

Identificación paramétrica de modelos estables de edificios

M.A. García-Illescas y Luis Alvarez-Icaza

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 Coyoacán DF, México
(e-mail: illescasmg@gmial.com, alvar@pumas.iingen.unam.mx)*

Resumen: Se propone el uso de círculos de Gerschgorin para obtener condiciones de estabilidad de los modelos de edificios identificados durante la estimación de parámetros por medio de mínimos cuadrados. Las restricciones se introducen en línea en conjunto con la estimación y garantizan que los círculos de Gerschgorin de la matriz del sistema estimado se encuentren en el semiplano complejo izquierdo. Se utiliza una parametrización diferente para el modelo cuya ventaja consiste en reducir la cantidad de cálculos computacionales. Se presenta un ejemplo simulado de un edificio excitado en una dirección de desplazamiento.

Palabras clave: Estimación paramétrica, mínimos cuadrados, estabilidad, círculos de Gerschgorin

1. INTRODUCCIÓN

La estimación de los parámetros de un edificio es importante para fines de ingeniería civil: detección de daño o fallas, ciclo de vida de la estructura, diseño y mantenimiento del edificio. En el área de control automático también es importante conocer los datos de la estructura para el diseño de sistemas de control de vibraciones.

Existen varios métodos de estimación de parámetros estructurales. En Maosheng et al. (2010) emplean métodos recursivos ARX y RARX con señales sísmicas como excitación para estimar parámetros estructurales antes y después de un sismo. En Jimenez and Alvarez-Icaza (2006) se emplea un observador adaptable basado en mínimos cuadrados para recuperar parámetros, desplazamientos y velocidades. Otros trabajos como Yang et al. (2004), Benfratello et al. (2009) y Garrido and Concha (2011) consideran excitaciones desconocidas o realizan la estimación empleando señales de aceleración. En el dominio de la frecuencia se pueden obtener los parámetros modales de un edificio (Jin et al., 2005). Algunos métodos emplean herramientas en el dominio del tiempo y frecuencia, por ejemplo *wavelets*, tal es el caso de Ruzzene et al. (1997), Slavic et al. (2003) y Andersen et al. (2008) que emplean señales de excitación débiles, como el ruido ambiental.

El método de mínimos cuadrados sigue siendo empleado tanto por su relativa sencillez de implementación, como por las señales requeridas para su funcionamiento, que pueden consistir sólo en las señales de aceleración. Puede utilizar señales de ruido ambiental o señales sísmicas fuertes. Otra ventaja es su uso en línea, no se requiere hacer procesamiento de la información posteriormente. Esto permite utilizar algoritmos de estimación en línea a través de los cuales se obtienen señales de desplazamiento, velocidad y los parámetros estructurales, indispensables en aplicaciones de control de vibraciones.

Un problema con mínimos cuadrados es que aún cuan-

do el algoritmo garantiza que los parámetros estimados convergen a un valor constante, este no necesariamente es el verdadero si no hay excitación persistente. Por ello, el modelo matemático reconstruido, con los parámetros estimados, puede resultar inestable en ocasiones.

Una herramienta utilizada para fines de estabilidad son los círculos de Gerschgorin los cuales proporcionan una región o regiones donde se ubican los autovalores de una matriz. En Cepeda-Gomez and Olgaç (2013) se utilizan en aplicaciones de protocolos de consenso para sistemas multi-agentes, en Puscasu and Goras (2012) se emplean en circuitos eléctricos o redes neuronales donde los sistemas son estables pero su interconexión puede resultar inestable. En Turksoy et al. (2013) se utilizan los círculos de Gerschgorin para asegurar la estabilidad del modelo empleado en el monitoreo de glucosa de pacientes con diabetes tipo 1. En los trabajos Cohen et al. (2013) se emplean para reconstruir una función desconocida a partir de un conjunto de muestras.

En este trabajo se utilizan círculos de Gerschgorin para modificar el algoritmo de estimación por mínimos cuadrados, con el objetivo de realizar una estimación paramétrica del modelo de un edificio considerando una dirección de desplazamiento con un grado de libertad por piso. Se plantean restricciones que garantizan obtener un modelo estable y parámetros con sentido físico. La restricción de estabilidad tiene la ventaja de que no requiere calcular los autovalores de las matrices lo cual significa un ahorro computacional. Así mismo, las condiciones se pueden integrar al proceso de estimación en línea de forma sencilla permitiendo obtener un modelo estable en todo instante de tiempo. Se presenta un ejemplo con datos de simulaciones.

2. MODELO DE ESTRUCTURA CIVIL

El edificio se modela por medio de parámetros concentrados, donde en cada piso existen masa, rigidez y amortiguamiento puntuales. La Fig. 1 muestra una estructura de n pisos la cual se somete a una aceleración externa \ddot{x}_g en la base. La ecuación de equilibrio dinámico y las matrices corresponden a:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -M\ddot{X}_g \quad (1)$$

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$K_{n \times n} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

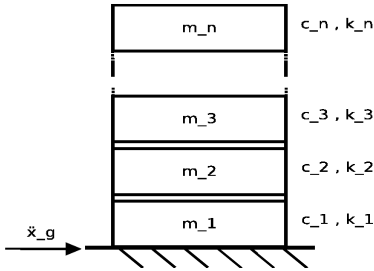


Figura 1. Edificio de n pisos

En variables de estado, el sistema queda descrito por:

$$\dot{\xi} = A\xi + \Pi\ddot{x}_g \quad (2)$$

$$A_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} 0_{n,n} & I_{n,n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} 0_{n,1} \\ -1_{n,1} \end{bmatrix}$$

donde $\dot{\xi}_{2n \times 1} = [x^T \dot{x}^T]^T$ es el estado del sistema: desplazamientos y velocidades. La salida del sistema corresponde a las aceleraciones en cada piso ya que a partir de dichas señales se pueden desarrollar observadores de estados y algoritmos de estimación paramétrica. La parametrización clásica considera la salida como el producto de un vector de parámetros $\theta = [\theta_k \ \theta_c]$ y una matriz de estados $U = [U_k \ U_c]$ dados por:

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_3}{m_3} & \cdots & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

$$\theta_c = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{c_3}{m_3} & \cdots & \frac{c_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

$$U_k = - \begin{bmatrix} x_1 & x_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,1} & x_{2,3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{3,2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

$$U_c = - \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_{2,1} & \dot{x}_{2,3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{x}_{3,2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dot{x}_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

donde $x_{a,b} = x_a - x_b$ y $\dot{x}_{a,b} = \dot{x}_a - \dot{x}_b$ por cuestiones de simplificación. El algoritmo de mínimos cuadrados es:

$$y = U\theta \quad (3a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\phi^2} \Gamma U^T \tilde{y} \quad (3b)$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{1}{\phi^2} \Gamma U^T U \Gamma \quad (3c)$$

donde las dimensiones asociadas a las matrices son: $\theta \in \mathfrak{R}^{4n-2 \times 1}$, $U \in \mathfrak{R}^{n \times 4n-2}$, $\tilde{y} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ y $\Gamma \in \mathfrak{R}^{4n-2 \times 4n-2}$.

Otra forma de parametrizar el sistema es escribiendo la salida como el producto de una matriz de parámetros y un vector de estados

$$y = \theta U \quad (4a)$$

$$\dot{\theta}^T = \frac{1}{\phi^2} \Gamma U \tilde{y}^T \quad (4b)$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{1}{\phi^2} \Gamma U U^T \Gamma \quad (4c)$$

donde $U = [x^T \ \dot{x}^T]^T$, $\theta = -[M^{-1}K, \ M^{-1}C]$. La ventaja de esta última parametrización está en el tamaño de la matriz de covarianza $\Gamma \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$. La Fig. 2 muestra la cantidad de elementos de la matriz Γ empleando ambas parametrizaciones. Esta ventaja aumenta dramáticamente cuando el número de grados de libertad por piso es mayor que uno.

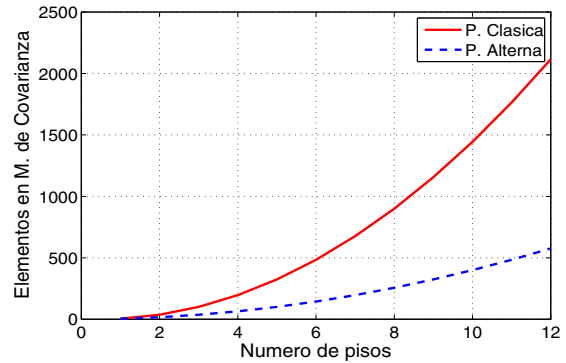


Figura 2. Elementos en matriz de covarianza

3. RESTRICCIONES DE ESTABILIDAD

3.1 Círculos de Gerschgorin

Los círculos de Gerschgorin indican una región sobre la cual se encuentran los autovalores de una matriz. Dichos círculos se forman para cada renglón o columna de la matriz. El centro del mismo c_x corresponde al elemento de la diagonal, por ejemplo para el renglón j , $c_j = A_{j,j}$ mientras el radio r_x del se calcula como:

$$r_j = \sum_{i=1}^n |A_{j,i}| \quad \forall i \neq j$$

Como las matrices $M^{-1}K$ y $M^{-1}C$ son tridiagonales y satisfacen que el producto $\bullet(i, j) \bullet(j, i) > 0$, sus autovalores son reales. Así, los autovalores de $M^{-1}K$ y $M^{-1}C$ se encuentran en el eje horizontal dentro de los círculos de Gerschgorin.

3.2 Condiciones de estabilidad

La matriz A del sistema de la Ec.(1) satisface la ecuación:

$$A^2 + M^{-1}C_D A + M^{-1}K_D = 0 \quad (5)$$

donde:

$$\begin{aligned} M^{-1}C_D &= \text{diag}\{M^{-1}C, M^{-1}C\} \\ M^{-1}K_D &= \text{diag}\{M^{-1}K, M^{-1}K\} \end{aligned}$$

Si la masa en cada uno de los pisos es la misma, esto es:

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n$$

entonces $M^{-1}C_D A = AM^{-1}C_D$ y los autovalores del sistema se pueden obtener por medio de la siguiente expresión matricial:

$$\Lambda = \frac{-M^{-1}C_D \pm \sqrt{M^{-1}C_D M^{-1}C_D - 4M^{-1}K_D}}{2} \quad (6)$$

De la Ec. (6) se puede establecer que si:

$$M^{-1}C_D M^{-1}C_D - 4M^{-1}K_D < 0 \quad (7)$$

los autovalores del sistema son complejos conjugados.

En general, las masas de los pisos son distintas y no se cumple: $M^{-1}C_D A = AM^{-1}C_D$ por lo tanto la Ec. (6) no se puede aplicar para obtener los polos del sistema, pues hay variación en la parte real de las raíces. No obstante, la Ec. (6) representa una buena aproximación a los autovalores de A . Además, si la restricción (7) se preserva, los autovalores son complejos conjugados y su parte compleja está dada por la raíz cuadrada del lado izquierdo de la Ec. (7).

La magnitud de los términos de rigidez es mucho mayor a la de los de amortiguamiento, por ello la restricción (7) se satisface con relativa facilidad. Los casos donde dicha restricción no se cumple ocurren durante el proceso de estimación cuando los valores iniciales de los parámetros estimados son cero o, cuando debido a la selección inicial de la matriz de covarianza, los parámetros estimados tienen grandes variaciones al iniciar el proceso de estimación.

Para forzar que la restricción (7) se cumpla en todo instante de tiempo, es que se emplean los círculos de Gerschgorin. Sean dos matrices tridiagonales T_1 y T_2 , donde se cumple que sus elementos $\bullet(i, j) \bullet(j, i) > 0$ y sean los renglones x de ambas matrices:

$$R_{x_{T_1}} = [0, 0, \dots, -a, c, -b, \dots, 0, 0]$$

$$R_{x_{T_2}} = [0, 0, \dots, -d, f, -e, \dots, 0, 0]$$

donde $a, b, c, d, e, f > 0$ y se cumple: $c = a + b$, $f = d + e$. Entonces si:

$$d > a \quad (8)$$

$$e > b \quad (9)$$

al sustraer ambos renglones se obtiene:

$$R_{x_{T_1-T_2}} = [0, 0, \dots, -a + d, c - f, -b + e, \dots, 0, 0]$$

donde $c - f = -(-a + d - b + e)$ y se satisface:

$$c - f < 0 \quad (10)$$

$$-a + d > 0 \quad (11)$$

$$-b + e > 0 \quad (12)$$

Estas desigualdades implican la presencia de un círculo de Gerschgorin con un centro menor que cero y un radio de igual magnitud al centro. Como esto se satisface para todo renglón de las matrices T_1 y T_2 , la resta de las matrices genera una matriz con círculos de Gerschgorin en el semiplano izquierdo cuyo radio por renglón es igual al centro. Con esto se garantiza que la matriz resultante es negativa semi-definida. También, por construcción, la matriz resultante es tridiagonal y como sus elementos cumplen $\bullet(i, j) \bullet(j, i) > 0$, preserva autovalores reales.

Considerando $M^{-1}C_D = C_M$, $M^{-1}K_D = K_M$, la restricción (7) se reescribe como:

$$C_M^2 - 4K_M < 0 \quad (13a)$$

$$C_M^2 < 4K_M \quad (13b)$$

Los autovalores de K_M^2 satisfacen $\lambda_j(C_M^2) = \lambda_j(C_M)^2$. Al usar los círculos de Gerschgorin, se concluye que el mayor autovalor de C_M corresponde al máximo elemento de la diagonal principal $D_x = \text{diag}(C_M)$ multiplicado por dos, es decir:

$$\lambda_{\max}(C_M) = 2\max(\text{diag}(C_M)) \quad (14)$$

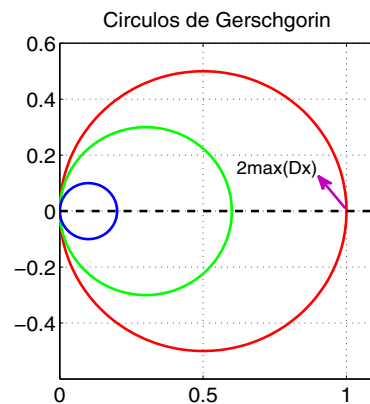


Figura 3. Círculos de Gerschgorin

Se establece la siguiente cota:

$$\lambda(C_M)^2 I \leq \lambda_{max}(C_M) C_M \quad (15)$$

La restricción (13) se puede escribir como:

$$C_M^2 \leq \lambda_{max}(C_M) C_M < 4K_M$$

Así, se comparan dos matrices con estructura tridiagonal, es decir: $\lambda_{max}(C_M)C_M$ y K_M . De esta forma, si para el i -ésimo renglón de la matriz K_M se cumple:

$$K_{M(i,i+1)} > (2max(diag(C_M)))^2 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (16a)$$

$$K_{M(i,i-1)} > (2max(diag(C_M)))^2 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (16b)$$

como resultado se obtienen círculos de Gerschgorin en el semiplano izquierdo que garantizan autovalores reales y negativos. Así, la parte asociada a la raíz cuadrada en la Ec. (6) fuerza los polos del sistema a ser complejos conjugados, lo cual ocurre de forma natural en un sistema mecánico como un oscilador armónico. Es de señalar que las restricciones anteriores son globales, es decir, se comparan los elementos de K_M con respecto a un solo valor de M_C . La comparación entre las matrices puede hacerse por renglones lo cual restringe menos los elementos de K_M a cambio de un mayor costo computacional.

La Ec. (6) proporciona una aproximación de los autovalores del sistema y los descompone en la suma de dos matrices, una real y una imaginaria. De ser diagonales estas matrices, los autovalores podrían obtenerse desacoplando ambas matrices y obteniendo la parte real de los valores propios solamente de $M^{-1}C$. Debido a que las matrices no son diagonales o no se pueden diagonalizar con la misma transformación, existe un efecto de acoplamiento lo cual origina un desplazamiento α en la parte real de los autovalores. Como ya se mostró que los círculos de Gerschgorin de $M^{-1}C$ tienen un centro de igual magnitud al radio, en el peor caso se pueden tener autovalores con parte real igual a cero, es decir, un sistema marginalmente estable.

Con el objetivo de afrontar el efecto de acoplamiento de las matrices y evitar que los círculos de Gerschgorin de la matriz de amortiguamiento toquen el origen, se propone forzar un amortiguamiento mínimo.

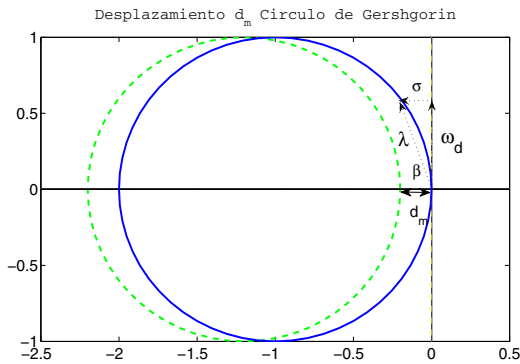


Figura 4. Amortiguamiento mínimo

En la Fig. 4 se observa el amortiguamiento es el coseno del ángulo β . Para garantizar un amortiguamiento mínimo

$\zeta_{min} = \zeta_m$, se evalúa la siguiente expresión:

$$d_m = \cos(\zeta_m) |\lambda_i| \quad (17)$$

donde $\lambda_i = -\sigma_i \pm j\omega_{d_i}$ representa un valor propio complejo conjugado. La distancia d_m es la distancia a recorrer cada centro de los círculos de Gerschgorin multiplicando la diagonal principal de $M^{-1}C$ por una ganancia o vector de ganancias apropiado $1 + \epsilon$, con $\epsilon > d_m$ cercano a cero. En las simulaciones se ilustra este ajuste.

La forma de realizar la estimación paramétrica con las condiciones de estabilidad propuestas queda determinada por los siguientes pasos:

1. La estructura tridiagonal de las matrices $M^{-1}K$ y $M^{-1}C$ se preserva. Se multiplica la matriz de parámetros estimados punto a punto por una matriz tridiagonal unitaria.

2. Se garantiza los parámetros cumplan:

$$\frac{k_i}{m_i}, \frac{k_i}{m_{i-1}} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (18a)$$

$$\frac{c_i}{m_i}, \frac{c_i}{m_{i-1}} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (18b)$$

3. Se comprueba si se cumple la restricción (16), la cual asegura que se satisface (7). Si no se cumple se multiplica cada renglón de C_M por una ganancia $g \in (0, 1)$. Se disminuyen los valores de amortiguamiento a fin de evitar un incremento en cada iteración de las constantes de rigidez.
4. Se evalúa la expresión (17) y se multiplica la diagonal principal de $M^{-1}C$ por una ganancia recorriendo una distancia d_m los centros de los círculos de Gerschgorin.

4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Se tiene un edificio de seis pisos cuyos datos corresponden a:

$$m = [98.3, 98.3, 98.4, 97.4, 92.5, 90.2] \quad [kg]$$

$$c = [120, 120, 127, 118, 125, 118] \quad [Ns/m]$$

$$k = [5.1, 4.48, 5.16, 8.78, 5.89, 5.7] * 10^5 \quad [N/m]$$

y una señal sísmica del temblor de 1985 en Santiago, Chile (ver Fig. 5), con una aceleración pico de $2 [m/s^2]$ y una frecuencia fundamental en $2.5 [Hz]$.

Para demostrar las restricciones permiten tener un modelo estable, se presentan resultados de estimación a partir de condición inicial cero en los parámetros estimados. Se muestran las matrices $M^{-1}K$ y $M^{-1}C$ estimadas al final del proceso. Las matrices $\widehat{M^{-1}K}_{sr1}$ y $\widehat{M^{-1}C}_{sr1}$ se obtienen cuando no se aplican restricciones de estabilidad (sr) y las matrices $\widehat{M^{-1}K}_{cr1}$ y $\widehat{M^{-1}C}_{cr1}$ se obtienen cuando sí se aplican estas restricciones (cr).

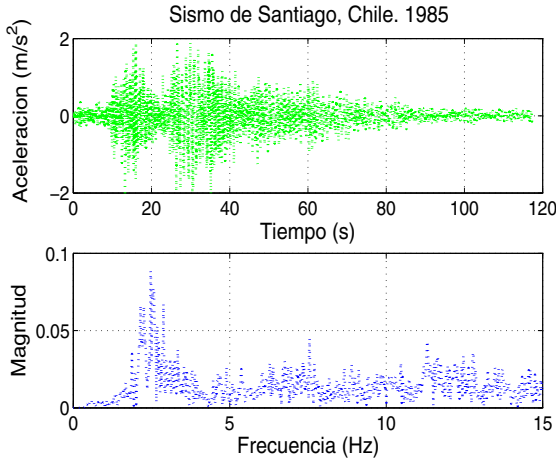


Figura 5. Sismo Santiago, Chile 1985

$$\widehat{M^{-1}K_{sr1}} = \begin{bmatrix} 16.7 & 24.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.1 & 35.1 & 41.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40.8 & 53.7 & 58.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 58.4 & 65.5 & 72.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 72.0 & 83.0 & 89.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 88.8 & 96.7 \end{bmatrix} [N/m]$$

$$\widehat{M^{-1}C_{sr1}} = \begin{bmatrix} 6.0 & 12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.8 & 10.1 & 13.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.5 & 11.9 & 13.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.6 & 13.1 & 14.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.2 & 13.7 & 14.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.1 & 13.9 \end{bmatrix} [Ns/m]$$

$$\widehat{M^{-1}K_{cr1}} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.49 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & -0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.55 & -0.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.37 & -0.22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.17 & 1.85 \end{bmatrix} [kN/m]$$

$$\widehat{M^{-1}C_{cr1}} = \begin{bmatrix} 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.19 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0.23 \end{bmatrix} [Ns/m]$$

La Fig. 6 muestra el error de aceleración en el sexto piso del edificio empleando los parámetros estimados $\hat{\theta} = [\widehat{M^{-1}K_{sr1}} \ \widehat{M^{-1}C_{sr1}}]$, se observa un error cercano a cero entre la señal de salida estimada y la real. Sin embargo, los parámetros estimados presentan valores de magnitud y orden muy diferentes a los reales.

A partir de la siguiente condición inicial:

$$\hat{\theta}_i = 0.5 * [M^{-1}K \ M^{-1}C]$$

se obtienen los parámetros estimados:

$$\begin{bmatrix} \widehat{M^{-1}K_{sr2}} & \widehat{M^{-1}K_{sr2}} \\ \widehat{M^{-1}K_{cr2}} & \widehat{M^{-1}K_{cr2}} \end{bmatrix}$$

sin las restricciones de estabilidad (*sr2*) y con ellas (*cr2*) que se muestran a continuación.

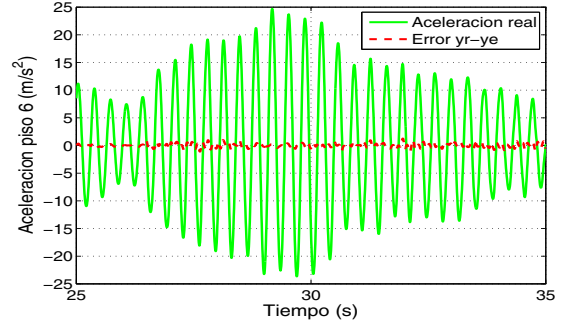


Figura 6. Aceleración Piso 6 (m/s^2)

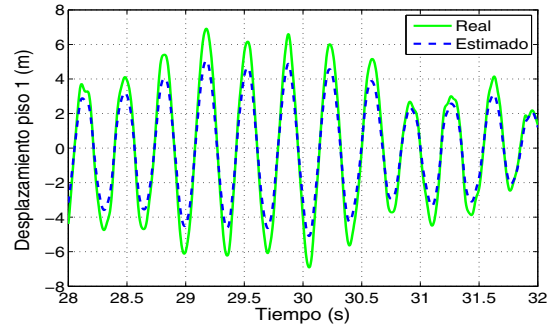


Figura 7. Desplazamiento Piso 1 (m)

$$\widehat{M^{-1}K_{sr2}} = \begin{bmatrix} -4.92 & 2.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.23 & -4.95 & 2.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.58 & -7.12 & 4.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.47 & -7.56 & 2.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.15 & -6.31 & 3.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.10 & -3.23 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M^{-1}K_{cr2}} = \begin{bmatrix} -5.18 & 2.20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.16 & -5.33 & 2.90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.43 & -7.67 & 4.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.27 & -8.17 & 3.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.92 & -6.88 & 3.62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.43 & -3.60 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M^{-1}C_{sr2}} = \begin{bmatrix} -1.22 & 0.60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.60 & -1.26 & 0.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.64 & -1.25 & 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.59 & -1.25 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.66 & -1.32 & 0.63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.64 & -0.66 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M^{-1}C_{cr2}} = \begin{bmatrix} -1.29 & 0.59 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.60 & -1.32 & 0.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.64 & -1.29 & 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62 & -1.28 & 0.60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70 & -1.34 & 0.57 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.62 & -0.66 \end{bmatrix}$$

Las unidades de los elementos asociados a la rigidez y amortiguamiento son $[kN/m]$ y $[Ns/m]$, respectivamente. La ganancia que garantiza un amortiguamiento mínimo de 0.2% es de 1.03, es decir, se aumenta en un 3% el valor de los coeficientes de amortiguamiento. En las matrices se observa que existen diferencias en ambos casos en la estimación paramétrica. No obstante, la diferencia no es sustancial y puede reducirse si las restricciones de estabilidad se introducen con una función como la tangente

Cuadro 1. Máximo valor de parte real de los valores propios identificados.

$\max(\sigma_i) SR$ $\hat{\theta}_i = 0$	$\max(\sigma_i) CR$ $\hat{\theta}_i = 0$	$\max(\sigma_i) SR$ $\hat{\theta}_i = 0.5\theta_r$	$\max(\sigma_i) CR$ $\hat{\theta}_i = 0.5\theta_r$
$7.6 * 10^{-9}$	-0.57	-0.03	-0.04

hiperbólica o función decreciente, es decir de forma menos abrupta.

La Fig. 7 muestra la señal de desplazamiento del primer piso cuando se utiliza el modelo estimado, obtenido con las restricciones de estabilidad propuestas, en comparación al desplazamiento real. Se observa una atenuación debido al amortiguamiento mínimo que se propone.

El cuadro 1 muestra el valor máximo de la parte real, de los autovalores identificados en los casos con condición inicial de cero, $\hat{\theta}_i = 0$, y diferente de cero, $\hat{\theta}_i = 0.5\theta_r = 0.5[M^{-1}K M^{-1}C]$, en los parámetros estimados. Se muestra el resultado con las condiciones de estabilidad propuestas.

5. CONCLUSIONES

Se presentó un método para garantizar la estabilidad durante el proceso de estimación de parámetros en un edificio a través del método de mínimos cuadrados. La estabilidad se consigue al introducir restricciones en la ley de adaptación que se dedujeron a partir de las propiedades de los círculos de Gerschgorin. Las simulaciones presentadas muestran que se logra tener un modelo estable a partir de una identificación con condiciones iniciales nulas en los parámetros estimados. Si la condición inicial se hace con base en información a priori sobre el valor de los parámetros, los modelos estimados con restricciones y sin restricciones de estabilidad no son tan distintos entre sí, aunque en este último caso se siguen obteniendo modelos inestables en ocasiones. En ambos casos se obtiene buena reproducción de las aceleraciones.

6. TRABAJO A FUTURO

El problema de identificación de modelos estables en modelos de edificios tiene mayor relevancia cuando se considera el modelos de edificios con tres grados de libertad por piso. Por ello, es necesario explorar maneras de imponer las restricciones de forma tal que se acelere lo más posible el proceso de búsqueda de los parámetros del modelo. Es posible explorar el uso de funciones hiperbólicas, sigmoides, etc., que permitan introducir gradualmente las restricciones de estabilidad.

La parametrización utilizada tiene como ventaja una disminución en los requerimientos computacionales. Sin embargo, se puede existir sobre-parametrización del sistema y por ello necesidad de mayor riqueza en las señales de excitación.

7. AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se realizó con el apoyo del proyecto UNAM-PAPIIT IN109414.

REFERENCIAS

- Andersen, P., Brincker, R., Ventura, C., and Cantieni, R. (2008). *Modal Estimation of Civil Structures Subject to Ambient and Harmonic Excitation*.
- Benfratello, S., Cavaleri, L., and Papia, M. (2009). Identification of stiffness, dissipation and input parameters of multi degree of freedom civil systems under unmeasured base excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(2), 190 – 198.
- Cepeda-Gomez, R. and Olgaç, N. (2013). Exact stability analysis of second-order leaderless and leader-follower consensus protocols with rationally-independent multiple time delays. *Systems & Control Letters*, 62(6), 482–495.
- Cohen, A., Davenport, M.A., and Leviatan, D. (2013). On the stability and accuracy of least squares approximations. *Foundations of Computational Mathematics*, 13(5), 819.
- Garrido, R. and Concha, A. (2011). Parametric identification of seismically excited buildings using acceleration measurements. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2011 8th International Conference on*, 1–6.
- Jimenez, R. and Alvarez-Icaza, L. (2006). A state observer for a building with a magneto-rheological damper and parameter uncertainty. In *American Control Conference, 2006*, 6 pp.–.
- Jin, G., Sain, M., and Spencer, B. (2005). Frequency domain system identification for controlled civil engineering structures. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 13(6), 1055–1062.
- Maosheng, G., Jing, S., Kashima, T., and Lili, X. (2010). Application of arx and rax methods in structural parameter identification. In *Information and Computing (ICIC), 2010 Third International Conference on*, volume 1, 85–88.
- Puscasu, P. and Goras, L. (2012). Nonideal behavior of a class of cellular neural networks. In *Semiconductor Conference (CAS), 2012 International*, volume 2, 393–396.
- Ruzzene, M., Fasana, A., Garibaldi, L., and Piombo, B. (1997). Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2), 207 – 218.
- Slavic, J., Simonovski, I., and Boltezar, M. (2003). Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data. *Journal of Sound and Vibration*, 262(2), 291 – 307.
- Turksoy, K., Bayrak, E., Quinn, L., Littlejohn, E., and Cinar, A. (2013). Guaranteed stability of recursive multi-input-single-output time series models. In *American Control Conference (ACC), 2013*, 77–82.
- Yang, J., Pan, S., and Lin, S. (2004). Identification and tracking of structural parameters with unknown excitations. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 5, 4189–4194 vol.5.