

Análisis de Ganancia \mathcal{L}_2 de un Sistema de Orden n con Controladores de Modos Deslizantes^{*}

Osuna-Altamirano, Topacio* Orlov, Yury*

* Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B. C., Carretera Tijuana-Ensenada Km. 107, C. P. 22860, Ensenada, B.C. (e-mail: osuna@cicese.edu.mx, yorlov@cicese.mx).

Abstract: El presente trabajo extiende el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas dinámicos de orden n de modo deslizantes. El análisis desarrollado se aplica a un algoritmo de modo deslizante (MD) de primer orden para ilustrar que el sistema de lazo cerrado resultante es capaz no sólo de rechazar perturbaciones acopladas uniformemente acotadas, sino también de la atenuación de las no acotadas, incluyendo perturbaciones no acopladas.

Keywords: Desigualdad Hamilton-Jacobi, sistemas discontinuos, modos deslizantes.

1. INTRODUCCIÓN

Los algoritmos de control por MD son bien reconocidos por sus características de robustez útiles contra perturbaciones acopladas con límites *a-priori* en sus magnitudes. Su capacidad de atenuar no sólo perturbaciones acopladas, sino también desacopladas, ambas con límites desconocidos en sus magnitudes constituyen el tema principal de este trabajo.

Típicamente, los trabajos relacionados con MD, asumen que sólo las perturbaciones acopladas y limitadas afectan el sistema. Sin embargo, en (Castaños, F. et al. (2011)) si consideran las perturbaciones desacopladas pero no llevan a cabo un análisis de ganancia. Recientemente, (Benderadjji et al. (2012), Estrada et al. (2011), Orlov et al. (2011), y Santiesteban et al. (2010)) hicieron el análisis de control por MD dentro del marco de las funciones no suaves de Lyapunov donde condiciones fueron impuestas en los parámetros del controlador para garantizar la estabilidad en tiempo finito y rechazar perturbaciones acopladas mientras que el análisis general considerando tanto las perturbaciones acopladas como desacopladas con límites superiores desconocidos en su magnitud no fue proporcionado. Al contrario de los trabajos anteriores, Zhang et al. (2009) propone un enfoque de ganancia \mathcal{L}_2 para el análisis y síntesis de controladores retroalimentados de sistemas discontinuos con retardos en el tiempo. Aparte de esto, Zhao y Wang (2013) consideraron la estabilidad en tiempo finito y problemas de acotación en tiempo finito para sistemas lineales de conmutación sujetos a perturbaciones \mathcal{L}_2 donde los MD son descartados. El trabajo reciente de Ponce et al. (2013) sufrió de la misma deficiencia de la ausencia de MD.

En el presente trabajo, el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 es extendido hacia sistemas dinámicos de MD, y es probado en un algoritmo de control de MD preseleccionado de primer orden. Es así que, se demuestra que un controlador de MD es capaz no sólo de rechazar perturbaciones con cotas acopladas sino también de atenuar las desacopladas de clase \mathcal{L}_2 .

El resto del artículo se describe de la siguiente forma. En la Sección 2, se detallan las suposiciones básicas y definiciones que son introducidas para sistemas discontinuos autónomos. En la Sección 3, se desarrolla el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 dentro del marco elegido para un sistema lineal de orden n dado en su forma canónica y manipulado por un controlador de primer orden. La efectividad del sistema en lazo cerrado se ilustra numéricamente en la sección 4 para un doble integrador. Finalmente, en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

2. ANÁLISIS DE GANANCIA \mathcal{L}_2

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 presentado aquí, se basa en el enfoque de teoría de juegos de Basar et al. (1973) y extiende los resultados de Isidori et al. (1992); Vander (1992), donde sus investigaciones fueron restringidas a sistemas autónomos continuos a tramos.

2.1 Suposiciones básicas y definiciones

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 es desarrollado para sistemas autónomos de la forma

$$\dot{x} = \varphi(x) + \psi(x)w(t) \quad (1)$$

la salida está dada de la siguiente manera

$$z = h(x). \quad (2)$$

En lo sucesivo, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $t \in \mathbb{R}^+$ es la variable del tiempo, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de perturbaciones desconocidas, $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h(x) :$

* Y. Orlov reconoce con gratitud el apoyo financiero del CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) en virtud de concesiones 165958.

T. Osuna agradece el apoyo financiero brindado por el comité organizador del AMCA 2014.

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son vectores de funciones, y $\psi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ es una función matricial. Las siguientes *suposiciones* son impuestas en el sistema.

- (S1) Las funciones $\psi(x)$ y $h(x)$ son localmente Lipschitz, mientras que $\varphi(x)$ es continua a tramos y localmente Lipschitz en sus puntas de continuidad.
- (S2) $\varphi(0) = 0$ y $h(0) = 0$ para casi todo t .
- (S3) Las perturbaciones deben ser continuas a tramos.

Recordando que la función $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a tramos (y localmente Lipschitz) si y sólo si \mathbb{R}^n es particionado en un número finito de dominios $G_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$, con interiores disjuntos y cotas ∂G_j de medida cero tal que $\varphi(x)$ es (localmente Lipschitz) continua dentro de cada uno de esos dominios para toda $j = 1, \dots, N$ tiene un límite finito $\varphi^j(x)$ conforme el argumento $x^* \in G_j$ se aproxima a la cota $x \in \partial G_j$.

La Suposición 2 es hecha para asegurar que el origen es un punto de equilibrio del sistema nominal (i.e., libre de perturbaciones) mientras que la Suposición 1 permite al sistema subyacente establecer discontinuidades en las cotas ∂G_j de medida cero, es por ello que a través del significado preciso de la ecuación diferencial (1) con el lado derecho discontinuo a tramos es visto en la forma de Filippov. La siguiente definición es dada por Filippov (1988).

Definición 1. Dada la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad (3)$$

nos permite introducir para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el conjunto cerrado convexo más pequeño $\Phi(x)$ el cual contiene todos los puntos límites de $\varphi(x^*)$ conforme $x^* \rightarrow x$, y $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus (\cup_{j=1}^N \partial G_j)$. Una función absolutamente continua $x(\cdot)$ se dice que es solución de (3) si esto satisface la inclusión diferencial.

$$\dot{x} \in \Phi(x). \quad (4)$$

En cualquier punto de la continuidad $x \in \cup_{i=1}^N G_i$ de la función φ el conjunto de Filippov $\Phi(x)$ consiste en el único punto $\varphi(x)$, y satisface la ecuación de la solución de Filippov (3) en el sentido convencional. Si la función $\varphi(x)$ es sometida a discontinuidades en una superficie suave S , regida por la ecuación escalar $s(x) = 0$, entonces el conjunto de discontinuidad S separa a x en los espacios de dominios $G^- = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) < 0\}$ y $G^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) > 0\}$, y el conjunto de Filippov $\Phi(x)$ es un segmento que une los puntos extremos de los vectores

$$\varphi^-(x) = \lim_{(\xi) \in G^-, \xi \rightarrow x} \varphi(\xi), \quad \varphi^+(x) = \lim_{(\xi) \in G^+, \xi \rightarrow x} \varphi(\xi).$$

En el presente trabajo, una suposición extra es impuesta en la función continua a tramos $\varphi(x)$.

- (S4) La función $\varphi(x)$ es sometida a discontinuidades en una superficie suave S , regida por la ecuación escalar

$$s(x) = 0. \quad (5)$$

De acuerdo a la Definición 1, un MD en el conjunto de discontinuidad $s(x) = 0$, si hay alguno, es regido por

$$\dot{x} = \varphi^0(x) + \psi^0(x)w \quad (6)$$

donde la intersección de el segmento de Filippov $\Phi(x)$ y el plano T , tangencial a S , determina este vector de velocidad expresado en la forma

$$\varphi^0(x) + \psi^0(x)w = \mu(x, t)\varphi^+(x) + [1 - \mu(x)]\varphi^-(x) + \psi(x)w \quad (7)$$

donde

$$\mu(x) = \frac{\text{grad}^T s(x)[\varphi^-(x) + \psi(x)w]}{\text{grad}^T s(x)[\varphi^-(x) - \varphi^+(x)]} \in [0, 1] \quad (8)$$

es encontrado de la condición

$$\text{grad}^T s(x) \{ \mu(x)\varphi^+(x) + [1 - \mu(x)]\varphi^-(x) + \psi(x)w \} = 0 \quad (9)$$

que el vector velocidad (7) está en el plano T , tangencial a S .

Note que la extensión del concepto de la solución de Filippov para la ecuación diferencial perturbada (1) es sencilla. Estamos ahora en posición de introducir el concepto de ganancia \mathcal{L}_2 finita para el sistema discontinuo subyacente (1).

Definición 2. Dado un número real $\gamma > 0$, posteriormente referido como un nivel de atenuación de perturbación, se dice que el sistema (1) posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (2) (o, simplemente, sistema (1), (2) posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ) si la respuesta z , resultante de w para el estado inicial $x(t_0) = 0$, satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \quad (10)$$

para todo $t_1 > t_0$ y todas las funciones continuas a tramos $w(t)$. Respectivamente, el sistema (1), (2) se dice que tiene ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ , localmente alrededor del origen, si existe una vecindad U del origen tal que la desigualdad (10) se satisface para toda $t_1 > t_0$ y para todas las funciones continuas a tramos $w(t)$ para las cuales el estado de trayectoria del sistema de lazo cerrado comenzando desde el punto de inicio $x(t_0) = 0$ se mantiene en U para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Una notación estandar

$$DV(x; \nu) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V(x + \tau\nu) - V(x)}{\tau} \quad (11)$$

se mantiene para una derivada de Dini (si existiese) de una función escalar $V(x)$, calculada en la dirección de $\nu \in \mathbb{R}^n$ en $x \in \mathbb{R}^n$.

La siguiente noción es por Clarke (1988). Un vector $\zeta(\hat{x}) \in \mathbb{R}^n$ es un supergradiente de una función escalar $f(x)$ en $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ si es que existe una $\sigma(\hat{x}) > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(\hat{x}) + \zeta^T(\hat{x})(x - \hat{x}) + \sigma(\hat{x})\|x - \hat{x}\|^2 \quad (12)$$

para toda x en alguna vecindad $U(\hat{x})$ de \hat{x} .

El conjunto de supergradiente en x es denotado por $\partial f(x)$, y es referido como el *superdiferencial*.

Adicionalmente, los lemas técnicos son extraídos de Orlov (2009) para ser usados en lo subsecuente, para el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 .

Lema 1. Sea $x \in \mathbb{R}$ una función absolutamente continua con variable del tiempo t y sea $V(x)$ una función escalar localmente Lipschitz alrededor de $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función compuesta $V(x)$ es absolutamente continua y su derivada en el tiempo está dada por

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = DV(x(t), \dot{x}(t)) \quad (13)$$

casi en todas partes. Además,

$$DV(x(t), \dot{x}(t)) \leq \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}(t) \quad (14)$$

para casi toda t y para todos los supergradientes $(\frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial V(x)$, si hay alguno.

Lema 2. Sea un sistema discontinuo (3) que posee una función de Lyapunov $V(x)$ continuamente Lipschitz, entonces el sistema (3) es estable. Si aparte, la función $V(x)$ es una función estricta de Lyapunov (y radialmente no acotada) entonces el sistema (3) es (globalmente) asintóticamente estable.

2.2 Desigualdad Hamilton–Jacobi y sus soluciones próximas

La desigualdad Hamilton–Jacobi

$$H(x, \alpha(x)) = \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} \psi(x) \psi^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + h^T(x)h(x) \leq -v(x) \quad (15)$$

con alguna γ positiva y alguna función definida positiva $v(x)$ se introduce de manera estandar dentro de las regiones de continuidad G^- y G^+ (i.e., fuera de la superficie de discontinuidad S) mientras que en la superficie de discontinuidad (5), la desigualdad (15) es especificada de acuerdo a (7) con

$$\varphi(x) = \varphi^0(x) \quad \psi(x) = \psi^0(x) \quad (16)$$

considerando $s(x) = 0$.

En otras palabras, la desigualdad Hamilton–Jacobi sí esta restringida a la superficie de discontinuidad (5) toma la forma

$$\frac{\partial V}{\partial x} \varphi^0(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} \psi^0(x) (\psi^0)^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + h^T(x)h(x) \leq -v(x). \quad (17)$$

Definición 3. Un función continua localmente Lipschitz $V(x)$ se dice que es *una solución próxima* (local) de la desigualdad diferencial parcial (15) sujeta a (16) y (7) si y sólo si la superdiferencial próxima $\partial^P V(x)$ es no vacía en todas partes y (15) se mantiene con $V(x)$ más alla de la superficie de discontinuidad (5) (localmente alrededor del origen) para todos los supergradientes próximos $\frac{\partial V}{\partial x} \in \partial^P V(x)$ mientras que la desigualdad Hamilton–Jacobi en MD (17) se satisface en la superficie de discontinuidad (5) (localmente alrededor del origen) para todo $\frac{\partial V}{\partial x} \in \partial^P V(x)$.

El lector interesado puede revisar Clarke (1988) para el concepto de superdiferencial próximo para campos vectoriales continuos.

El sistema (1), (2) es subsecuentemente analizado bajo la hipótesis de:

(H) La desigualdad Hamilton–Jacobi (15), especificada con (16) y (7), posee una solución próxima desacetada radialmente, definida y positiva (local) $V(x)$ bajo alguna γ positiva y alguna función definida positiva $v(x)$.

2.3 Resultado principal

Los resultados siguientes presentan las condiciones suficientes para un sistema no suave (1), (2) para ser asintóticamente estable internamente y para poseer una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ .

Teorema 1. Sean las Suposiciones S1, S2, S3 y S4 que estén vigentes, y la Hipotesis H sea cumplida (localmente). Entonces el sistema nominal (3) es globalmente (localmente) asintóticamente estable, mientras que su versión

perturbada (1) (localmente) posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (2).

Proof. Para iniciar, la validez del teorema está justificado por las trayectorias del sistema de lazo cerrado que se mantiene más alla del conjunto de discontinuidad $s = 0$ durante el movimiento.

Está claro que el Lema 1 es aplicable a la solución próxima $V(x)$ de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (15) vista en la soluciones $x(t)$ del sistema libre de perturbaciones (3). Bajo las relaciones (13), (14), y (15), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= DV(x, \dot{x}) \leq \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x) \leq -v(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Tomando en cuenta que (18) se mantiene casi en cualquier parte, La Hipótesis H asegura que $V(x)$ es una función de Lyapunov radialmente desacetada estrictamente decreciente del sistema nominal (3). Mediante el Lema 2, el sistema (3) es globalmente (localmente) asintóticamente estable.

Aun falta mostrar que el sistema perturbado (1) (localmente) posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (2). Para este propósito, se introduce la función multivaluada

$$H(x, w) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} [\varphi(x) + \psi(x)w] + h^T(x)h(x) - \gamma^2 w^T w \quad (19)$$

donde $\frac{\partial V}{\partial x} \in \partial^P V(x)$. Claramente, la función multivaluada (19) es cuadrática en w . Entonces

$$\frac{\partial H(x, w)}{\partial w} \Big|_{w=\alpha(x)} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x) - 2\gamma^2 \alpha^T(x) = 0 \quad (20)$$

para

$$\alpha(x) = \frac{1}{2\gamma^2} \psi^T(x) \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \quad (21)$$

y $\frac{\partial V}{\partial x} \in \partial^P V(x)$. Expandiendo la ecuación cuadrática $H(x, w)$ en series de Taylor, se deriva que

$$H(x, w) = H(x, \alpha(x)) - \gamma^2 \|w - \alpha(x)\|^2 \quad (22)$$

donde $H(x, \alpha(x)) \leq -v(x)$ a causa de (15). Por lo tanto,

$$H(x, w) \leq -\gamma^2 \|w - \alpha(x)\|^2 - v(x) \quad (23)$$

y empleando (19) y (23) se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} [\phi(x) + \psi(x)w] &\leq -\gamma^2 \|w - \alpha(x)\|^2 - v(x) \\ &\quad - \|h(x)\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Aplicando el Lema 1 y tomando (24) en cuenta, la derivada del tiempo de la solución $V(x)$ de la desigualdad Hamilton–Jacobi (15) en las trayectorias de (1), (2) es estimada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &\leq -\gamma^2 \|w - \alpha(x)\|^2 \\ &\quad - v(x) - \|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

De hecho, la siguiente desigualdad asegura que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2 \|w(t)\|^2 - \|z(t)\|^2) dt \geq V(x(t_1)) - V(x(t_0))$$

$$+ \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} [\|w(t) - \alpha(x(t))\|^2 + v(x(t))] dt > 0 \quad (26)$$

para cualquier trayectoria de (1), (2), iniciada con $x(t_0) = 0$. Por lo tanto, la desigualdad (10) es establecida, de este modo se completa la prueba del Teorema 1.

Para completar la prueba hace falta notar que la validez del teorema para MD, que posiblemente ocurre en el sistema de lazo cerrado, es justificada siguiendo la misma línea de razonamiento usada en la prueba del resultado cuando se restringe a dinámicas sin MD. Detalles técnicos de la prueba completa son entonces omitidos y dejados al lector.

3. CASO DE ESTUDIO: SISTEMA DE ORDEN N EN MODOS DESLIZANTES

Para apoyar nuestros resultados teóricos el sistema (1) es especificado en el espacio de estado $x \in \mathbb{R}^n$ con

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T; \quad \psi(x) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n);$$

$$w = [w_1, \dots, w_n]^T;$$

$$\varphi(x) = \left[x_2, \dots, x_n, -M \text{sign} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right) \right]^T;$$

donde la magnitud de conmutación $M > 0$ y los parámetros $c_1, \dots, c_{n-1} > 0$ son vistos como los de la superficie de conmutación

$$S = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k. \quad (27)$$

con la entrada conmutada $M \text{sign} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right)$ son definidos.

El objetivo de esta sección es demostrar que con MD de primer orden $M \text{sign} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right)$, mientras se manipula el sistema anterior, es capaz no sólo de rechazar perturbaciones acopladas uniformemente acotadas, sino también atenuar las no acotadas, incluyendo perturbaciones desacopladas. Con este fin, la salida (2) se especifica de la siguiente manera:

$$z = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, S]^T. \quad (28)$$

así, el sistema subyacente es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 w_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1} w_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n &= u + d_n w_n(t) \end{aligned} \quad (29)$$

y es controlado por

$$u = -M \text{sign}(S) \quad (30)$$

3.1 Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento

Primeramente vamos a demostrar que fuera de la superficie de deslizamiento (27) la función positiva definida

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + |S| \quad (31)$$

con $P > 0$, $P \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi (15). En efecto, sustituyendo (31) en el lado izquierdo de (15) y utilizando (21), la función $H = H(x, \alpha(x))$ se evalúa de la manera siguiente

$$\begin{aligned} H &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right] x_{k+1} \right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} c_k x_{k+1} \text{Sign}(S) \right] + S^2 \\ &\quad - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right] + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right]^2 + c_k d_k^2 \text{Sign}(S) \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right] \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right] x_{k+1} \right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} c_k |x_{k+1}| \right] + S^2 \\ &\quad - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right] + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right]^2 + c_k d_k^2 \left| \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right| \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Dentro de la bola $\mathcal{B}_R = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (32), agrupados entre sí en

$$\begin{aligned} a(x) &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right] x_{k+1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} c_k |x_{k+1}| \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right]^2 + \left[c_k d_k^2 \left| \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right| \right] \right] \\ &\quad + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + S^2 \\ b(x) &= \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right] \end{aligned}$$

acotando términos en $a(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a(x) &< R^2 \left(p + \frac{1}{\gamma^2} d^2 p^2 + 2c + 1 \right) \\ &\quad + R \left(c + \frac{1}{\gamma^2} c d^2 p \right) \end{aligned}$$

donde

$$p = \max_{k,i} |P_{ki}|; \quad c = \max_k c_k; \quad d = \max_k d_k;$$

Luego se selecciona la ganancia del controlador $M = M(R)$ de acuerdo a

$$\begin{aligned} M(R) &> \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \\ &\quad + R^2 \left(p + \frac{1}{\gamma^2} d^2 p^2 + 2c + 1 \right) \\ &\quad + R \left(c + \frac{1}{\gamma^2} c d^2 p \right), \end{aligned} \quad (33)$$

la relación (15) se convierte en negativa definida dentro de \mathcal{B}_R , asegurando así la desigualdad de Hamilton–Jacobi (15) para que se mantenga localmente fuera de la superficie de conmutación (27).

3.2 Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento

La ecuación de MD, que rige la dinámica del sistema en la superficie de conmutación (27), es obtenida aplicando el método de control equivalente. Entonces, si está restringido a la superficie de deslizamiento (27), el sistema (29) de orden n se reduce a un sistema de orden $n - 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 w_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k + d_{n-1} w_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

y su salida (28) está dada por

$$z = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T. \quad (35)$$

Sucesivamente, la función definida positiva (31) sobre la superficie de deslizamiento $S = 0$ se simplifica a

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x}. \quad (36)$$

Suponga que los parámetros c_i, \dots, c_{n-1} fueron expresados de acuerdo a Utkin (1992) de tal manera que la dinámica no perturbada (con $w_1 = \dots, w_{n-1} = 0$) de MD (34) esta exponencialmente estable con una decreciente arbitrariamente grande. Es decir, la matriz $P > 0$ se especifica de tal manera que la derivada de la función de Lyapunov (36), calculada en las trayectorias de MD de (34) no perturbada satisface la desigualdad

$$\dot{V} \leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2 \quad (37)$$

con $\kappa > 0$ arbitrariamente pre-especificada. Ahora vamos a demostrar que la desigualdad de Hamilton–Jacobi (17), definida para la ecuación de MD (34), es resuelta con la función (36) especificada con una matriz $P > 0$ así diseñada. Mediante la sustitución de (36) en la desigualdad Hamilton–Jacobi (17), se obtiene:

$$\begin{aligned} H(x, \alpha(x)) &\leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \|P\|^2 \|\tilde{D}\|^2 \|\tilde{x}\|^2 \\ &\quad + R^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

tomando en cuenta (37) y considerando que

$$h^T(x)h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq R^2$$

$$\tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_{n-1}),$$

y previsto que el parámetro de la superficie sea elegido de acuerdo a

$$\kappa > \frac{\|P\|^2 \|\tilde{D}\|^2 + R^2}{2\gamma^2}. \quad (39)$$

La validez de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (17) es entonces sencillamente verificada en la superficie de deslizamiento (27) sujeta al parámetro de elección (39).

3.3 Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema completo

Resumiendo las derivaciones hechas en las subsecciones 3.1 y 3.2 y aplicando el Teorema 1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2. Dada $\gamma > 0$, $M > 0$, los parámetros c_1, \dots, c_n y las condiciones (33) y (39) se cumplan. Entonces el sistema (29) conmutado en la superficie (27), es

asintóticamente estable internamente, y localmente posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (28).

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El desempeño del sistema en lazo cerrado (27)-(30) fue numéricamente probado para un sistema de segundo orden, bajo los valores de los parámetros $d_1 = d_2 = 1$ en presencia de las perturbaciones armónicas no acopladas y acopladas respectivamente

$$w_1 = 0.2 \sin(3t), \quad w_2 = 0.2 \sin(3t). \quad (40)$$

Se implementó en la herramienta de Simulink, con el método de integración numérico *ode4* (Runge–Kutta), con paso fijo y un error de $1e^{-3}$, las condiciones iniciales se establecieron en $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$, y nuestro caso de estudio es confinado a una bola \mathcal{B}_R de radio $R = 0.02$. Especificando el nivel de atenuación deseado con $\gamma = 0.5$ y $p_{11} = 1$, los parámetros del controlador se ajustan a $c_1 = \kappa = 2.6$ y $M = 8.5$ para asegurar que las condiciones (33) y (39) del Teorema 2 se satisfagan. La dinámica correspondiente al sistema de lazo cerrado afectado por la perturbación desacoplada se representa en la Fig. 1. La dinámica del mismo sistema afectado por ambos tipos de perturbaciones desacopladas y acopladas se representa en la Fig. 2 y en la Fig. 3 se muestra cuando tiene condiciones iniciales diferente a cero para el caso previo. El buen desempeño se concluye de estas figuras, apoyando la teoría desarrollada. Estas figuras muestran no sólo el rechazo de perturbaciones acopladas sino también de atenuación de perturbaciones desacopladas.

Además para demostrar el efecto de atenuación de perturbaciones acopladas con la magnitud mas grande que la magnitud del controlador se desarrolló otra simulación del sistema en lazo cerrado dirigido con el mismo controlador, cuya ganancia fue disminuida a un valor $M = 0.06$ más pequeño que la magnitud de la perturbación acoplada. Para garantizar que se cumplen las condiciones (33) y (39) se modifican los parámetros a $R = 0.05$, $c = 0.6$ y $\gamma = 5$. La Fig. 4 que corresponde al sistema especificado con estos parámetros muestra que la perturbación acoplada con la magnitud más grande que la ganancia del controlador aún se atenúa.

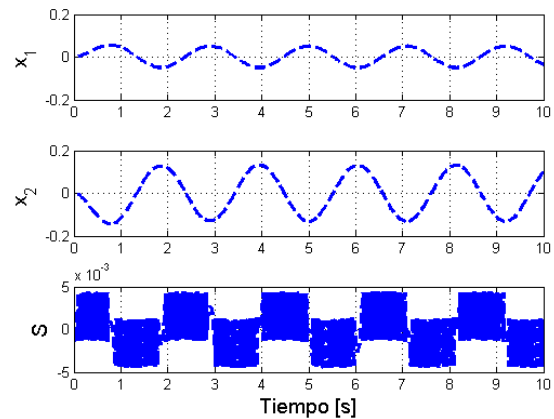


Fig. 1. Dinámica del sistema en lazo cerrado (27)-(30) afectado por perturbación armónica desacoplada (40).

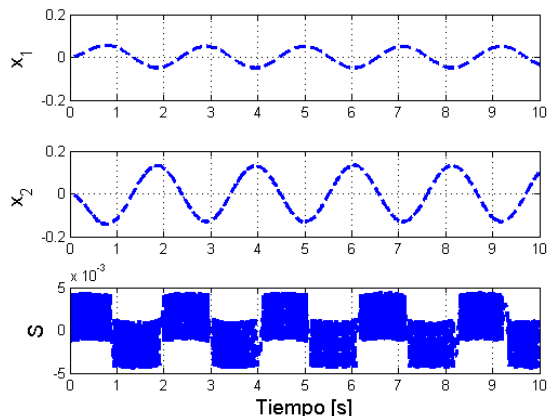


Fig. 2. Dinámica del sistema en lazo cerrado (27)-(30) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (40).

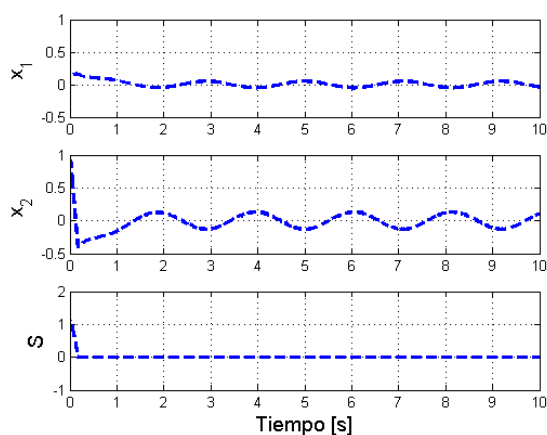


Fig. 3. Dinámica del sistema en lazo cerrado (27)-(30) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (40) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 1$.

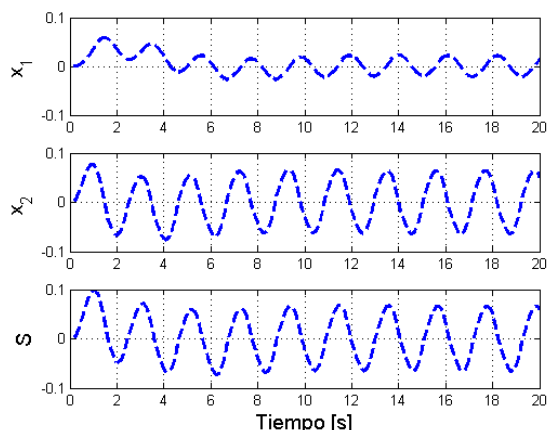


Fig. 4. Dinámica del sistema en lazo cerrado (27)-(30) afectado por perturbación armónica acoplada (40).

5. CONCLUSIONES

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 se extiende hacia los sistemas dinámicos discontinuos, quizá con MD. Los sistemas de

modo deslizante demuestran que son capaces no sólo de rechazar perturbaciones acopladas con conocimiento *a priori* de las cotas superiores en sus magnitudes, sino también de la atenuación de perturbaciones acopladas y desacopladas de clase \mathcal{L}_2 .

REFERENCIAS

T. Basar y P. Bernhard. *\mathcal{H}_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Birkhauser, Boston, 1995.

H. Benderradji, A. Benamor, L. Chrifi-Alaoui, P. Bussy y A. Makouf. Second order sliding mode induction motor control with a new Lyapunov approach. *2012 - 9th International Multi-Conference on Systems, Signal and Devices*, pp. 1-6, 2012.

F. H. Clarke, F.H. *Optimization and Non-smooth Analysis*. Wiley Interscience, New York, 1988.

F. Castaños and L. Fridman. Dynamic switching surfaces for output sliding mode control: An \mathcal{H}_∞ approach. *Automatica*, 2011.

A. Estrada, A. Loria, R. Santiesteban, y L. Fridman. Lyapunov stability analysis of a twisting based control algorithm for systems with unmatched perturbations. *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pp. 4586-4591. 2011.

A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1988.

A. Isidori y A. Astolfi. Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control.* **37**(9), pp. 1283-1293. 1992.

Y. Orlov. *Discontinuous Systems - Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*. Springer-Verlag, London, UK, 2009.

Y. Orlov, Y. Aoustin y C. Chevallereau. Finite time stabilization of a perturbed double integrator-Part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control.* **56**(3), pp. 614-618. 2011.

U. Ponce, Y. Orlov y L. Aguilar. Nonsmooth \mathcal{L}_2 -gain analysis of twisting controller. *2013 6th International Scientific Conference on Physics and Control* San Luis Potosí, México. Ref. 27. 2013.

R. Santiesteban, L. Fridman y J.A. Moreno. Finite-time convergence analysis for "twisting" controller via a strict Lyapunov function. *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems* pp. 1-6. 2010.

V. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag, Berlin. 1992.

A.J. Van Der Shaft. \mathcal{L}_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Trans. Autom. Control*, **37**(6), pp. 770-784. 1992.

J. Zhang, T. Shen y X. Jiao. \mathcal{L}_2 -gain analysis and feedback design for discontinuous time-delay systems based on functional differential inclusion. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pp. 5114-5119. 2009.

G. Zhao y J. Wang. Finite time stability and \mathcal{L}_2 -gain analysis for switched linear systems with state-dependent switching. *Journal of the Franklin Institute.* **350**, pp. 1075-1092. 2013.