódica, de periodo T . Para el caso estudiado, un periodo $T = 2h$ es relativamente rápido respecto a las dinámicas exhibidas por el proceso de lodos activados. Esto nos lleva a pensar si será posible separar el comportamiento periódico rápido de esta señal respecto al comportamiento lento del sistema. Nuevamente, retornamos a estudiar escalas de tiempo, en este caso, desde la óptica de promediación (*averaging* en inglés).

5.3 Promediación

Los métodos de promediación para sistemas discontinuos que presentan una o dos escalas de tiempo, han sido estudiados por varios matemáticos durante varios años (Sun y col., 1992). La idea de un modelo promedio está asociada a obtener un modelo más simple que mantenga las propiedades importantes de un sistema. Sun y col. (1992) presentaron métodos de promediación para convertidores de potencia conmutados (SPC), aplicando estos métodos a un convertidor PWM bajo un modo de conducción discontinuo (DCM). Márquez y col., (2005) emplearon la teoría de promediación para estudiar un modelo conmutado del protocolo de internet TCP (*Transmission-Control-Protocol*).

Los modelos promedio de sistemas discontinuos permiten aplicar esquemas de control desarrollados para

sistemas continuos, lo cual permite reducir la complejidad asociada al análisis y diseño de sistemas de control discontinuos.

En el trabajo de Belandria-Carvajal (2010) se presenta un novedoso modelo promedio de la dinámica no lineal del modelo reducido no lineal obtenido en Gómez-Quintero (2002), que describe el proceso de tratamiento de aguas residuales mediante lodos activados en alternancia de fases. Hasta donde llega nuestro conocimiento, no existe un modelo continuo similar al presentado en Belandria-Carvajal (2010) para esta clase de sistemas.

En la figura 2 se puede observar que el sistema presenta una dinámica rápida debida a las conmutaciones entre las fases, la cual oscila alrededor de valores promedio. Por lo tanto, como la respuesta del sistema es más lenta que la excitación originada por la alternancia de fases, la respuesta se puede determinar por el promedio de la función que determina la conmutación de las fases.

La variable u , puede verse como una señal continua a trozos y periódica, con periodo T , que puede representarse por:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } kT < t \leq kT + \mu T \\ 0, & \text{si } kT + \mu T < t \leq (k+1)T. \end{cases} \quad (16)$$

Asumiendo $u(t)$ como la función $f_0(X)$ presentada en la ecuación (5) puede escribirse como:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau) d\tau, \quad (17)$$

la cual, recordando que $T = 2$, sabemos que resulta en:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2} = 0,5. \quad (18)$$

Por lo tanto, la función promedio de $u(t)$ es $\bar{u}(t)$. Sustituyendo (18) en (15), el modelo promedio del modelo ASM3 de orden reducido viene dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}_S &= D_S \cdot S_{S_{in}} + D_C \cdot S_{S_C} - (D_S + D_C) \bar{S}_S + \rho_{1c} + (-\bar{\rho}_{2,1} - \bar{\rho}_{3,1}) \cdot \bar{u} \\ &\quad - \bar{\rho}_{3,2} \cdot (1 - \bar{u}) \\ \dot{\bar{S}}_{NH_4} &= D_S \cdot S_{NH_{4in}} - (D_S + D_C) \bar{S}_{NH_4} + (i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{2,1} + i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{3,1} \\ &\quad - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{4,1} - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{5,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{6,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{7,1} \\ &\quad - ((1/Y_A) + i_{N,BM}) \cdot \bar{\rho}_{10,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{11,1} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{12,1}) \cdot \bar{u} \\ &\quad + (i_{N,S_S} \cdot \bar{\rho}_{3,2} - i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{5,2} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{7,2} + i_{N,BM} \cdot \bar{\rho}_{12,2}) \cdot \\ &\quad (1 - \bar{u}) \\ \dot{\bar{S}}_{NOX} &= D_S \cdot S_{NOX_{in}} - (D_S + D_C) \bar{S}_{NOX} + \left(\frac{Y_{STO,NOX} - 1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{3,1} \\ &\quad + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{5,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{7,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{9,1} \\ &\quad + \frac{1}{Y_A} \cdot \bar{\rho}_{10,1} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{12,1} \cdot \bar{u} + \left(\frac{Y_{STO,NOX} - 1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{3,2} \\ &\quad + \left(\frac{1 - (1/Y_{H,NOX})}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{5,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{7,2} + \left(\frac{-1}{2,86} \right) \cdot \bar{\rho}_{9,2} \\ &\quad + (-1/2,86) \cdot \bar{\rho}_{12,2} \cdot (1 - \bar{u}) \quad (19) \\ \dot{\bar{S}}_{O_2} &= -(D_S + D_C) \bar{S}_{O_2} + k_{LA} (S_{O_2,SAT} - \bar{S}_{O_2}) - (1 - Y_{STO,O_2}) \cdot \bar{\rho}_{2,1} \\ &\quad + (1 - (1/Y_{H,O_2})) \cdot \bar{\rho}_{4,1} - \bar{\rho}_{6,1} - \bar{\rho}_{8,1} + (1 - (4,57/Y_A)) \\ &\quad \cdot \bar{\rho}_{10,1} - \bar{\rho}_{11,1} \cdot \bar{u}. \end{aligned}$$

donde \bar{S}_S , \bar{S}_{NH_4} , \bar{S}_{NOX} y \bar{S}_{O_2} son las variables de estados promedio de \bar{S}_S , \bar{S}_{NH_4} , \bar{S}_{NOX} y \bar{S}_{O_2} , respectivamente; las expresiones cinéticas del modelo promedio se denotan por $\bar{\rho}_{i,j}$, donde el subíndice $i = 2,3, \dots, 12$, indica el proceso y el subíndice $j = 1$ ó 2 , indica si se está en fase aeróbica o de no aireación, respectivamente.

En la figura 3 se presentan las primeras 48 horas de simulación del modelo promedio reducido comparadas con el modelo ASM3 y el modelo ASM3 de orden reducido; pudiéndose apreciar que la dinámica lenta de los modelos conmutados es aproximada por medio del modelo promedio. Además, se observa que el modelo promedio se estabiliza en un punto de operación específico, lo cual no ocurre con el modelo ASM3 original.

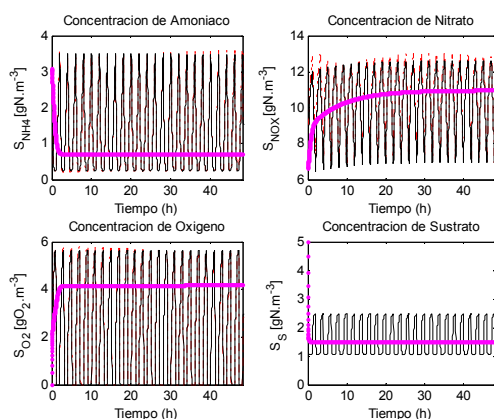


Figura 3. Comparación de las concentraciones obtenidas por medio de simulación numérica del modelo ASM3 (línea discontinua roja,-), del modelo reducido (línea continua negra) y del modelo promedio (línea gruesa morada).

El modelo promedio obtenido podrá utilizarse posteriormente para el diseño de leyes de control. En Cegarra (2014) se presenta, por ejemplo, el diseño de un Regulador Lineal Cuadrático (LQR) y un control Proporcional-Integral-Derivativo (PID) para el proceso de lodos activados, utilizando un modelo promedio lineal de orden reducido.

6. Conclusiones

En este artículo se presentó un modelo reducido no lineal del modelo ASM3, que representa la dinámica del nitrógeno en el proceso de lodos activados y está constituido por cuatro variables de estado. Por medio de simulaciones numéricas se verificó que el modelo reducido no lineal es una buena representación de la evolución de las variables de estado del proceso de lodos activados cuyo comportamiento es muy similar al obtenido utilizando el modelo ASM3.

El método de perturbaciones singulares permitió obtener un sub-modelo para la fase aeróbica y otro para la fase de no aireación, los cuales se unieron en un único modelo. Posteriormente, se presentó un modelo promedio de la dinámica no lineal del modelo reducido no lineal obtenido; las simulaciones verifican que la dinámica lenta de los modelos conmutados es aproximada por medio del modelo promedio. Este modelo permite representar las concentraciones de las variables estudiadas cuando las variables y procesos no considerados del modelo ASM3 se mantienen aproximadamente constantes.

7. Referencias

- Alasino, N., Scenna, N. y Mussati, M. (2009). *Síntesis y diseño de plantas de tratamiento de aguas residuales*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina.
- Belandria-Carvajal, M. (2010). *Control no lineal de un proceso biológico para tratamiento de aguas residuales*. Proyecto de Grado EISULA, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Belandria-Carvajal, M., Gómez-Quintero C., Márquez R. y Ríos-Bolívar M. (2012). *Modelo promedio de un proceso de lodos activados en alternancia de fases para la remoción de nitrógeno en aguas residuales*. Revista Ciencia e Ingeniería, 33 (2), 105-112.
- Cegarra, L., (2014). *Regulación de un proceso biológico para tratamiento de aguas residuales utilizando el modelo de lodos activados ASM3*. Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Gernaey, K., van Loosdrecht, M., Henze, M., Lind, M. y Jørgensen, S. (2004). *Activated sludge wastewater treatment plant modelling and simulation: state of the art*. Environmental Modelling & Software 19: 763-783.
- Gómez-Quintero, C. (2002). *Modélisation et estimation robuste pour un procédé boues activées en alternance de phases*. PhD Thesis, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du C.N.R.S, Toulouse, France.
- Gujer, W., M. Henze, M., Mino, T. y Van Loosdrecht, M. (1999). *Activated sludge model No.3*. Water Science and Technology 39(1): 183-193, Gran Bretaña, Londres.
- Henze, M., Gujer, W., Mino, T. y van Loosdrecht, M. (2000). *Activated Sludge Models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3*. IWA Publishing, Gran Bretaña, Londres.
- Julien, S. (1997). *Modélisation et Estimation pour le Contrôle d'un Procédé Boues Activées éliminant l'azote des eaux Résiduaires Urbaines*. PhD thesis, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du C.N.R.S, Toulouse, France.
- Khalil, H. (2000), *Nonlinear Systems* (3a ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Kokotovic, P., Khalil, H. y O'Reilly, J. (1986). *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. London: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Márquez, R., Altman, E., y Solé- Álvarez, S. (2005). *Time-averaging of high-speed data transfer protocols*. IEEE Trans. Automatic Control, 50(12):2065-2069.
- Marquot, A. (2006). *Modelling nitrogen removal by activated sludge on full-scale plants: Calibration and evaluation of ASM1*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour. Pau, Francia.
- Metcalf y Eddy, I. (1995). *Ingeniería de aguas residuales: Tratamiento, vertido y reutilización*. McGraw-Hill Interamericana.
- Mulas, M. (2006). *Modelling and Control of Activated Sludge Processes*. PhD thesis, Università degli studi di Cagliari. Cagliari, Italia.
- Sanders, J., Verhulst, F. y Murdock, J., (2007). *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* (2da ed.). New York: Springer.
- Sun, J. (1991). *Averaging methods for discontinuous systems with two-time scales*. BUAA Scientific Research Reports, Beijing.
- Sun, J., y Grotstollen, H. (1992). *Averaged modeling of switching power converters: reformulation and theoretical basis*, in Proc. IEEE PESC'92, pp. 1166-1172.
- Sun, J., Mitchell, D., Greuel, M. Krein, P. y Bass, R. (2001). *Averaged Modeling of PWM Converters Operating in Discontinuous Conduction Mode*, IEEE Trans. Power Electronics, vol. 16, pp. 482-492.