

Control Cartesiano de Robots Manipuladores sin Modelo Dinámico y sin Medición de Velocidad

Alejandro Gutiérrez-Giles* Marco A. Arteaga-Pérez*

* *Departamento de Control y Robótica. División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. Apdo. Postal 70-256, México, D. F., 04510, México. alejandrogilesg@comunidad.unam.mx, marteagp@unam.mx*

Resumen

Se propone un algoritmo de control para el seguimiento robusto de posición de robots manipuladores sin utilizar la cinemática inversa, sin medición de velocidad y sin utilizar el modelo dinámico del robot. El diseño está basado en los observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI, por sus siglas en inglés) y en las propiedades de pasividad de los robots manipuladores. Se garantiza acotamiento final de los errores de seguimiento y de estimación, con cotas finales arbitrariamente pequeñas. El algoritmo resultante tiene la ventaja de ser fácil de implementar y de sintonizar. Se presentan resultados experimentales para validar la efectividad del enfoque propuesto.

Keywords:

Robotic manipulators, Robust estimation, GPI Observers, Robust control, Kinematics

1. INTRODUCCIÓN

Para realizar el control de posición de robots manipuladores industriales se han reportado numerosas técnicas durante las últimas décadas. Normalmente se diseñan las trayectorias de referencia en el espacio cartesiano y se utiliza la cinemática inversa del manipulador para obtener las trayectorias correspondientes en el espacio articular. Una vez obtenidas estas trayectorias de referencia, se realiza el control en este último espacio considerando que se miden las posiciones y las velocidades articulares. Para tomar en cuenta los efectos no lineales, se utiliza el modelo dinámico del robot en el diseño de la ley de control. Si se tiene incertidumbre en los parámetros de este modelo se puede utilizar un algoritmo adaptable, como el propuesto en Slotine y Li (1987). Si no se cuenta con medición de velocidad, ésta se puede estimar mediante diferenciación numérica. Sin embargo, se ha demostrado que utilizar un observador de estados es una mejor alternativa (Arteaga, 2003). Una de las primeras propuestas para emplear un observador de estados en el control de robots manipuladores fue presentada en Nicosia y Tomei (1990). Por otra parte, si no se cuenta con el modelo dinámico es posible realizar un control robusto, aún sin medición de velocidad. Por ejemplo, en De Wit y Fixot (1991) se utiliza un observador de modos deslizantes para estimar la velocidad sin el conocimiento preciso del modelo dinámico del robot. En Qu et al. (1995) es presentado un estimador robusto que garantiza acotamiento final de los errores de seguimiento y de estimación. Por otra parte en Arteaga y Kelly (2004) un controlador robusto en conjunto con un observador lineal son utilizados para estimar la velocidad articular. Otros enfoque interesante para estimar la ve-

locidad articular sin el conocimiento exacto del modelo dinámico son los observadores de modos deslizantes de segundo orden (Davila et al., 2005).

Todos los esquemas mencionados realizan el control en coordenadas articulares (*i.e.*, requieren el cálculo de la cinemática inversa del manipulador). Es conocido que se puede prescindir de la cinemática inversa si se realiza el lazo de control directamente en coordenadas del espacio de trabajo (Murray et al., 1994). En este sentido uno de los primeros trabajos es el mostrado en Takegaki y Arimoto (1981) en el que se emplea una ley de control tipo Proporcional Derivativa (PD) que tampoco requiere conocer el modelo dinámico. Sin embargo, este esquema necesita medición de todo el estado. En Caccavale et al. (1999) y Xian et al. (2004) se realiza el control sin cinemática inversa y sin medición de velocidad. No obstante, tanto el controlador como el observador dependen del conocimiento del modelo dinámico. El problema de control en el espacio de trabajo sin medición de velocidad y sin utilizar el modelo dinámico fue resuelto en Arteaga et al. (2006) utilizando un esquema controlador-observador basado en modos deslizantes de segundo orden. Una modificación a este algoritmo se presenta en Rivera-Duenas y Arteaga-Pérez (2013) para control de fuerza en movimiento restringido.

En este artículo se aborda el problema de control de posición de un robot manipulador en movimiento libre sin medición de velocidad, sin utilizar la cinemática inversa y sin emplear el modelo dinámico del robot, utilizando los Observadores Proporcionales Integrales Generalizados (GPI, por sus siglas en inglés). Los observadores GPI fueron introducidos en Sira-Ramírez et al. (2010a) como

contraparte de los controladores GPI (Fliess et al., 2002) y consisten en un observador de estado extendido (ESO, por sus siglas en inglés) en conjunto con un observador lineal de alta ganancia. En los últimos años se ha demostrado la efectividad de los observadores GPI para el control de sistemas mecánicos (Sira-Ramírez et al., 2010b; Sira-Ramírez et al., 2013; Ramírez-Neria et al., 2013; Rodríguez-Angeles y García-Antonio, 2013), electrónica de potencia (Luviano-Juarez et al., 2010), estimación de estados (Gutiérrez-Giles y Arteaga-Pérez, 2014) y máquinas eléctricas (Cortes-Romero et al., 2009), entre otros. El enfoque basado en los observadores GPI requiere un mínimo conocimiento de la dinámica del sistema, *i.e.*, la ganancia (o matriz de ganancias) que multiplica a la entrada de control. Aunque experimentalmente se ha mostrado cierta robustez ante incertidumbre en esta ganancia, teóricamente no se demuestra hasta qué punto puede desconocerse la misma sin que el sistema en lazo cerrado pierda desempeño o se vuelva inestable. En un artículo reciente (Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles, 2014) se explotan las propiedades de energía de los robots manipuladores para prescindir del conocimiento de esta ganancia (*i.e.*, la inversa de la matriz de inercia) y por lo tanto se obtiene un controlador robusto que no depende del modelo y que estima además las variables de fase de la salida (posición). En este trabajo se realiza una modificación al método presentado en este último artículo para el problema de control de movimiento sin utilizar la cinemática inversa del manipulador. Dada su facilidad de implementación y sintonización, el algoritmo propuesto es una alternativa atractiva con respecto a los métodos reportados en la literatura.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICAS

Considérese un robot manipulador rígido de n grados de libertad. Su dinámica está dada por (Sciavicco y Siciliano, 1996)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal positiva semi-definida que contiene los coeficientes de fricción viscosa, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de torques debidos a la gravedad y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de los torques que actúan en las articulaciones. Si se consideran sólo articulaciones de revolución, se cumplen las siguientes propiedades (Arteaga-Pérez, 1998).

Propiedad 2.1. $\forall \mathbf{y}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\lambda_h \|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{y} \leq \lambda_H \|\mathbf{y}\|^2, \quad (2)$$

donde $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$, $\lambda_h \triangleq \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ y $\lambda_H \triangleq \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$. Las funciones $\lambda_{\min}(\cdot)$ y $\lambda_{\max}(\cdot)$ denotan el valor propio mínimo y el valor propio máximo de la matriz en el argumento, respectivamente. \triangle

Propiedad 2.2. Si se calcula $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ utilizando los símbolos de Christoffel del primer tipo, se cumple que la matriz $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, *i.e.*, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y}^T \left(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{y} = 0. \quad (3)$$

\triangle

Propiedad 2.3. Con la definición adecuada de los parámetros del robot, el modelo (1) puede ser escrito como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}, \quad (4)$$

donde $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es el *regresor* y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros. \triangle

Debido a que se desea realizar un control de posición directamente en coordenadas del espacio de trabajo (*i.e.*, sin calcular la cinemática inversa del manipulador), es conveniente reescribir el modelo (1) utilizando como coordenadas generalizadas las coordenadas del efector final

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n-m}$ es la posición del efector final y $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^m$ es alguna parametrización de la orientación (*e.g.*, ángulos de Euler). Se obtiene el siguiente modelo equivalente a (1)

$$\mathbf{H}_c(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_c(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_c(\mathbf{q}) = \mathbf{f}, \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{H}_c(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_c(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{J}^{-1} \quad (9)$$

$$\mathbf{g}_c(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

y $\mathbf{J} \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico del manipulador, que relaciona las velocidades articulares y cartesianas mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (11)$$

Para que este modelo sea válido es necesario que se cumpla la siguiente suposición.

Suposición 2.1. El robot no pasa por ninguna singularidad, por lo que $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ siempre existe. \triangle

Esta suposición debe tomarse en cuenta en el diseño de las trayectorias deseadas del manipulador, de tal forma que éstas no pasen cerca de las singularidades. Por otra parte, el vector de fuerzas generalizadas $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ y el vector de pares de entrada $\boldsymbol{\tau}$ están relacionados por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}. \quad (12)$$

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR-OBSERVADOR BASADO EN LOS OBSERVADORES GPI

El diseño estándar de controladores basados en observadores GPI requiere conocer la matriz de ganancias del sistema (la matriz de inercia en el caso de los manipuladores). Esto se debe a que el diseño del controlador está basado en la linealización por retroalimentación aplicada directamente al modelo (6). Un paradigma alternativo es utilizar

las propiedades de energía del modelo dinámico del robot, empleando el llamado algoritmo de Slotine–Li (Slotine y Li, 1987). Para aplicar dicho algoritmo, considérense las variables definidas como

$$\dot{\mathbf{x}}_r \triangleq \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}\mathbf{e} \quad (13)$$

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{\Lambda} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva definida, \mathbf{x}_d es el vector que contiene la posición y orientación deseadas, comparable con \mathbf{x} , por lo que a $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ se le denominará *error de seguimiento en coordenadas cartesianas*. Sustituyendo estas definiciones en el modelo (6) se obtiene

$$\mathbf{H}_c \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}_c \mathbf{s} = \mathbf{f} - (\mathbf{H}_c \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_c), \quad (15)$$

en donde se han obviado los argumentos para mayor claridad. Para las matrices \mathbf{H}_c y \mathbf{C}_c definidas por (7) y (8), respectivamente, se cumple la siguiente propiedad (Murray et al., 1994)

Propiedad 3.1. La matriz $\dot{\mathbf{H}}_c(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es anti-simétrica. \triangle

Esta propiedad permite demostrar que existe un mapeo pasivo $\mathbf{f} - (\mathbf{H}_c \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_c) \rightarrow \mathbf{s}$, con función de almacenamiento $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}_c \mathbf{s}$. Entonces, el sistema (6) puede ser estabilizado en $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ (y por lo tanto $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, logrando el objetivo de control), si se realiza una retroalimentación negativa de la salida pasiva \mathbf{s} . Es un hecho conocido que esta estrategia de control resultará en una estabilización robusta ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones afines a la entrada \mathbf{f} . Sin embargo, para lograr esto es necesario:

- Conocer el modelo dinámico del manipulador para calcular el término entre paréntesis del lado derecho de (15) y cancelarlo mediante la entrada \mathbf{f} .
- Medir la velocidad cartesiana $\dot{\mathbf{x}}$ para calcular \mathbf{s} y realizar la retroalimentación negativa de esta salida.

Estos dos problemas pueden resolverse simultáneamente utilizando los observadores GPI, como se establece en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles (2014). Para ello, considérese la dinámica del error de seguimiento en coordenadas cartesianas, dada por

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}_c \mathbf{s}) + \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{w}_1 - \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{e}}, \quad (17)$$

donde $\mathbf{e}_1 \triangleq \mathbf{e}$ y

$$\mathbf{w}_1 \triangleq -(\mathbf{H}_c \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_c). \quad (18)$$

Como es usual en el diseño de algoritmos basados en los observadores GPI, se propone un modelo interno para este término desconocido \mathbf{w}_1 , para lo que se hacen las siguientes suposiciones.

Suposición 3.1. El vector \mathbf{w}_1 puede ser localmente modelado como un vector de polinomios de Taylor dependientes del tiempo, de grado $p - 1$, más un término residual, *i.e.*,

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i t^i + \mathbf{r}_a(t), \quad (19)$$

donde \mathbf{a}_i es un vector de coeficientes constantes y $\mathbf{r}_a(t)$ es un vector de términos residuales. \triangle

Suposición 3.2. El vector $\mathbf{r}_a(t)$ y por lo menos sus primeras p derivadas con respecto al tiempo, existen¹. \triangle

Dadas las suposiciones anteriores, se puede escribir el modelo interno para la señal desconocida $\mathbf{w}_1(t)$ como

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_2 \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{w}_3 \quad (21)$$

\vdots

$$\dot{\mathbf{w}}_{p-1} = \mathbf{w}_p \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_p = \mathbf{r}_a^{(p)}(t) \quad (23)$$

Para estimar tanto el error de velocidad como la señal desconocida \mathbf{w}_1 , se propone el observador de estados

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \lambda_{p+1} \tilde{\mathbf{e}} \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 = \lambda_p \tilde{\mathbf{e}} \quad (25)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_1 = \hat{\mathbf{w}}_2 + \lambda_{p-1} \tilde{\mathbf{e}} \quad (26)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_2 = \hat{\mathbf{w}}_3 + \lambda_{p-2} \tilde{\mathbf{e}} \quad (27)$$

\vdots

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_{p-1} = \hat{\mathbf{w}}_p + \lambda_1 \tilde{\mathbf{e}} \quad (28)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_p = \lambda_0 \tilde{\mathbf{e}}, \quad (29)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}} \triangleq \mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1$ y $\lambda_0, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ son las matrices diagonales de coeficientes del vector de polinomios

$$\rho(\sigma) = \sigma^{p+2} + \lambda_{p+1} \sigma^{p+1} + \dots + \lambda_1 \sigma + \lambda_0, \quad (30)$$

con $\sigma \in \mathfrak{R}^n$. La ley de control correspondiente está dada por

$$\mathbf{f} = -\mathbf{K}_v \left(\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 + \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right) - \hat{\mathbf{w}}_1, \quad (31)$$

donde $\mathbf{K}_v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz de ganancias, positiva definida. Utilizando (16), (17), (20)–(23) y (24)–(29) se puede obtener la dinámica del error de observación

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} - \lambda_{p+1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (32)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_2 = \mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}_c \mathbf{s}) + \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{w}_1 - \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{e}} - \lambda_p \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (33)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_1 = \tilde{\mathbf{w}}_2 - \lambda_{p-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (34)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_2 = \tilde{\mathbf{w}}_3 - \lambda_{p-2} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (35)$$

\vdots

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{p-1} = \tilde{\mathbf{w}}_p - \lambda_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (36)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_p = \mathbf{r}_a^{(p)}(t) - \lambda_0 \tilde{\mathbf{e}}_1. \quad (37)$$

Combinando (32) y (33) y sustituyendo la ley de control (31) se obtiene

¹ A diferencia del enfoque basado en observadores GPI estándar, donde se asume que estas señales son acotadas, aquí sólo se asume su existencia, lo que es una suposición menos restrictiva.

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{e}}_1 + \lambda_{p+1}\dot{\tilde{e}}_1 + \lambda_p\tilde{e}_1 &= \mathbf{H}_c^{-1}(-\mathbf{K}_v\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\tilde{e}_1 \\ &\quad - \mathbf{C}_c\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{w}}_1) \\ &= \mathbf{r}_b(t) + \tilde{\mathbf{w}}_1, \end{aligned} \quad (38)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_b(t) \triangleq \mathbf{H}_c^{-1}(-\mathbf{K}_v\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\tilde{e}_1 - \mathbf{C}_c\mathbf{s}) \\ + (\mathbf{H}_c^{-1} - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{w}}_1. \end{aligned} \quad (39)$$

De (34) y (38) se puede obtener

$$\ddot{\tilde{e}}_1^{(3)} + \lambda_{p+1}\ddot{\tilde{e}}_1 + \lambda_p\dot{\tilde{e}}_1 + \lambda_{p-1}\tilde{e}_1 = \dot{\mathbf{r}}_b(t) + \tilde{\mathbf{w}}_2. \quad (40)$$

Repetiendo este procedimiento se llega finalmente a

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{e}}_1^{(p+2)} + \lambda_{p+1}\ddot{\tilde{e}}_1^{(p+1)} + \dots \\ \dots + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_1 + \lambda_0\tilde{e}_1 = \mathbf{r}_a^{(p)}(t) + \mathbf{r}_b^{(p)}(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Si se define

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_1^{(p+1)} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

se puede reescribir la dinámica (41) como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{r}}_{ab}, \quad (43)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{O} \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_{p+1} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{O} \dots \mathbf{O} \mathbf{I}]^T \quad (45)$$

y

$$\bar{\mathbf{r}}_{ab} = \mathbf{r}_a^{(p)}(t) + \mathbf{r}_b^{(p)}(t). \quad (46)$$

Teorema 3.1. (Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles, 2014) Considérese una trayectoria deseada \mathbf{x}_d acotada con al menos sus primeras $p+2$ derivadas con respecto al tiempo acotadas y la ley de control (31) en conjunto con el observador (24)–(29) en lazo cerrado con (6). Defínase una región $\mathcal{D} \in \mathfrak{R}^{n(p+1)}$ como

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{n(p+1)} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\max} \right\}, \quad (47)$$

donde y_{\max} es una constante arbitrariamente grande. Entonces, es posible encontrar una combinación en las raíces del polinomio (30) para hacer que las variables deslizantes (\mathbf{s} , $\dot{\mathbf{s}}$), los errores de seguimiento (\mathbf{e} , $\dot{\mathbf{e}}$, $\ddot{\mathbf{e}}$) y los errores de observación \mathbf{y} definidos en (42) tiendan a una vecindad arbitrariamente pequeña alrededor del origen. \triangle

La prueba de estabilidad es similar a la presentada en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles (2014) utilizando en este caso particular la Propiedad 3.1.

Comentario 3.1. Una de las ventajas del esquema propuesto con respecto a los existentes en la literatura es su facilidad de implementación y de sintonización. Para la implementación sólo se requieren (24)–(29), (31) y (12)². Para la sintonización se colocan los polos del observador (24)–(29) definidos como las raíces de (30) tan lejanos en el semiplano izquierdo del plano complejo como lo permita el ancho de banda del sistema. Las ganancias \mathbf{K}_v y $\mathbf{\Lambda}$ pueden sintonizarse como un controlador tipo Proporcional Derivativo (PD). \triangle

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El robot *A465* de *CRS Robotics* mostrado en la Figura 1 fue utilizado para validar experimentalmente el algoritmo presentado en la Sección 3. Este robot cuenta con seis grados de libertad, aunque sólo tres de ellos fueron empleados: las articulaciones 2,3 y 5, por lo que se obtiene un movimiento planar.

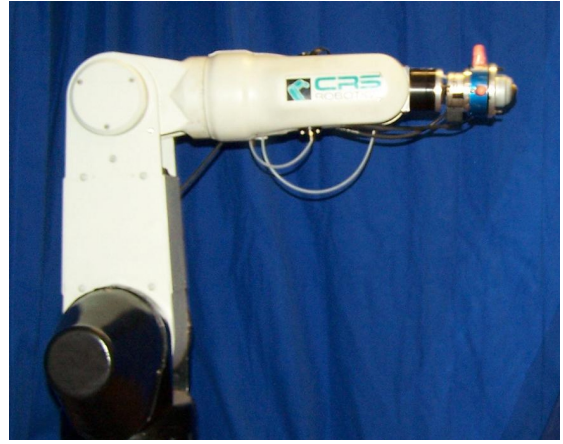


Figura 1. Robot *A465* de *CRS Robotics*.

La cinemática directa de este robot está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

donde x , y son las coordenadas cartesianas del efector final con respecto a la base y ϕ es la orientación del efector final con respecto a la horizontal. l_1 , l_2 y l_3 son las longitudes de los eslabones 1,2 y 3, respectivamente y $c_1 \triangleq \cos(q_1)$, $s_1 \triangleq \sin(q_1)$, $c_{12} \triangleq \cos(q_1 + q_2)$, $s_{12} \triangleq \sin(q_1 + q_2)$, $c_{123} \triangleq \cos(q_1 + q_2 + q_3)$ y $s_{123} \triangleq \sin(q_1 + q_2 + q_3)$. El Jacobiano analítico está dado por

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1s_1 & -l_2s_{12} & -l_3s_{123} \\ l_1c_1 & l_2c_{12} & l_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

La trayectoria deseada para las coordenadas x y y consistió en un segmento de $1/8$ de circunferencia como se muestra en la Figura 2. La coordenada x se calculó utilizando una interpolación polinomial de quinto orden del punto inicial $x_d(0) = 0.505[\text{m}]$ al punto final $x_d(t_f) = 0.421561[\text{m}]$, donde $t_f = 10[\text{seg}]$ es el tiempo total de la trayectoria.

² A diferencia de otros enfoques sin modelo dinámico aquí se utiliza \mathbf{J}^T en lugar de \mathbf{J}^{-1} , lo que representa una ventaja de cómputo.

La coordenada deseada y_d se calculó a partir de x_d utilizando la ecuación de la circunferencia. Por su parte, la orientación deseada se eligió de tal forma que apunte siempre hacia el centro de la circunferencia, resultando en $\phi_d(0) = -90^\circ$ y $\phi_d(t_f) = -45^\circ$.

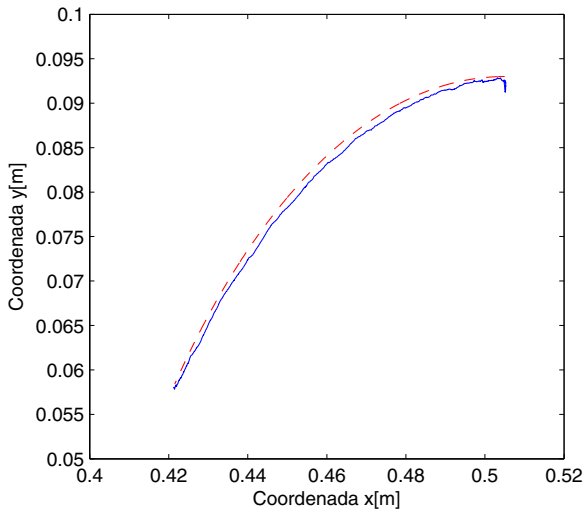


Figura 2. Trayectoria en el espacio cartesiano: deseada(---), real(—).

Las ganancias de la ley de control (31) se eligieron como $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{600, 600, 20\}$ y $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{100, 50, 25\}$. Los polos del observador se ubicaron en $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = -20$. En la Figura 3 se muestra el seguimiento en cada una de las coordenadas cartesianas en superposición con las trayectorias deseadas. Los errores de seguimiento correspondientes se muestran en la Figura 4. En esta figura puede observarse que la cota final del error de seguimiento en las coordenadas x y y es muy pequeño (menor a 1[mm]), lo que puede considerarse un buen desempeño. De igual forma la cota final para la orientación es muy cercana a 0° . En la Figura 5 se muestra una comparación entre el error de velocidad obtenido mediante la diferenciación numérica del error de posición y el error de velocidad estimado con el observador GPI propuesto. Puede verse claramente que la señal estimada por el observador GPI es menos ruidosa que la obtenida numéricamente, por lo que su empleo en la ley de control resulta en señales de control menos agresivas para los actuadores. En la Figura 6 se muestran estas señales (torques articulares), en donde se puede apreciar que, aunque el método está basado en alta ganancia, no hay amplificación de ruido.

5. CONCLUSIONES

Se presentó una modificación a un algoritmo recientemente propuesto para abordar el problema de control de movimiento de robots rígidos sin utilizar cinemática inversa. El algoritmo tiene la ventaja de no requerir medición de velocidad articular y de no utilizar el modelo dinámico del manipulador para la implementación del controlador-observador propuesto. Se garantiza sólo acotamiento final de los errores de seguimiento de posición y de estimación de estados. Sin embargo, estas cotas pueden hacerse arbitrariamente pequeñas si se utiliza alta ganancia. Los resultados experimentales muestran la validez del método. Como trabajo futuro, se extenderá el esquema propuesto

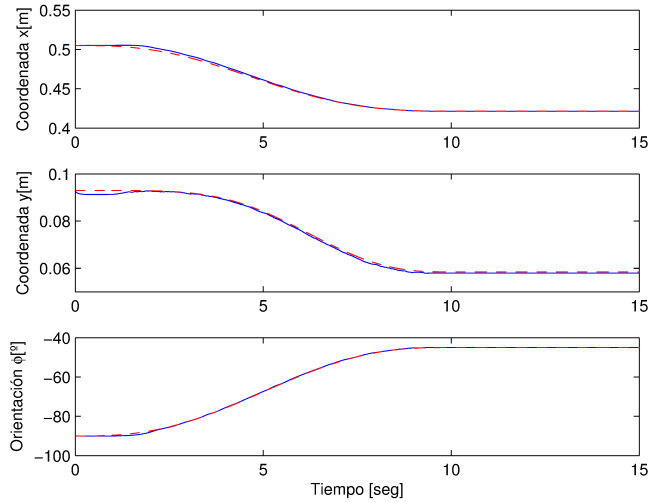


Figura 3. Seguimiento en coordenadas cartesianas: deseadas(---), reales(—).

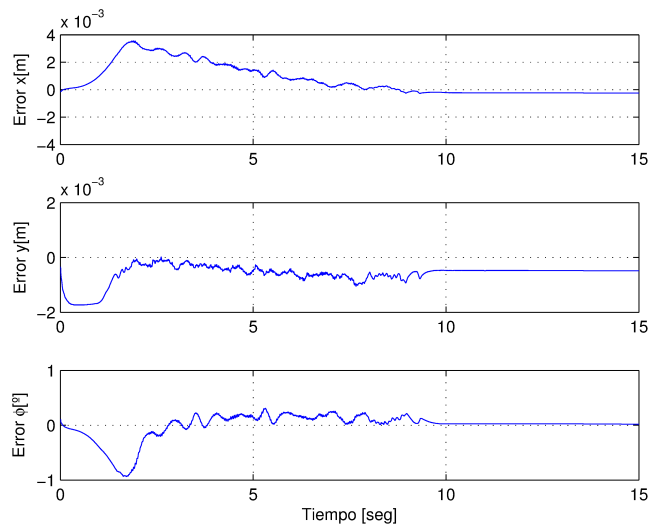


Figura 4. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas.

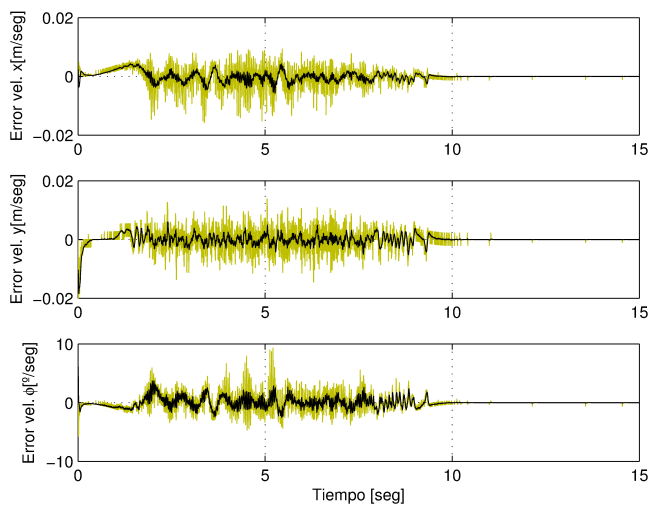


Figura 5. Estimación de los errores de velocidad: diferenciación numérica(—), observador GPI(---).

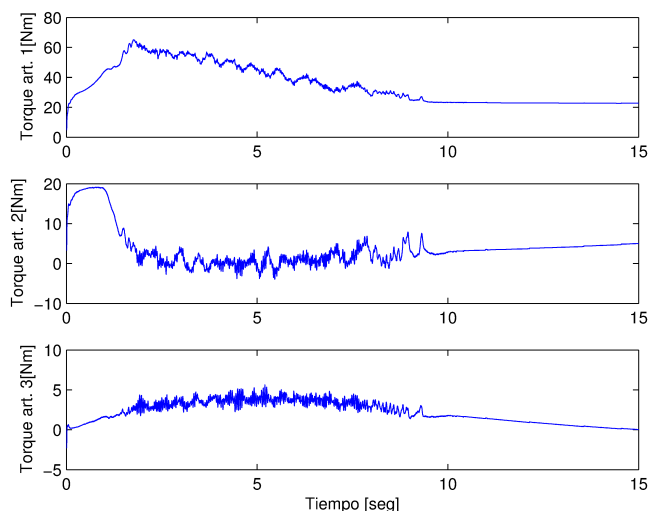


Figura 6. Señales de control (articulares).

para el control de fuerza en movimiento restringido y para el control servovisual no calibrado en coordenadas de imagen.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó dentro del proyecto **DGAPA-UNAM No. IN116314**. Alejandro Gutiérrez-Giles agradece al **Conacyt** bajo la beca doctoral con CVU No. **334785**.

REFERENCIAS

Arteaga, M.A. (2003). Robot control and parameter estimation with only joint position measurements. *Automatica*, 39(1), 67–73.

Arteaga, M.A., Castillo-Sánchez, A. y Parra-Vega, V. (2006). Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica*, 42(3), 473–480.

Arteaga, M.A. y Kelly, R. (2004). Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 20(2), 297–308.

Arteaga-Pérez, M.A. (1998). On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 120, 8–14.

Arteaga-Pérez, M.A. y Gutiérrez-Giles, A. (2014). On the GPI approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control*, 87(4), 844–860.

Caccavale, F., Natale, C. y Villani, L. (1999). Task-space tracking control without velocity measurements. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 1, 512–517. IEEE.

Cortes-Romero, J.A., Luviano-Juarez, A. y Sira-Ramirez, H. (2009). Robust GPI controller for trajectory tracking for induction motors. In *Mechatronics, 2009. ICM 2009. IEEE International Conference on*, 1–6. IEEE.

Davila, J., Fridman, L. y Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE transactions on automatic control*, 50(11), 1785–1789.

De Wit, C.C. y Fixot, N. (1991). Robot control via robust estimated state feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(12), 1497–1501.

Fliess, M., Marquez, R., Delaleau, E. y Sira-Ramírez, H. (2002). Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 7(1), 23–41.

Gutiérrez-Giles, A. y Arteaga-Pérez, M.A. (2014). GPI based velocity/force observer design for robot manipulators. *ISA Transactions*.

Luviano-Juarez, A., Cortes-Romero, J. y Sira-Ramirez, H. (2010). Synchronization of chaotic oscillators by means of generalized proportional integral observers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05), 1509–1517.

Murray, R.M., Li, Z., Sastry, S.S. y Sastry, S.S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press.

Nicosia, S. y Tomei, P. (1990). Robot control by using only joint position measurements. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(9), 1058–1061.

Qu, Z., Dawson, D.M., Dorsey, J.F. y Duffie, J.D. (1995). Robust estimation and control of robotic manipulators. *Robotica*, 13(03), 223–231.

Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R. y Luviano-Juárez, A. (2013). Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the furuta pendulum. *ISA transactions*.

Rivera-Duenas, J.C. y Arteaga-Pérez, M.A. (2013). Robot force control without dynamic model: theory and experiments. *Robotica*, 31(1), 149–171.

Rodríguez-Angeles, A. y García-Antonio, J. (2013). Active disturbance rejection control in steering by wire haptic systems. *ISA transactions*.

Sciavicco, L. y Siciliano, B. (1996). *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill.

Sira-Ramírez, H., López-Urbe, C. y Velasco-Villa, M. (2013). Linear observer-based active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian Journal of Control*, 15(1), 51–63.

Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M. y Rodríguez-Ángeles, A. (2010a). On the linear control of nonlinear mechanical systems. 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA.

Sira-Ramírez, H., Velasco-Villa, M. y Rodríguez-Ángeles, A. (2010b). Trajectory tracking control of an input delayed monocycle. 2010 American Control Conference, Baltimore, MD, USA.

Slotine, J.J.E. y Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(3), 49–59.

Takegaki, M. y Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103(2), 119–125.

Xian, B., de Queiroz, M.S., Dawson, D. y Walker, I. (2004). Task-space tracking control of robot manipulators via quaternion feedback. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 20(1), 160–167.