Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014
Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México

Sobre el conjunto de soluciones del problema del control admisible de un sistema lineal con control acotado

Abdon E. Choque Rivero
Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Edificio C–3, C.U., 58040, Morelia, Mich., México
abdon@ifm.umich.mx

Hugo Paredes Barra
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Universidad Nacional Autónoma de México
hugopb@matmor.unam.mx

***Resumen*— El problema del control admisible de un sistema lineal (SL) con control acotado en tiempo T consiste en lo siguiente: dado una condición inicial x_0 del espacio fase y un conjunto de controles continuos a trozos (CCT) en el intervalo $[0,T]$ con valores en un compacto en el espacio de controles, hallar *todo* el conjunto de CCT acotados tales que la trayectoria del sistema comience en x_0 y alcance el origen en tiempo T. En el presente trabajo resolvemos parcialmente este problema para un SL determinado.**

I. Introducción

Sean A y B matrices reales constantes de dimensiones $m\times m$ y $m\times r$, respectivamente. La notación A^* significa transpuesta de la matriz A. Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in R^m, \quad u \in \Omega \subset R^r, \tag{1}$$

donde Ω es un compacto en $\mathbb{R}^r$ y representa la imagen del conjunto de *controles admisibles*, es decir, funciones continuos a trozos definidos en $[0,T]$.

Definición 1: El sistema lineal (1) se llama 0–controlable en $D \subset \mathbb{R}^m$ en tiempo T, si para cualquier $x \in D$ existe un control admisible $u : [0,T] \to \Omega \subset \mathbb{R}^r$ tal que traslada x al origen en tiempo T.

Para el sistema (1) son relevantes los siguientes problemas:
a) Determinar la 0–controlabilidad local (es decir cuando D es una vecindad del origen) y global (para $D = \mathbb{R}^r$) del sistema (1).
b) Problema del control admisible (CA): Dado un sistema determinado de la forma (1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y un conjunto de restricción dado Ω, determinar *todo* el conjunto de controles admisibles $\{u_{x_0}(t)\}$ tales que la trayectoria $x(t)$ del sistema $\dot{x} = Ax + Bu_{x_0}(t)$ comienza en $x(0) = x_0$ y termina en el origen en tiempo T, es decir, $x(T) = 0$.
c) Problema de control óptimo (CC): si al problema CA se añade un funcional $J(x,u)$ el cual es necesario minimizar o maximar.

Nótese que para $\Omega = \mathbb{R}^r$, es decir, cuando no existen restricciones en el control, el inciso **a**) se resuelve mediante el conocido criterio del rango de Kalman (R.E. Kalman, Y.-C.Ho, and K.S. Narendra, 1963). El inciso **b**), en caso de que el sistema (1) sea controlable en $\mathbb{R}^m$ lo resuelve, por ejemplo, el control

$$u(t) = -B^* e^{-A^* t} N^{-1}(T) x_0 \tag{2}$$

donde $N(T) := \int_0^T e^{-A^*} BB^* e^{-A^* t} dt$. En (J. Zabczyk, 1992) se demuestra que $N(T)$ es una matriz positiva definida, es decir, invertible si solo si el sistema (1) es controlable.

Para controles restringidos el inciso **a**) ha sido estudiado por Valery I. Korobov y coautores en (V.I. Korobov, 1975), (V.I. Korobov, 1979), respectivamente. La condición que imponen estos autores al conjunto Ω y a la matriz B es la siguiente: $\exists u_0 \in \Omega : Bu_0 = 0$.

El inciso **c**) ha sido propuesto y resuelto por Lev S. Pontryagin y coutores en (Pontryagin et., 1964). Estos autores dan una solución explícita de **c**) para el sistema de Brunovsky o sistema canónico

$$\dot{x}_1 = u, \quad \cdots, \quad \dot{x}_m = x_{m-1}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad |u| \le d \tag{3}$$

para $m = 2$. En (V.I. Korobov, 1987), (V.I. Korobov, 1989) se resuelve **c**) para el sistema canónico y el sistema (4), respectivamente, para $m \ge 2$ mediante el problema de momentos. Ver también (Choque Rivero2, 2010).

La solución del problema CA **b**) abarca la construcción de controles posicionales $u(x)$ tales que $u(x) \in \Omega$. En (V.Korobov, 1979), (V.I. Korobov, 1987), (Choque Rivero, 2004), (Choque Rivero, 2004) se resuelve el problema de estabilidad en tiempo finito mediante controles posicionales escalares $|u(x(t))| \le d$ para sistemas de la forma (1). En (Choque Rivero, 2010) mediante el método problema de momentos de Hausdorff se resuelve completamente el problema CA para sistema (3).

En el presente trabajo consideramos un caso particular del sistema (1), más precisamente, consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_{2k} &= k\, x_{2k+1} + u, \quad |u| \le L, \\ x_{2k+1} &= -k\, x_{2k}, \quad k = 1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{4}$$

Este sistema, que denominamos *sistema canónico oscilatorio*, está asociado con el problema de anular en tiempo T los primeros N sumandos de la solución (estado) y su derivada (velocidad) en forma de serie de Fourier de un sistema de control de onda no homogéneo (ver apéndice).

I-A. Plantemiento del problema CA para el sistema (4)

Dada una condición inicial x_0 de $\mathbb{R}^{2n+1}$ y un valor $L > 0$, se requiere hallar el conjunto de todos los controles $u_{x_0}(t)$, definidos y continuos a trozos en el intervalo $[0, 2\pi]$, con valores que satisfacen la restricción $|u_{x_0}(t)| \leq L$, tales que la trayectoria $x(t)$ del sistema (4) con $u = u_{x_0}(t)$ traslade la posición inicial x_0 al origen en tiempo $T = 2\pi$. El conjunto de puntos x_0 desde los cuales se pueden alcanzar el origen en tiempo 2π lo denotamos como $X_{0,n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ y se llama conjunto 0-controlable del sistema (4).

I-B. Solución al problema planteado

En el presente trabajo damos una descripción analítica y geométrica del conjunto $\mathcal{S}_{0,n} = \partial X_{0,n}$ para $n = 1$ concernientes al problema CA del sistema (4). Donde $\partial X_{0,n}$ denota la frontera del conjunto $X_{0,n}$.

Observación 1: a) Para una condición inicial x_0 el conjunto de controles $\{u_{x_0}(t)\}$ puede ser un conjunto vacio, o que contenga un número infinito de elementos o que contenga un solo elemento.
b) El conjunto $X_{0,n}$ también depende de L, es decir, $X_{0,n}^L$. De (Korobov1, 1975) se tiene que este conjunto es un conjunto conexo, cerrado que satisfe $X_{0,n}^{L_1} \subset X_{0,n}^{L_2}$ para $L_1 < L_2$. Consecuentemente, para mayores valores de L, más "amplio" será el conjunto desde los cuales se puede llegar al origen. Para $L \to +\infty$ entendemos que el sistema (4) no tiene restricción en el control.

Observación 2: Se puede demostrar que el conjunto $\mathcal{S}_{0,n}$ representa el conjunto condiciones iniciales x_0, para los cuales 2π es tiempo mínimo T_{min} de recorrido de la trayectoria $x(t)$ del sistema (4) desde $x(0) = x_0$ al origen, es decir, $x(T_{min}) = 0$.

I-C. Estrategia y metodología

La estrategia que seguimos para resolver el problema planteado es la siguiente:

i) Reducimos el problema CA a un problema trigonométrico de momentos truncado de Markov (TMTM).
ii) El problema TMTM se reduce a un problema trigonométrico de momentos truncado clásico (TMTC).
iii) El problema TMTC se reduce al problema de resolver una desigualdad fundamental matricial (DFM).
iv) Resolvemos la DFM.

La aplicación del método de problema de momentos a sistemas de control descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias ha sido iniciado por N.N. Krasovsky (N.N. Krasovskii, 1985) . El pionero en usar el método de momentos en sistemas de control descritos por ecuaciones en derivadas parciales fue A.G. Butkovsky (Butkovsky, 1965).

I-D. Mapa del contenido del trabajo

Para un mejor entendimiento del presente trabajo, a continuación incluimos un mapa del contenido del trabajo:

1) Introducción $\prec \left\{ \begin{array}{l} \text{Planteamiento del problema.} \\ \text{Solución.} \\ \text{Estrategia y metología.} \end{array} \right.$

2) Preliminares $\prec \left\{ \begin{array}{l} \text{Problema de momentos clásico.} \\ \text{Problema de momentos de Markov.} \\ \text{Desigualdad Matricial.} \end{array} \right.$

3) Del problema de control admisible.

4) Construcción de la solución. Ejemplos.

5) Conclusión.

II. PRELIMINARES

En esta sección introducimos resultados conocidos de la teoría del problema trigonométrico de momentos.

Problema Trigonométrico Momentos Truncado Clásico
Dada una secuencia de números complejos $(\gamma_j)_{j=0}^n$, hallar el conjunto de funciones no crecientes en el intervalo $[0, 2\pi]$ tales que

$$\gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad k = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Nos referiremos a este problema como problema de TMTC. De la literatura clásica sobre el problema de momentos, ver por ejemplo, (Akhiezer, 1965), (Krein y Nudelman, 1976), se conoce que el problema de TMTC tiene solución si y solo si la matriz de la forma de Teoplitz

$$\mathcal{T}_n := \begin{pmatrix} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \bar{\gamma}_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_n & \bar{\gamma}_{n-1} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

es positiva semidefinida.

Definición 2: La secuencia $(\gamma_j)_{j=0}^n$ se llama positiva definida (semidefinida) si $\mathcal{T}_n$ es positiva definida (positiva semidefinda).
Un método para encontrar una solución $\sigma(t)$ (función no decreciente en el intervalo $[0, 2\pi]$) del problema TMTC es asociar la función distribución $\sigma(t)$ con una función $s(z)$ holomorfa en cierta región de plano complejo $\mathbb{C}$. Más precisamente, $s(z)$ está definida en $|z| < 1$ y tiene valores en $\operatorname{Re} s(z) \geq 0$. La función s satisface la expansión

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

Existe una relación bijectiva entre σ y s (Akhiezer and Krein, 1962):

$$\frac{\sigma(t+0) + \sigma(t-0)}{2} = const + \lim_{r \to 1-0} \frac{1}{\pi} \int_\theta^t \operatorname{Re} s(re^{-i\tau}) d\tau$$

que permite abordar el problema de momentos (hallar σ) como un problema de interpolación para cierta función s (hallar s con cierta expasión en cero predeterminada).

Problema Trigonométrico de Momentos Truncado de

Markov Dada una secuencia de números complejos $(c_j)_{j=0}^n$, hallar el conjunto de funciones continuas a trozos $f(t)$ definidos en $[0, 2\pi]$ con valores $-L \le f(t) \le L$ para $t \in [0, 2\pi]$ tales que

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt \quad k = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

Nos referiremos a este problema como problema de TMTM. Este problema tiene solución (Krein-Nudelman, 1976) si y solo si $-2\pi L \le c_0 \le 2\pi L$ y que la sucesión $(\gamma_j)_{j=0}^n$ determinada por la expansión

$$\exp\left\{\frac{i}{2L}\left(\frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n\right)\right\}$$
$$= \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots \tag{8}$$

con $\gamma_0 + \overline{\gamma}_0 = 2\cos\frac{c_0}{4L}$. sea positiva semidefinida.

Desigualdad Matricial Fundamental En los 60 de siglo pasado, V.P. Potapov (Efimov-Potapov, 1973) (I.V. Kovalishina, 1983) introdujo un método para la solución de problemas de interpolación, entre éstos el problema TMTC. Este método reduce el TMTC a una desigualdad matricial:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{T}_n & R_n(z)(v_n s(z) - u_n) \\ \hline * & \frac{s(z)-s^*(z)}{1-z\bar{z}} \end{array}\right), \tag{9}$$

donde $R_n(z) = \frac{1}{z}\left(I - \frac{1}{z}T_n\right)^{-1}, T_n = (\delta_{j,k+1})_{j,k=0}^n$, $v_n = col(1, 0, \ldots, 0)$, $u_n = col(\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. El símbolo I denota la matrix identidad de dimensión correspondiente.

Teorema 1: (Kovalishina, 1983) La función holomorfa s en $|z| \le 1$ es solución del problem TMTC si y solo si s es solución de la desigualdad 9.

III. Del Problema de Control al problema de Momentos

En esta sección consideramos el sistema (4) para $n = 1$. En forma vectorial este sistema se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \le 1 \tag{10}$$

donde

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a resultados básicos de ecuaciones diferenciales la solución del sistema (10) con la condición inicial $x(0) = x_0$ tiene forma

$$x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}bu(\tau)\, d\tau\right). \tag{11}$$

De esta manera, para que $x(2\pi) = 0$, se debe satisfacer la igualdad

$$-x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}bu(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

En coordenadas del vector x_0 la igualdad (12) toma forma

$$x_{10} = -\int_0^{2\pi} u(\tau)\, d\tau$$
$$x_{20} = -\int_0^{2\pi} \cos\tau u(\tau)\, d\tau$$
$$x_{30} = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\tau u(\tau)\, d\tau \tag{13}$$

donde $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$. Utilizando la fórmula de Euler $e^{it} = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)$, el sistema (13) se representa de la siguiente manera,

$$c_0 = \int_0^{2\pi} u(\tau)\, d\tau$$
$$c_1 = \int_0^{2\pi} e^{i\tau}u(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

donde

$$c_0 := -x_{10},\ c_1 := -x_{20} - ix_{30},\ \bar{c}_1 := -x_{20} + ix_{30}. \tag{15}$$

El sistema (14) es un problema TMTM que se distingue del problema TMTC (Akhiezer, 1965) en lo siguiente: en el primer problema de busca una función continua a trozos $f(t)$ en $[0, 2\pi]$ tal que $-L \le f \le L$, mientras el problema TMTC busca una función σ no decreciente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De la relación entre los momentos c_k y γ_k dada por la igualdad (8) y de (15) se sigue que los primeros coeficientes γ_k en términos de la posición inicial x_0 tienen la forma

$$\gamma_0 = e^{\frac{-ix_{10}}{4L}} \tag{16}$$
$$\gamma_1 = \frac{x_{30}\cos(\frac{x_{10}}{4L}) - x_{20}\operatorname{sen}(\frac{x_{10}}{4L})}{2L} \tag{17}$$
$$+ \frac{[-x_{20}\cos(\frac{x_{10}}{4L}) - x_{30}\operatorname{sen}(\frac{x_{10}}{4L})]i}{2L}. \tag{18}$$

Consecuentemente, de (12), (14), (18) tenemos que el problema de CA del sistema (4) es equivalente al problema TMTC (5). De esta manera:

Observación 3: I) El problema de controlabilidad de sistema CA es equivalente al problema de existencia de soluciones del problema TMTC.
II) El conjunto de soluciones $\{u_{x_0}(t)\}$ es equivalente al conjunto de soluciones σ del problema MMTC.

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \gamma_1 \\ \bar{\gamma}_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

es positiva semidifinida. Claramente la matriz $\mathcal{T}_1$ construida en (19) depende de la condición inicial x_0 del sistema (4).

III-A. *Caracterización del conjunto 0-controlable $X_{0,1}$*

La siguiente afirmación caracteriza el conjunto $X_{0,1}$.

Teorema 2: Sea x_0 una condición inicial para el sistema de control (4) para $n = 1$ El conjunto 0-controlable $X_{0,1}$ está dado por:

$$X_{0,1} = \{x_0 \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{T}_1 \ge 0, \quad -2\pi L \le x_{10} \le 2\pi L\}.$$

La demostración de esta afirmación se sigue de la Observación 3 inciso I) y del hecho que $\gamma_0+\bar{\gamma}_0 = 2\cos\frac{x_{0,1}}{4L} \geq 0$.

En coordenadas del estado inicial $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})^*$ el conjunto $X_{0,1}$ tiene la forma

$$X_{0,1} = \left\{ \begin{array}{c} -2\pi\, L \leq x_{10} \leq 2\pi\, L \\ 16L^2\cos^2\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - x_{20}^2 - x_{30}^2 \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (20)$$

Ver gráfica de este conjunto en Figura 1.

Notemos que la superficie $\mathcal{S}_{0,1}$, frontera de $X_{0,1}$, es el conjunto

$$\mathcal{S}_{0,1} = (\mp 2L,\, 0\, 0)^* \cup \{16L^2\cos^2\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - x_{20}^2 - x_{30}^2 = 0\}$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{S}_{0,1} = \{(\mp 2L,\, 0\, 0)^* \cup \big(x_0 \in \mathbb{R}^3 : \det \mathcal{T}_1(x_0) = 0\big)\}.$$

De los razonamientos anteriores no es difícil verificar que:

Observación 4: a) Si x_0 no pertenece a $X_{0,1}$, es decir, es un punto “externo” a $X_{0,1}$, entonces no existe un control admisible que lleve este punto al origen.

b) Si x_0 pertenece a $\mathcal{S}_{0,1} = \partial X_{0,1}$, entonces existe un único control admisible $u_{x_0}(t)$ que lleve este punto al origen. La unicidad se sigue del hecho que el problema TMTC correspondiente tiene una única solución (ver (Akhiezer, 1965)). Este hecho también se puede demostrar utilizando la Observación (2).

c) Si x_0 pertenece a interior del conjunto $X_{0,1}$, entonces existe un número infinito controles admisibles $u_{x_0}(t)$ que llevan este punto al origen. Es hecho se sigue de un resultado de la teoría del problema TMTC. Cabe mencionar que este caso no estudiamos en el presente trabajo y será considerado posteriormente.

IV. Solución del problema del conjunto de control, caso $\det \mathcal{T}_1 = 0$

Consideramos dos casos para los cuales $\det \mathcal{T}_1 = 0$.

a) Caso completamente degenerado, $\mathcal{T}_1 = 0_{2\times 2}$. En vitud a la condición de $T_1 \geq 0$, la igualdad $\gamma_0 = 0$ implica $\gamma_1 = 0$. La igualdad $\gamma_0 = 0$ es equivalente a $c_0 = \pm 2\pi L$, en términos de la condición inicial x_0, tenemos $x_{10} = \mp 2\pi L$. Consecuentemente el caso $T_1 = 0_{2\times 2}$ se satisface solamente en los puntos iniciales $x_0 = (\mp 2L,\, 0\, 0)^*$. Es obvio que el control $u(t) = \pm L$ es solución del sistema (13). El sistema de control (4) toma la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \pm L, \\ \dot{x}_2 = x_3 + \pm L \\ \dot{x}_3 = -x_2, \end{array} \right. \quad (21)$$

el cual comienza en x_0 y termina en tiempo $T = 2\pi$ en el origen.

b) Caso degenerado, $\det \mathcal{T}_1 = 0$, con $\mathcal{T}_1 \neq 0_{2\times 2}$. Para este caso resolvemos DMF (9):

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{T}_1 & R_1(z)(v_1 s(z) - u_1) \\ \hline * & \frac{s(z)-s^*(z)}{1-z\bar{z}} \end{array} \right)$$

$$R_1(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{z}} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{pmatrix},\; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; u_1 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

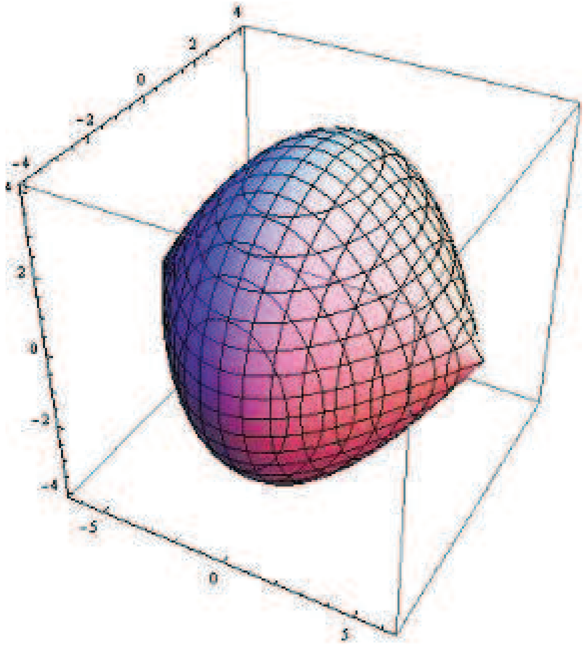

Figura 1. Conjunto $X_{0,1}$ para $L = 1$

Multplicamos esta desigualdad por la izquierda por M y la derecha por M^* donde $M = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\xi \in \mathbb{C}^n$ tal que $T_1\xi = 0$. La función asociada al problem TMTC tiene la forma:

$$s(z) = \frac{\xi_2\gamma + (\gamma\xi_1 + \xi_2\gamma_1)z}{\xi_1 z + \xi_2}. \quad (22)$$

La relación entre s y f_L está dada por (Krein-Nudelman, 1976)

$$\frac{1}{4L}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z} f_L(t)\, dt = \frac{1}{i}\log s(z),$$

de donde,

$$f_L(t) = -L \,\mathrm{sign}\, \frac{\mathrm{sen}\left(\dfrac{t-r_1}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\dfrac{t-t_1}{2}\right)}. \quad (23)$$

Comparando los sistemas (7), (14) y (23) tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3: Si x_0 pertenece a la superficie $\mathcal{S}_{0,1}$, que representa la frontera del conjunto de control $X_{0,1}$, entonces la trayectoria $x(t)$ que corresponde al control $u = u(t)$, que satisface $|u(t)| \leq L$ tiene la forma

$$u_L(t) = -f_L(t) = L \,\mathrm{sign}\, \frac{\mathrm{sen}\left(\dfrac{t-r_1}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\dfrac{t-t_1}{2}\right)} \quad (24)$$

Ejemplo 1: Consideramos el sistema (4) con $|u(t)| \leq 1$, la posición inicial $x_0 = (\pi,\, 2,\, 2)^T$, que pertenece a la superficie de (20) con $L = 1$. La matriz $T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, y $\det T_1 = 0$. Esta claro que $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ satisface $T_1\xi = 0$

$$\xi^T \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s(z) - \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \right).$$

Luego de (22) tenemos

$$s(z) = -\frac{(1+i)(z+1)}{\sqrt{2}(z-i)} \tag{25}$$

$$-\, i\frac{e^{-\frac{i}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\pi}}{e^{-\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi}}. \tag{26}$$

Del teorema 3 tenemos que el control admisible para la condición inicial $x_0 = (\pi,\, 2,\, 2)^T$ es

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ -1, & t \in [\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ 1, & t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

V. Conclusiones

En la presente trabajo se ha resuelto:

1c) el problema de controlabilidad del sistema (4) para $n = 1$ con *control acotado* para el caso degenerado, es decir cuando $\det \mathcal{T}_1 = 0$ donde $\mathcal{T}_1$ es una matriz de Toeplitz construida en base a la condición inicial x_0 del sistema (4).

2c) Se ha obtenido el conjunto de controles admisibles $u = u_{x_0}(t)$ con $|u_{x_0}(t)| \leq L$ que trasladan cualquier posible posición inicial $x_0 \in \mathcal{S}_{0,1}$ (recordemos que $\mathcal{S}_{0,1} = \partial X_{0,1}$) al origen en tiempo $T = 2\pi$.

3c) Queda por resolver el caso no degenerado es decir cuando la matriz $\mathcal{T}_1$ es positiva definida, que corresponde a hallar el conjunto de controles $u_{x_0}(t)$ acotados para $x_0 \in int\, X_{0,1}$. Aparentemente este problema se deja resolver utilizando el método de Potapov (DFM) (ver (9)).
También resta exponer los incisos anteriores para $n > 1$.

Apéndice

Consideremos la ecuación de onda no homogénea con control acotado

$$\begin{aligned} &f_{tt} - f_{xx} = u\, g(x), \quad x \in [0, \pi], \\ &f_x(t, 0) = f(t, \pi) = 0, \\ &f(0, x) = f_0(x), \quad f_t(0, x) = f_1(x) \end{aligned} \tag{27}$$

con $g \in L_2[0, \pi]$ y $u = u(t), \quad |u| \leq 1$.

Cero–controlabilidad N–aproximada de ecuación de onda no homogénea con control acotado

Sea dada una condición inicial de (27) f_0 y f_1 (donde $f_0 \in H_0^1(0, \pi), \quad f_1 \in L_2(0, \pi)$). Hallar un conjunto de controles $\{u_{(f_0, f_1)}\}$ con $|u_{(f_0, f_1)}| \leq 1$ tales que la suma parcial $f_N(t, x) := \sum_{k=0}^{N} x_k(t) \sin kx$ de la solución de (27) con $u = u_{(f_0, f_1)}(t)$,

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \sin kx,$$

satisfaga $f_N(2\pi, x) = 0$ y $(f_N)_t(2\pi, x) = 0$
Este problema se denomina 0–controlabilidad, N–aproximada no homogénea con control acotado.
Cabe mencionar que sistemas de la forma (27) tradicionalmente ha sido estudiado en ausencia de restricciones sobre u (ver por ejemplo (Avdonin, 2002)).

Referencias

N.I. Akhiezer (1965). *The Classical Moment Problem*, Oliver and Boyd.

N.I. Akhiezer and M.G. Krein (1962). *Some Questions in the Theory of Moments*, AMS.

S. Avdonin, B. Belinsky, *Controllability of a string under tension*, Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, 2002, 24–27.

A.G. Butkovsky, Theory of Optimal Control of Distributed Parameter Systems. Nauka, Moscow, 1965. (Russian); English transl. 1969.

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, V.O. Skoryk, *Controllability function as time of motion I.* (in Russian) Mat. Fiz. Anal. Geom, 11(2), (2004), 208–225.

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, V.O. Skoryk, Controllability function as time of motion II. (in Russian) Mat. Fiz. Anal. Geom. 11(3), (2004), 341–354.

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, G.M. Sklyar; *The admissible control problem from the moment problem point of view, Applied Mathematics Letters, Vol.23, No. 1, (2010), 58-63.*

A.E. Choque Rivero, Yu. Karlovich; *The time optimal control as an Interpolation Problem*, Commun. Math. Anal, ISSN: 0973-3841, Conf. 03 (2011).

A.V. Efimov, V.P. Potapov *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electrical circuits, Russian Math. Surveys,* **28** *(1973), 69–140.*

R.E. Kalman, Y.-C. Ho, and K.S. Narendra. Controllability of dynamical systems. Contributions to Differential Equations, 1:189–213, 1963.

V.I. Korobov, *A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem*. Mat. Sb. 109(151), (1979), 582–606.

V.I. Korobov, A.P. Marinic, E.N. Podol'skii: *Controllability of linear autonomous systems in the presence of constraints on the control*. (Russian) Differencial'nye Uravnenija 11 (1975), no. 11, 1967-1979.

V.I. Korobov: *A geometric criterion of local controllability of dynamical systems in the presence of constraints on the control*. (Russian) Differentsial'nye Uravneniya 15 (1979), no. 9, 1592-1599.

V.I. Korobov and G.M. Sklyar, *Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle*. Differential Equations 26(11), (1990), 1422–1431.

V.I. Korobov, G.M. Sklyar: *Time optimality and the power moment problem*, Mat. Sb. 134 (176) (1987), 186–207;

V.I. Korobov, G.M. Sklyar: *Time-optimality and the trigonometric moment problem*. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53 (1989), no. 4, 868-885; translation in Math. USSR-Izv. 35 (1990), no. 1, 203–220.

I.V. Kovalishina *Analytic theory of a class of interpolation problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Vol. 47, Issue 3, (1983), 455–497.

N.N. Krasovskii, *Control of dynamical systems*. Nauka, Moscow, 1985.

M. Krein and A. Nudelman (1976). *The Markov Moment Problem and Extremal Problems, AMS.*

L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelitse and E.F. Mischenko: *The mathematical theory of optimal processes*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transls., Willey, 1962, and Macmillan, 1964.

J. Zabczyk, Mathematical Control Theory: An Introduction, Birkäuser, 1992.