

# Diseño de observadores para sistemas mecánicos: enfoque disipativo y modos deslizantes

W. Alejandro Apaza-Pérez, \* Leonid Fridman, \*\*  
Jaime A. Moreno. \*\*\*

\* Universidad Autónoma de México, UNAM. Facultad de Ingeniería.  
C.P. 04510 México D.F. (e-mail: alegosmis@matmor.unam.mx).

\*\* Universidad Autónoma de México, UNAM. Facultad de Ingeniería.  
C.P. 04510 México D.F. (e-mail: lfridman@unam.mx)

\*\*\* Universidad Autónoma de México, UNAM. Instituto de Ingeniería.  
C.P. 04510 México D.F. (e-mail: JmorenoP@iingen.unam.mx)

---

**Resumen:** En este trabajo se propone una técnica en el diseño de observadores, para una clase de sistemas mecánicos, que son no lineales de grado relativo dos respecto a entradas desconocidas. La técnica de diseño presenta un esquema en cascada, que combina dos métodos: disipatividad y modos deslizantes. La primera, es usada para asegurar la convergencia a una región acotada de las dinámicas de estimación, que garantiza la utilización de un diferenciador por modos deslizantes y así obtener convergencia en tiempo finito a los estados reales. El diseño de estos observadores se reduce a la resolución de desigualdades matriciales, que en muchos casos puede ser llevada a una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés); mencionaremos una alternativa para llevar la desigualdad matricial obtenida a una LMI.

*Palabras Claves:* Observadores no lineales, observadores con entrada desconocida, observadores de sistemas no lineales, disipatividad, modos deslizantes.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

*Motivación.* La observación de estados consiste en reconstruir las variables de estado de una planta, a partir de las variables de entrada y salida (consideradas disponibles) y el modelo de la planta. En la práctica, nos encontramos con al menos dos inconvenientes usuales, para el diseño de estos observadores. *a)* La presencia de entradas de naturaleza arbitraria o desconocidas (tales como perturbaciones, ruidos, dinámicas no modeladas), dando lugar al problema de observación con entradas desconocidas. *b)* Además de la presencia de entradas desconocidas, el modelo puede incluir términos no lineales, que a diferencia de los sistemas lineales (ver Hautus (1983), Moreno (2001)), no existe un procedimiento sistemático para el diseño del observador, pero la solución existe para varios casos particulares.

Dentro de los métodos que hacen frente a los dos inconvenientes anteriores, mencionamos a los del enfoque disipativo y los de modos deslizantes.

El enfoque disipativo en el diseño de observadores para sistemas no lineales con entradas conocidas, fue iniciada en el trabajo (Moreno (2004)) y ampliada al caso de entradas completamente desconocidas<sup>1</sup> (ver (Rocha-Cózatl et al. (2004), Rocha-Cózatl et al. (2011))), en la que se diseñan observadores continuos bajo ciertas condiciones, entre ellas la condición de *grado relativo uno*, de la salida del sistema respecto a la entrada desconocida. Si esta condición no

se satisface, es imposible para cualquier método, diseñar un observador con entrada completamente desconocida. Así, para tener la oportunidad de diseñar observadores en esta situación, se requiere conocer alguna característica de la entrada desconocida, por ejemplo que sea acotada, pero con el enfoque disipativo solo se tiene *estabilidad práctica*<sup>2</sup> de la dinámica de estimación, es decir solo se puede asegurar que los estados estimados converjan a una región acotada de los reales, pero no asintóticamente, presentándose aquí una limitación; aunque es posible hacer a esta región arbitrariamente pequeña, elevando las ganancias del observador (Moreno (2005), Moreno (2008)).

En el método de observadores por modos deslizantes, se consideran sistemas no lineales con entrada desconocida acotada (la cota es conocida), donde la condición de *grado relativo uno*, ya no es una limitación. Los observadores diseñados por este método son discontinuos, que presentan propiedades de convergencia a cero en tiempo finito de la dinámica de estimación, pero por lo general se requiere la propiedad de *entrada-acotada estado-acotado* (BIBS por sus siglas en inglés) del sistema a observar o de la *dinámica de estimación* (ver por ejemplo Davila et al. (2005), Fridman et al. (2008), Davila et al. (2009), Angulo et al. (2013)), que a menudo es asumida como una suposición satisfecha, presentándose otra limitación. Adicionalmente, existe una amplia referencia respecto a la metodología,

---

<sup>1</sup> No se conoce ninguna característica de la entrada desconocida.

<sup>2</sup> Las trayectorias convergen a una región acotada del origen.

entre ellas [Spurgeon (2008)].

Lo que se pretende en este trabajo, es diseñar un observador para una clase de sistemas no lineales (no necesariamente estables o BIBS), de grado relativo dos respecto a la entrada desconocida. Por las características del sistema que consideraremos, no es posible diseñar un observador que converja exactamente, sin error residual, solo con el método disipativo. Por otro lado, en modos deslizantes se pretende que las suposiciones usuales sean relajadas y/o sustituidas por otras más accesibles de ser comprobadas, por ejemplo en (Fridman et al. (2008)) se requiere estabilidad local del sistema original; en (Davila et al. (2009)) se requiere que la variación del término no lineal, respecto al error de estimación sea acotada.

Así, la técnica para diseñar un observador para la clase de sistemas considerados, combinará ambos métodos bajo una estructura en cascada: el enfoque disipativo, será usada para asegurar la convergencia a una región acotada de las dinámicas de estimación, que permite garantizar la utilización de un diferenciador por modos deslizantes (Levant (1998)), en la salida de la dinámica del error de estimación disipativa, obteniéndose convergencia robusta y en tiempo finito a los estados reales. Esta propiedad de convergencia en tiempo finito es importante en otro tipos de sistemas, por ejemplo los sistemas híbridos (Fridman et al. (2011)).

*Principal contribución.* Se presenta una técnica de diseño de observadores, con un esquema en cascada que combina los métodos disipativo y modos deslizantes. Donde el sistema (mecánico) considerado tiene grado relativo dos respecto a la entrada desconocida y no asumimos suposiciones de propiedades BIBS en la estructura de los sistemas, de tal forma que no es posible diseñar un observador con entradas desconocidas por ninguno de los dos métodos de manera independiente, y dicho sistema tiene la posibilidad de ser inestable. El diseño del observador, se reduce a resolver una desigualdad matricial.

El resto del trabajo está organizada como sigue. En la sección 2, realizamos el planteamiento del problema y presentamos el resultado principal del trabajo, seguido de un algoritmo, que permite llevar la desigualdad matricial obtenida a una LMI. En la sección 3, mostramos un ejemplo de un sistema inestable, para el cual se diseña un observador con la técnica propuesta, verificando el resultado a través de simulaciones. En la sección 4, presentamos la demostración del resultado principal, que se compone de un lema y dos afirmaciones. En la sección 5, se expone las conclusiones a las que se llega, con la realización del trabajo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADO PRINCIPAL

Antes de plantear el problema se introduce algunas definiciones. Dado un sistema no lineal de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x) \end{cases} \quad (\Sigma_{NL})$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  y  $y \in \mathbb{R}^m$  son los vectores estado, entrada y salida, respectivamente.

*Definición 1.* En el sistema  $\Sigma_{NL}$ ,

- Una función  $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega(0, 0) = 0$ , es denominado una *tasa de suministro* para  $(\Sigma_{NL})$ , si  $\omega(y, u)$  es localmente integrable para todo par entrada-salida de  $(\Sigma_{NL})$ ; es decir

$$\int_{t_0}^{t_1} |\omega(y(s), u(s))| ds < \infty, \quad (\forall t_1, t_0 \in \mathbb{R})(t_0 \leq t_1).$$

- Una no linealidad variante en el tiempo  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\psi(t, u) = y$ , continua a pedazos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$  tal que  $\psi(t, 0) = 0$ , es denominado *disipativa* con respecto a la tasa de suministro  $\omega(y, u)$ , si para cada  $t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}^p$

$$\omega(\psi(t, u), u) \geq 0.$$

Si la tasa de suministro  $\omega(y, u)$  es una forma cuadrática

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$  y  $Q, R$  son simétricas, se abrevia por  $\{Q, S, R\}$ -disipativa.

### 2.1 Planteamiento del problema

Consideremos el siguiente sistema no lineal, cuya salida es de grado relativo dos, respecto a la entrada desconocida.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \psi(x_1, x_2) + w(t, x_1, x_2), \\ y = x_1, \end{cases}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados;  $y \in \mathbb{R}$  la salida medida;  $\psi(\cdot, \cdot)$  no linealidad de los estados, localmente Lipschitz, y Lipschitz respecto a la segunda variable (con constante de Lipschitz  $L_2 > 0$ );  $w(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}$  la entrada desconocida tal que  $|w(t, x_1, x_2)| \leq K$  (acotada) y el sistema no tiene escape a infinito en tiempo finito.

*Comentario 2.* El sistema  $\Sigma$ , no es necesariamente estable, y  $\psi$  no necesariamente tiene que ser Lipschitz globalmente.

El diseño del observador consiste de dos partes:

- Como el sistema considerado presenta grado relativo 2, no es posible diseñar un observador con solo el método disipativo, lo que se obtiene con el método es estabilidad práctica. Así, tenemos la primera estructura:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 = \psi(x_1, \hat{x}_2 + l_3(\hat{x}_1 - y)) + l_2(\hat{x}_1 - y), \end{cases} \quad (2)$$

definiendo  $e_1 := \hat{x}_1 - x_1$  y  $e_2 := \hat{x}_2 - x_2$ , obtenemos el siguiente sistema, a la que nos referiremos como *dinámica de error disipativo*:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + l_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = \psi(x_1, x_2 + e_2 + l_3 e_1) - \psi(x_1, x_2) + l_2 e_1 - w. \end{cases} \quad (3)$$

Definiendo una nueva no linealidad a partir de  $\psi$

$$\phi(x, h) = \psi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2 + h),$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ ; reescribimos el anterior sistema de la siguiente manera

$$E : \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + l_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = u + l_2 e_1 - w, \\ u = -\phi(x, z), \\ z = e_2 + l_3 e_1, \end{cases}$$

donde  $l_1, l_2, l_3$  son escalares a diseñar, tal que las trayectorias  $e_1$  y  $e_2$  converjan a una región acotada en tiempo finito.

ii) En los modos deslizantes, lo anterior  $i$ ) permite garantizar que después de un tiempo finito, la trayectoria  $e_1 = \hat{x}_1 - y$  tendrá derivada temporal<sup>3</sup> Lipschitz ( $L_f$  constante de Lipschitz), con lo que es posible utilizar un diferenciador de primer orden por modos deslizantes (Levant (1998)):

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -1.5L_f^{\frac{1}{2}}|z_0 - e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - e_1) + z_1, \\ \dot{z}_1 = -1.1L_f \text{sign}(z_0 - e_1), \end{cases} \quad (4)$$

donde  $z_0, z_1$  converge en tiempo finito a  $e_1$  y su derivada temporal, respectivamente.

Así, de  $i$ ) y  $ii$ ) la siguiente estructura, será candidata a ser un observador robusto y en tiempo finito del sistema  $\Sigma$ .

$$O_\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 = \psi(x_1, \hat{x}_2 + l_3(\hat{x}_1 - y)) + l_2(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{z}_0 = -1.5L_f^{\frac{1}{2}}|z_0 - (\hat{x}_1 - y)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - (\hat{x}_1 - y)) + z_1, \\ \dot{z}_1 = -1.1L_f \text{sign}(z_0 - (\hat{x}_1 - y)), \\ \tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - z_0, \\ \tilde{x}_2 = \hat{x}_2 + l_1(\hat{x}_1 - y) - z_1, \end{cases}$$

donde  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  serán la estimaciones en tiempo finito de los estado  $x_1, x_2$ ; respectivamente.

*Comentario 3.* Como ambas subestructuras del observador inician simultáneamente, dentro del intervalo de tiempo finito en que las trayectorias de la primera estructura ingresan a una región acotada, no se genera comportamientos indeseados como el escape al infinito en tiempo finito en la segunda subestructura, esto es respaldado por el lema 12.

Para obtener las características deseadas de nuestro observador, realizamos la siguiente suposición:

*Suposición 4.* La no linealidad  $\phi(x, h)$  es  $\{q, s, r\}$ -disipativa, es decir:

$$\begin{bmatrix} \phi(x, h) \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q & s \\ s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x, h) \\ h \end{bmatrix} \geq 0.$$

*Comentario 5.* Una no linealidad puede ser disipativa respecto a varias tasas de suministro, donde algunas describirán mejor a la no linealidad que otras. En particular, tenemos que si  $\psi(\cdot, \cdot)$  es Lipschitz respecto a la segunda variable, entonces  $\phi(\cdot, \cdot)$  es Lipschitz respecto a la última variable. Así, en particular la no linealidad  $\phi(x, h)$  es  $\{-1, 0, L_2^2\}$ -disipativa, respecto a  $h$ .

## 2.2 Resultados

La siguiente proposición, es el resultado principal del trabajo.

*Proposición 6.* Asíumase que la suposición 4, es satisfecha. Si existen  $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0$  y  $\epsilon > 0, l_1, l_2, l_3$  escalares tales que

$$\begin{bmatrix} 2(l_1 p_1 + l_2 p_2) + r l_3^2 + \epsilon p_1 & \star & \star \\ p_1 + l_1 p_2 + l_2 p_3 + r l_3 + \epsilon p_2 & 2p_2 + r + \epsilon p_3 & \star \\ p_2 - s l_3 & p_3 - s & q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5)$$

es satisfecha, entonces con

$$L_f > R \left( L_2 \sqrt{l_3^2 + 1} + \sqrt{(l_1^2 + l_2)^2 + l_1^2} \right) + K,$$

donde  $R = \frac{4K \max\{|p_2|, p_3\} + \delta}{\epsilon \lambda_{\min}(P)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ , (y  $\delta > 0$  una constante arbitrariamente pequeña); el sistema  $O_\Sigma$  es un observador de  $\Sigma$ , cuyas estados de estimación convergen a los verdaderos en tiempo finito.

Teniendo en cuenta el comentario 5, obtenemos el siguiente corolario.

*Corolario 7.* Si existen  $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0$  y  $\epsilon > 0, l_1, l_2, l_3$  escalares tales que

$$\begin{bmatrix} 2(l_1 p_1 + l_2 p_2) + L_2^2 l_3^2 + \epsilon p_1 & \star & \star \\ p_1 + l_1 p_2 + l_2 p_3 + L_2^2 l_3 + \epsilon p_2 & 2p_2 + L_2^2 + \epsilon p_3 & \star \\ p_2 & p_3 & -1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6)$$

es satisfecha, entonces con

$$L_f > R \left( L_2 \sqrt{l_3^2 + 1} + \sqrt{(l_1^2 + l_2)^2 + l_1^2} \right) + K,$$

donde  $R = \frac{4K \max\{|p_2|, p_3\} + \delta}{\epsilon \lambda_{\min}(P)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ , (y  $\delta > 0$  una constante arbitrariamente pequeña); el sistema  $O_\Sigma$  es un observador de  $\Sigma$ , cuyas estados de estimación convergen a los verdaderos en tiempo finito.

*Comentario 8.* Según la proposición 6 y el corolario 7, el diseño de los observadores se reduce a encontrar los parámetros  $P = P^T > 0, l_1, l_2, l_3$  y  $\epsilon > 0$  tal que satisfaga la desigualdad matricial, pero esta no es una LMI.

## 2.3 Algoritmo para llevar a LMI

Daremos una alternativa para llevar la desigualdad matricial (5) a una LMI, y de las varias herramientas computacionales para resolver desigualdades matriciales, se empleará MatLab. Donde consideramos las siguientes representaciones matriciales del sistema  $E$ , con  $e = [e_1 \ e_2]^T$

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + a)e + D(u + w), \\ z = (C + c)e, \end{cases} \quad (7)$$

con las siguientes notaciones  $A = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [l_3 \ 0], c = [0 \ 1].$$

La desigualdad matricial (5), es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} P(A + a) + (A + a)^T P + r(C^T + c^T)(C + c) + \epsilon P & \star \\ B^T P - sC & q \end{bmatrix} \leq 0.$$

Realizando el cambio  $PA = L$ , asumiendo que  $r > 0$  y que la desigualdad es estricta

$$\begin{bmatrix} L + Pa + L^T + a^T P + r(C^T c + c^T C + c^T c) + \epsilon P & \star \\ B^T P - sC & q \end{bmatrix} - [C \ 0]^T r [C \ 0] > 0,$$

<sup>3</sup> Derivada respecto al tiempo.

y como el primer sumando anterior es  $> 0$  (esto porque  $C^T C \geq 0$ ), aplicando el lema de Schur (complemento de Schur), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon} & & & & & & * \\ & * & & & & & * \\ -C^T L + L^T + Pa + a^T P + \epsilon P + r(C^T c + c^T C + c^T c) & & & & & & * \\ 0 & & & & & & q \\ & & & & & & B^T P - sC - sc \end{bmatrix} < 0,$$

una desigualdad matricial lineal (LMI).

Con los parámetros que satisfacen la desigualdad matricial, se estima:

- $R = \frac{4K \max\{|p_2|, p_3\} + \delta}{\epsilon \lambda_{\min}(P)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ , el radio de una bola cerrada centrada en el origen a la que las trayectorias del error disipativo convergen, (con  $0 < \delta$  una constante arbitrariamente pequeña) [ver afirmación 2, sec. 4].
- $L_f = R(L_2 \sqrt{l_3^2 + 1} + \sqrt{(l_1^2 + l_2^2) + l_1^2}) + K$ , la constante de Lipschitz de  $\hat{e}_1$  [ver desig. (11), sec. 4].

Con la finalidad de que los parámetros  $R$ ,  $L_f$  no sean arbitrariamente grandes, podemos adicionar a la LMI algunas restricciones:

$$|p_2| < \delta_1, |p_1 - p_3| < \delta_2, -\delta_{3i} < l_3 < -\delta_{3s}$$

donde  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_{3i}$ ,  $\delta_{3s}$  son constantes no arbitrariamente grandes, esto resulta por observar que los eigenvalores de  $P$ , son de la forma:  $\frac{p_1 + p_2 \pm \sqrt{(p_1 - p_3)^2 + 4p_2^2}}{2}$ .

### 3. EJEMPLO

Para ilustrar esta técnica de diseño, lo hacemos a través del siguiente sistema inestable:

*Ejemplo 9.* Considérese el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{\sin(2x_1)}{2(1 + \cos(x_1)^2)} x_2 - 9.8 \frac{\sin(x_1)}{1 + \cos(x_1)^2} + w(t, x_1, x_2), \\ y = x_1 \end{cases} \quad (8)$$

donde la entrada desconocida es de la forma  $w(t, x_1, x_2) = 0.3 \sin(t) + 0.4$ , como la no linealidad

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\sin(2x_1)}{2(1 + \cos(x_1)^2)} x_2 - 9.8 \frac{\sin(x_1)}{1 + \cos(x_1)^2}$$

es Lipschitz respecto a la segunda variable ( $L_2 = 1/4$  ctte. Lipschitz), se aplica el resultado.

Resolviendo la desigualdad (6) para este sistema, obtenemos los siguientes valores en la tabla 1.

Así, el observador propuesto es dado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - 2,5735(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 = \psi(x_1, \hat{x}_2 - 0,4888(\hat{x}_1 - y)) - 5,3637(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{z}_0 = -1,5\sqrt{74,1794}|z_0 - (\hat{x}_1 - y)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - (\hat{x}_1 - y)) + z_1, \\ \dot{z}_1 = -1,1(74,1794)\text{sign}(z_0 - (\hat{x}_1 - y)), \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 - z_0, \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2 - 2,5735(\hat{x}_1 - y) - z_1. \end{cases} \quad (9)$$

Para aspectos de simulación, consideraremos las condiciones iniciales  $x_1(0) = -0.5$ ,  $x_2(0) = 6.3$ ,  $\hat{x}_1(0) = 30$ ,  $\hat{x}_2(0) = 30$ ,  $z_0(0) = 0$ ,  $z_1(0) = 0$ ; con lo que obtenemos las siguientes gráficas: figura 1, figura 2 y figura 3.

Tabla 1. Parámetros hallados.

Variables	valores
$P$	$\begin{bmatrix} 2,7740 & -0,7705 \\ -0,7705 & 0,7766 \end{bmatrix}$
$l_1$	-2,5735
$l_2$	-5,3637
$l_3$	-0,4888
$\epsilon$	0,44
$\lambda_{\min}(P)$	0,5139
$\lambda_{\max}(P)$	3,0367
$R$	23,3771
$L_f$	74,1794
$\delta$	0,0001
$\delta_1$	0,78
$\delta_2$	7
$\delta_{3i}$	2
$\delta_{3f}$	-1

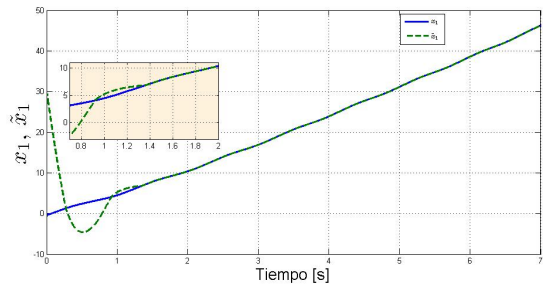


Fig. 1. Gráfica de las trayectorias  $\tilde{x}_1$ ,  $x_1$ .

*Comentario 10.* En la Fig. 1, la trayectoria  $\tilde{x}_1$  converge exactamente y en tiempo finito a  $x_1$ . En la fig. 2, la trayectoria  $\hat{x}_2$  solo converge a una región de  $x_2$ , mientras  $\hat{x}_2$  converge exactamente y en tiempo finito a  $x_2$ .

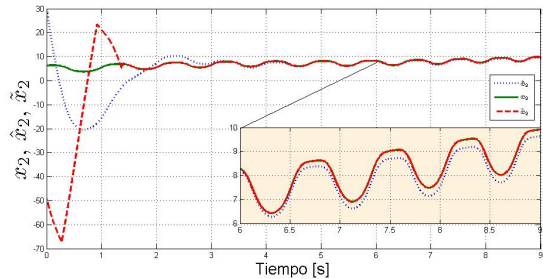


Fig. 2. Gráfica de las trayectorias  $x_2$ ,  $\hat{x}_2$ ,  $\tilde{x}_2$ .

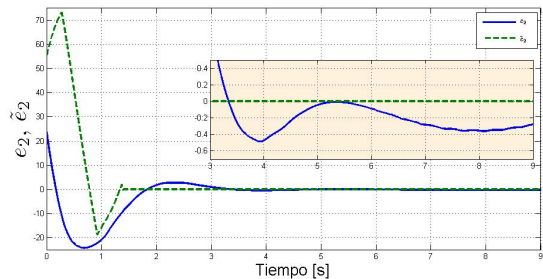


Fig. 3. Gráfica  $e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$ ,  $\tilde{e}_2(t) = \tilde{x}_2(t) - x_2(t)$ .

### 4. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 6

Ahora mencionamos el siguiente lema que será útil, en las afirmaciones posteriores,

*Lema 11.* Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|(x, y)\| \leq \frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  (no nulos simultáneamente); entonces

$$|ax + by| \leq R.$$

**Prueba.** Tenemos las siguientes desigualdades

$$\|(x, y)\| \leq \frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$(ax)^2 + (ay)^2 + (bx)^2 + (by)^2 \leq R^2,$$

por otro lado, tenemos  $2abxy \leq (ay)^2 + (bx)^2$ , así

$$(ax)^2 + 2abxy + (by)^2 \leq R^2,$$

$$|ax + by| = \sqrt{(ax + by)^2} \leq R.$$

□

La prueba de la proposición 6, consta de las siguientes afirmaciones, donde se supone válidas las hipótesis de la proposición 6.

*Afirmación 1.* Considerando la función cuadrática  $V(e) = e^T P e$ , se tiene

$$\dot{V}(e(t)) < 0, \quad \text{para } \|e(t)\| > \frac{4Kp_m}{\epsilon\lambda_{\min}(P)}. \quad (10)$$

**Prueba.** Sea  $V(e) = e^T P e$  definida positiva, donde  $e = [e_1 \ e_2]^T$ . Derivando a lo largo de las trayectorias

$$\dot{V}(e) = 2\dot{e}^T P e,$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2(l_1 p_1 + l_2 p_2) & * & * \\ p_1 + l_1 p_2 + l_2 p_3 & 2p_2 & * \\ p_2 & p_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ u \end{bmatrix} - \\ &\quad - 2w(p_2 e_1 + p_3 e_2), \\ &\leq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ -\phi(x, z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -rl_3^2 - \epsilon p_1 & * & * \\ -rl_3 - \epsilon p_2 & -r & -\epsilon p_3 & * \\ sl_3 & s & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ -\phi(x, z) \end{bmatrix} + \\ &\quad + 2|w|p_m(|e_1| + |e_2|); \quad p_m = \max\{|p_2|, p_3\} \\ &\leq - \begin{bmatrix} \phi(x, z) \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q & s \\ s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x, z) \\ z \end{bmatrix} - \epsilon e^T P e + 4Kp_m \|e\|, \\ &\leq -(\epsilon\lambda_{\min}(P)\|e\| - 4Kp_m)\|e\|. \end{aligned}$$

Así, para  $\|e\| > \frac{4Kp_m}{\epsilon\lambda_{\min}(P)}$  se tiene  $\dot{V}(e) < 0$ .

□

*Afirmación 2.* Toda trayectoria del sistema  $E$ , converge a la región compacta  $V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2])$  (contenida en  $D = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu}\}$ ) en tiempo finito  $T_0$ ; donde  $\mu = \frac{4Kp_m + \delta}{\epsilon\lambda_{\min}(P)}$  ( $\delta > 0$  arbitrario). Además una estimación de una cota superior  $T_0 \leq T$ , esta dada por:

- $T = 0$ , si  $e(t_0) \in V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2])$ ;
- $T = \frac{\lambda_{\min}(P)r^2 - \lambda_{\max}(P)\mu^2}{\epsilon\lambda_{\min}(P)\mu^2 - 4Kp_m\mu} > 0$ ,

si  $e(t_0) \notin V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2])$  y  $\|e(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}r$ .

**Prueba.** Por un lado, tenemos que  $V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2])$  es un conjunto invariante positivamente, esto porque para todo  $x(t) \in fr(V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2]))$  se tiene  $\dot{V}(x(t)) < 0$ .

Sea  $0 < \alpha = \min_{\mu \leq \|e\| \leq r} \{\epsilon\lambda_{\min}(P)\|e\|^2 - 4Kp_m\|e\|\}$ ; por otro lado, en general la función

$$f(t) = \epsilon\lambda_{\min}(P)t^2 - 4Kp_m t > 0, \quad \text{para } t > 0,$$

se cumple que  $f'(t) = 2\epsilon\lambda_{\min}(P)t - 4Kp_m > 0$ , con ello  $\alpha = \epsilon\lambda_{\min}(P)\mu^2 - 4Kp_m\mu$ .

Para todo  $t \geq t_0$  tal que

$$e(t) \in V^{-1}([0, \lambda_{\min}(P)r^2]) \setminus V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2]) \subset \{e \in \mathbb{R}^2 : \mu \leq \|e\| \leq r\},$$

se tiene

$$\dot{V}(e(t)) < -\alpha$$

$$V(e(t)) < V(e(t_0)) - \alpha(t - t_0) \leq \lambda_{\min}(P)r^2 - \alpha(t - t_0)$$

transcurridos  $T = \frac{\lambda_{\min}(P)r^2 - \lambda_{\max}(P)\mu^2}{\alpha} > 0$  después de  $t_0$ , la trayectoria se encuentra en  $V^{-1}([0, \lambda_{\max}(P)\mu^2])$ .

□

Considerando el lema y las dos afirmaciones anteriores, con la notación  $R = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\mu$ , y junto con la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |\ddot{e}_1| &= |\dot{e}_2 + l_1 \dot{e}_1|, \\ &= |\psi(x_1, x_2 + e_2 + l_3 e_1) - \psi(x_1, x_2) + (l_1^2 + l_2)e_1 + l_1 e_2 - w|, \\ &\leq L_2|e_2 + l_3 e_1| + |w| + |(l_1^2 + l_2)e_1 + l_1 e_2|, \\ &\leq L_2 R \sqrt{l_3^2 + 1} + K + R \sqrt{(l_1^2 + l_2)^2 + l_1^2}, \\ &= R(L_2 \sqrt{l_3^2 + 1} + \sqrt{(l_1^2 + l_2)^2 + l_1^2}) + K, \end{aligned} \quad (11)$$

que es válida para  $t \geq t_0 + T_0$ , la cual nos permite garantizar la posibilidad de aplicar un diferenciador modos deslizantes (Levant (1998)), para determinar  $\dot{e}_1 = \frac{d(\hat{x}_1 - y)}{dt}$  en tiempo finito (la constante de Lipchitz de  $\dot{e}_1$  es  $L_f = R(L_2 \sqrt{l_3^2 + 1} + \sqrt{(l_1^2 + l_2)^2 + l_1^2}) + K$ ), tenemos que

$$\tilde{x}_2 := \hat{x}_2 + l_1 e_1 - z_1$$

converge al estado  $x_2$  en tiempo finito, así queda demostrado la proposición 6.

Para descartar la posibilidad de tener un comportamiento indeseado, como el escape al infinito en tiempo finito del diferenciador de  $e_1$  en el intervalo de tiempo  $[t_0 + T]$ , se tiene el siguiente resultado.

*Lema 12.* . El algoritmo Super-Twisting

$$\begin{cases} \dot{z}_0(t) = -k_1 |z_0(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0(t)) + z_1(t) + w_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = -k_2 \text{sign}(z_0(t)) + w_2(t), \end{cases} \quad (12)$$

donde  $w_1(t)$  y  $w_2(t)$  son desconocidas pero acotadas  $|w_1(t)| \leq L_1$ ,  $|w_2(t)| \leq L_2$ ; no tiene escape al infinito en tiempo finito.

**Prueba.** Integrando una solución del sistema obtenemos

$$\begin{aligned} z_0(t) &= z_0(t_0) - \int_{t_0}^t k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t (z_1(\tau) + w_1(\tau)) d\tau, \\ z_1(t) &= z_1(t_0) - \int_{t_0}^t k_2 \text{sign}(z_0(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t w_2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

tomando el módulo de cada estado y las hipótesis dadas, obtenemos

$$\begin{aligned} |z_0(t)| &\leq |z_0(t_0)| + \int_{t_0}^t k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau + \int_{t_0}^t |z_1(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |w_1(\tau)| d\tau, \\ |z_1(t)| &\leq |z_1(t_0)| + \int_{t_0}^t k_2 d\tau + \int_{t_0}^t |w_2(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

donde obtenemos que el estado

$$|z_1(t)| \leq |z_1(t_0)| + (k_2 + L_2)(t - t_0), \quad (13)$$

con ello el estado

$$\begin{aligned} |z_0(t)| &\leq |z_0(t_0)| + (|z_1(t_0)| + L_1)(t - t_0) + (k_2 + L_2) \frac{(t - t_0)^2}{2} + \\ &+ \int_{t_0}^t k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau, \\ &\leq \underbrace{|z_0(t_0)| + (|z_1(t_0)| + L_1)(t - t_0) + (k_2 + L_2) \frac{(t - t_0)^2}{2}}_{c(t)} + 1 + \\ &+ \int_{t_0}^t k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau. \end{aligned}$$

Como  $c(t) \geq 1$ , con  $c'(t) \geq 0$  (no decreciente) para  $t \geq t_0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|z_0(t)|}{c(t)} &\leq 1 + \frac{1}{c(t)} \int_{t_0}^t k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau, \\ &\leq 1 + \int_{t_0}^t \frac{k_1 |z_0(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{c(\tau)} d\tau, \\ &\leq 1 + \underbrace{\int_{t_0}^t k_1 \left( \frac{|z_0(\tau)|}{c(\tau)} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

reescribiendo la última desigualdad y como  $\varphi(t) > 0$  tenemos.

$$\begin{aligned} \frac{|z_0(t)|}{c(t)} &\leq \varphi(t), \\ \frac{k_1 \left( \frac{|z_0(t)|}{c(t)} \right)^{\frac{1}{2}}}{(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}} &\leq k_1, \\ \int_{t_0}^T \frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}} dt &\leq \int_{t_0}^T k_1; \quad \text{integrando} \\ \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T)} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} dy &\leq k_1(T - t_0), \\ 2[(\varphi(T))^{\frac{1}{2}} - \underbrace{(\varphi(t_0))^{\frac{1}{2}}}_1] &\leq k_1(T - t_0). \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos  $|z_0(t)| \leq c(t) \left( \frac{t-t_0}{2} k_1 + 1 \right)^2$ , por lo cual las trayectorias del sistema (12) no tienen escape al infinito en tiempo finito.  $\square$

## 5. CONCLUSIONES

Una técnica en el diseño de observadores, cuyos estados de estimación convergen a los reales en tiempo finito, para una clase de sistemas (mecánicos) no lineales de grado relativo dos respecto a entradas desconocidas, ha sido presentado. La técnica se basa en un esquema en cascada que combina los métodos de disipatividad y de modos deslizantes. El diseño es computacionalmente simple en muchos casos, puesto que es posible reducirlo a la solución de un problema LMI, para lo cual existen métodos numéricos altamente eficientes.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen por el apoyo financiero de CONA-CyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología): 132125, CVU 419644; PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a

Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) IN 113614, IN 113613; Fondo de Colaboración del II-FI UNAM IISGBAS-109-2013.

## REFERENCIAS

- M. Hautus (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50, 353-368.
- A. Levant (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34, 379-384.
- J. Moreno (2001). Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 3366-3371.
- J. Moreno (2004). Observer design for nonlinear systems: a dissipative approach. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control (SSSC 2004)*. Oaxaca, Mexico, 735-740, December.
- E. Rocha-Cózatl and J. Moreno (2004). Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, 615-602.
- J. Moreno (2005). Approximate observer error linearization by dissipativity methods. *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*. Berlin, Springer-Verlag, 2005. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 322, 35-51.
- J. Davila, L. Fridman and A. Levant (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50, 1785-1789.
- J. Moreno (2008). Dissipative design of PI-Observers for nonlinear systems. *Research in Computing Science. Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering*, 36, 85-94.
- L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards and X. Yan (2008). Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, 399-412.
- S. K. Spurgeon (2008). Sliding mode observers: a survey. *International Journal of Systems Science*, Vol. 39, 751-764.
- J. Davila, L. Fridman, A. Pisano and E. Usai (2009). Finite-time state observation for non-linear uncertain systems via higher-order sliding modes. *International Journal of Control*, 82, 1564-1574.
- E. Rocha-Cózatl and J. Moreno (2011). Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21, 1623-1644.
- L. Fridman, J. Davila and A. Levant (2011). Variable structure methods for hybrid systems. *International Journal of Systems Science*, 42, 1843-1845.
- M. T. Angulo, L. Fridman and Jaime Moreno (2013). Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 49, 2767-2773.