

La Bifurcación de Hopf en una Clase de Sistemas Lineales por Pedazos

Juan Castillo* Fernando Verduzco** Enrique Comer***
Ricardo Femat****

* *Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
(correo-e: juanc@mat.uson.mx).*

** *Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
(correo-e: verduzco@gauss.mat.uson.mx).*

*** *Departamento de Sistemas y Computación, Instituto Tecnológico de
Tijuana, México. (correo-e: comer@cemati.org)*

**** *División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, San Luis Potosí,
México. (correo-e: rfemat@ipicyt.edu.mx.)*

Resumen: En este trabajo se analiza mediante una forma normal, la dinámica en la región de deslizamiento de una clase de sistemas lineales por pedazos. Se establece un teorema en el que se dan condiciones suficientes para que el campo vectorial, definido en la región de deslizamiento, presente la bifurcación de Hopf en un equilibrio.

Palabras clave: Forma normal, deslizamiento, bifurcación de Hopf.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los fenómenos más interesantes que pueden presentar los sistemas suaves por pedazos es el movimiento deslizante. Este fenómeno ocurre en una región sobre una variedad que particiona el espacio fase llamada región de deslizamiento. El análisis de bifurcaciones en sistemas suaves por pedazos que presentan deslizamiento ha captado mucho la atención en los últimos años, por ejemplo en (M. di Bernardo et al. (2008) y Yu. A. Kuznetsov et al. (2003)). También existe un gran interés en analizar las singularidades en sistemas con deslizamiento, por ejemplo en la cita (M.R. Jeffrey et al. (2009)) muestran que la dinámica local alrededor de la singularidad de doble tangencia, depende del salto en dirección del campo vectorial a través de la singularidad. En (A. Colombo et al. (2010)) presentan condiciones para la ocurrencia de la singularidad de doble tangencia y se analiza en particular la singularidad Teixeira en sistemas de control discontinuos.

En este trabajo estudiamos el mismo tipo de sistemas que en las dos citas anteriores, pero para el caso en que los campos vectoriales son lineales, centrandó nuestra atención solamente en el campo deslizante que resulta de la interacción de éstos. De esta manera, al estacionarnos sobre el campo de deslizamiento y al asumir sin pérdida de generalidad que éste se encuentra sobre un plano, estamos en condiciones de utilizar toda la herramienta que ya se conoce, en especial sobre el análisis de bifurcaciones de codimensión 1 y en particular la bifurcación de Hopf (ver J. Guckenheimer et al. (1993)). Ahora bien, la motivación de escoger los campos lineales se debe a que con ellos es suficiente para poder tener dinámicas complejas, es decir, la linealidad por pedazos permite un comportamiento topológicamente equivalente al de un sistema de ecuaciones no-lineal, pudiéndose presentar una amplia gama de fenómenos, inclusive atractores extraños (ver E. Campos-

Cantón et al. (2012)).

El resto del trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 definimos los conceptos matemáticos a utilizar. En la sección 3 establecemos el problema a resolver. En la sección 4 obtenemos, mediante una forma normal, el campo deslizante resultante de la interacción de dos sistemas lineales. Finalmente en la sección 5 mostramos mediante un ejemplo la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en el campo de deslizamiento.

2. PRELIMINARES

Considere el sistema suave por pedazos

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x \in D_1, \\ F_2(x), & \text{si } x \in D_2, \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in R^n$,

$$D_1 = \{x \in R^n : H(x) < 0\},$$

$$D_2 = \{x \in R^n : H(x) > 0\},$$

con $H : R^n \rightarrow R$ y $F_i : R^n \rightarrow R^n$ funciones suaves.

Sea $\Sigma = \{x \in R^n : H(x) = 0\}$ la superficie de conmutación. El sistema suave por pedazos (1) es continuo si $F_i = F_j$ para todo punto de Σ , por el contrario, el sistema es discontinuo (Filippov) si dos vectores diferentes F_i y F_j se pueden asociar a un punto de Σ .

Definición 1. La región de deslizamiento Σ^s del conjunto Σ está dada por la porción de frontera de $H(x)$ para la cual

$$(\nabla H(x)F_1(x))(\nabla H(x)F_2(x)) < 0.$$

Esto es, $\nabla H(x)F_1(x)$ (la componente de $F_1(x)$ normal a $H(x)$) tiene el signo opuesto a $\nabla H(x)F_2(x)$.

Observación 1. $\nabla H(x) \neq 0$ para $x \in \Sigma^s$.

Las soluciones sobre Σ^s se pueden construir con el método convexo de Filippov. El método de Filippov asocia la siguiente combinación convexa $F_s(x)$ de los dos vectores $F_i(x)$ a cada punto deslizante $x \in \Sigma^s$:

$$F_s(x) = (1 - \gamma(x))F_1(x) + \gamma(x)F_2(x), \quad (2)$$

donde

$$\gamma(x) = \frac{\nabla H(x)F_1(x)}{\nabla H(x)(F_1(x) - F_2(x))} \in [0, 1] \quad \forall x \in \Sigma^s.$$

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el sistema lineal por pedazos

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + b_1, & \text{si } n^T(x - q_0) < 0, \\ A_2x + b_2, & \text{si } n^T(x - q_0) > 0, \end{cases} \quad (3)$$

donde $x, b_1, b_2, q_0, n \in R^3$, y $A_1, A_2 \in R^{3 \times 3}$. La superficie de conmutación es el plano definido como

$$\Sigma = \{x \in R^3 : n^T(x - q_0) = 0\}.$$

Sean los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{x \in R^3 : n^T(A_1x + b_1) = 0\}, \\ \pi_2 &= \{x \in R^3 : n^T(A_2x + b_2) = 0\}. \end{aligned}$$

La característica de los planos π_1 y π_2 es que están conformados por puntos en los cuales los flujos de los campos $F_1(x) = A_1x + b_1$ y $F_2(x) = A_2x + b_2$ son tangentes al plano Σ . De esta manera, la existencia de la región de deslizamiento en Σ dependerá de la orientación de los vectores normales de π_1 y π_2 con respecto a Σ , y si es el caso de que exista dicha región, ésta tendrá como fronteras a las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) = 0\} = \Sigma \cap \pi_1 \\ L_2 &= \{x \in \Sigma : n^T(A_2x + b_2) = 0\} = \Sigma \cap \pi_2 \end{aligned}$$

Estas rectas pueden a su vez intersectarse en un punto x_0 , el cual tendrá la característica de ser aquel punto donde ambos campos $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son tangentes a Σ . Diremos que x_0 es un punto de doble tangencia.

Así, si consideramos el sistema

$$Tx = b \quad (4)$$

donde $T = \begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \\ n^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ y $b = \begin{pmatrix} n^T q_0 \\ -n^T b_1 \\ -n^T b_2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$,

de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius el sistema (4) puede presentar las siguientes situaciones

- a) $Ran(T) = Ran(T^*) = 3 \iff$ Solución única
- b) $Ran(T) = Ran(T^*) < 3 \iff$ Infinidad de soluciones
- c) $Ran(T) \neq Ran(T^*) \iff$ Sin solución

donde T^* es la matriz ampliada de T .

Consideremos el primer caso. En esta situación el plano Σ siempre quedará dividido en las siguientes regiones alrededor del punto de doble tangencia (ver figura 1),

Región de deslizamiento:

$$\Sigma^s = \{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) > 0 \text{ y } n^T(A_2x + b_2) < 0\},$$

Región de escape:

$$\Sigma^e = \{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) < 0 \text{ y } n^T(A_2x + b_2) > 0\},$$

Región de cruce:

$$\Sigma^c = \{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1)n^T(A_2x + b_2) > 0\}.$$

Nuestro objetivo es encontrar una forma normal para (3) satisfaciendo la condición $|T| \neq 0$ y encontrar condiciones suficientes para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en equilibrios sobre el campo de deslizamiento.

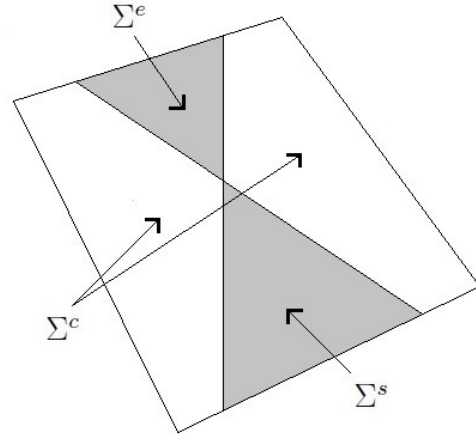


Figura 1. Regiones alrededor del punto x_0 .

4. FORMA NORMAL

En esta sección introducimos un cambio de coordenadas que transformará el sistema (3) en una forma *canónica*, en donde el análisis será más sencillo.

Lema 1. El cambio de coordenadas

$$y = T(x - x_0),$$

donde $T = \begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \\ n^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ y $x_0 \in \Sigma \cap \pi_1 \cap \pi_2$, transforma al sistema (3) en

$$\dot{y} = \begin{cases} \bar{A}_1 y + \bar{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \bar{A}_2 y + \bar{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (5)$$

donde $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} e_2^T \\ n^T A_1^* T^{-1} \\ n^T A_2^* T^{-1} \end{pmatrix}$, $\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} e_3^T \\ n^T A_1^* T^{-1} \\ n^T A_2^* T^{-1} \end{pmatrix}$, y $\bar{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ n^T A_1(A_i x_0 + b_i) \\ n^T A_2(A_i x_0 + b_i) \end{pmatrix}$.

Demostración:

Observe que

$$TT^{-1} = I \iff \begin{pmatrix} n^T T^{-1} \\ n^T A_1 T^{-1} \\ n^T A_2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix},$$

de aquí, al aplicar el cambio de variable al plano Σ

$$\begin{aligned} n^T(T^{-1}y + x_0 - q_0) = 0 &\iff n^T T^{-1}y + n^T(x_0 - q_0) = 0 \\ &\iff e_1^T y = 0 \\ &\iff y_1 = 0 \end{aligned}$$

obtenemos el nuevo plano $\bar{\Sigma} = \{y \in R^3 : y_1 = 0\}$.

Al aplicar el cambio de variable a los planos π_i obtenemos los nuevos planos

$$\bar{\pi}_1 = \{y \in R^3 : y_2 = 0\}, \quad y \quad \bar{\pi}_2 = \{y \in R^3 : y_3 = 0\},$$

veamos

$$\begin{aligned} n^T(A_1x + b_1) = 0 &\iff n^T [A_1(T^{-1}y + x_0) + b_1] = 0 \\ &\iff n^T A_1 T^{-1} y + n^T(A_1 x_0 + b_1) = 0 \\ &\iff e_2^T y = 0 \\ &\iff y_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^T(A_2x + b_2) = 0 &\iff n^T [A_2(T^{-1}y + x_0) + b_2] = 0 \\ &\iff n^T A_2 T^{-1} y + n^T(A_2 x_0 + b_2) = 0 \\ &\iff e_3^T y = 0 \\ &\iff y_3 = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar el cambio de variable a los campos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= T\dot{x}, \\ &= T(A_i x + b_i) \\ &= T A_i (T^{-1}y + x_0) + T b_i \\ &= T A_i T^{-1} y + T(A_i x_0 + b_i) \\ &= \bar{A}_i y + \bar{b}_i, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= T A_1 T^{-1} = \begin{pmatrix} n^T A_1 T^{-1} \\ n^T A_1^2 T^{-1} \\ n^T A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ n^T A_1^2 T^{-1} \\ n^T A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix} \\ \bar{A}_2 &= T A_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} n^T A_2 T^{-1} \\ n^T A_1 A_2 T^{-1} \\ n^T A_2^2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3^T \\ n^T A_1 A_2 T^{-1} \\ n^T A_2^2 T^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$y \quad \bar{b}_i = T(A_i x_0 + b_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ n^T A_1 (A_i x_0 + b_i) \\ n^T A_2 (A_i x_0 + b_i) \end{pmatrix}.$$

4.1 Regiones normalizadas

En el sistema normalizado se identifican fácilmente las regiones de deslizamiento, escape y cruce, ver figura 2.

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^s &= \{y \in \bar{\Sigma} : y_2 > 0 \text{ y } y_3 < 0\}, \\ \bar{\Sigma}^e &= \{y \in \bar{\Sigma} : y_2 < 0 \text{ y } y_3 > 0\}, \\ \bar{\Sigma}^c &= \{y \in \bar{\Sigma} : y_2 y_3 > 0\}. \end{aligned}$$

Las fronteras de la región de deslizamiento (ó escape) son las rectas

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \{y \in \bar{\Sigma} : y_2 = 0\} = \bar{\Sigma} \cap \bar{\pi}_1 \\ \bar{L}_2 &= \{y \in \bar{\Sigma} : y_3 = 0\} = \bar{\Sigma} \cap \bar{\pi}_2 \end{aligned}$$

4.2 Campo deslizante normalizado

Siguiendo (2), el campo deslizante se expresa como

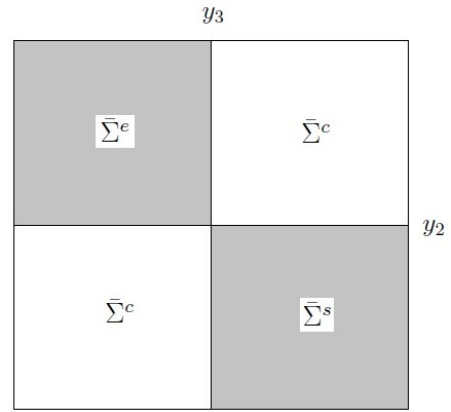


Figura 2. Regiones normalizadas

$$\begin{aligned} F_s(y) &= (1 - \gamma(y))(\bar{A}_1 y + \bar{b}_1) + \gamma(y)(\bar{A}_2 y + \bar{b}_2) \\ &= \bar{A}_1 y + \bar{b}_1 + \gamma(y)((\bar{A}_2 - \bar{A}_1)y + (\bar{b}_2 - \bar{b}_1)) \end{aligned}$$

donde $\gamma(y) = \frac{e_1^T(\bar{A}_1 y + \bar{b}_1)}{e_1^T((\bar{A}_1 - \bar{A}_2)y + (\bar{b}_1 - \bar{b}_2))} = \frac{y_2}{y_2 - y_3}$.

Podemos escribirlo de la siguiente manera

$$F_s(y) = \frac{1}{y_2 - y_3} \tilde{F}_s(y)$$

donde

$$\tilde{F}_s(y) = y_2 \bar{A}_2 y - y_3 \bar{A}_1 y + \bar{b}_2 y_2 - \bar{b}_1 y_3. \quad (6)$$

Sea $z = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix}$ y $\bar{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{i2} \\ b_{i3} \end{pmatrix}$, con

$$\begin{aligned} b_{i2} &= n^T A_1 (A_i x_0 + b_i), \quad b_{i3} = n^T A_2 (A_i x_0 + b_i), \quad i = 1, 2, \\ a_j &= n^T A_1^2 T^{-1} e_j, \quad d_j = n^T A_1 A_2 T^{-1} e_j, \\ c_j &= n^T A_2 A_1 T^{-1} e_j, \quad g_j = n^T A_2^2 T^{-1} e_j, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Entonces, (6) se transforma en

$$\tilde{F}_s(z) = Lz + \frac{1}{2} z^T \mathcal{B} z, \quad (7)$$

donde $L = \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ b_{23} & -b_{13} \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2d_2 & d_3 - a_2 \\ d_3 - a_2 & -2a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{y } B_2 = \begin{pmatrix} 2g_2 & g_3 - c_2 \\ g_3 - c_2 & -2c_3 \end{pmatrix}.$$

Dado que $y_2 - y_3 \neq 0$ en $\bar{\Sigma}^s$ y $\bar{\Sigma}^e$, podemos encontrar los puntos de equilibrio de $F_s(y)$ en el plano $y_1 = 0$, resolviendo el sistema $\tilde{F}_s(z) = 0$. Ahora, resolver este sistema se traduce a encontrar el número de intersecciones entre dos cónicas, el cual es a lo más cuatro para el caso en que las cónicas no sean múltiplo una de la otra y en caso contrario es una infinidad. Es claro que el origen es una de estas intersecciones, sin embargo sabemos que en este punto el campo $F_s(y)$ está indeterminado, entonces podemos decir que el número de equilibrios del campo deslizante comprendido entre dos rectas que se cruzan es a lo más tres ó una infinidad.

5. BIFURCACIÓN DE HOPF

Considere el sistema (7). Suponga que existe un punto $z_0 \in \bar{\Sigma}^s$ tal que:

- C1) $\tilde{F}_s(z_0) = 0$,
- C2) $\sigma(D\tilde{F}_s(z_0)) = \{\pm i\omega_0\}$.

Estamos interesados en determinar cuáles de los diez coeficientes en el sistema (7) son sensibles ante la bifurcación de Hopf, es decir, cuáles coeficientes podemos perturbar para que el sistema presente la bifurcación de Hopf. Considere el sistema perturbado

$$F_p(z, \mu) = Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z + L_1(\mu)z + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}_1(\mu)z,$$

donde $L_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_1(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$, con

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2\mu_5 & \mu_6 \\ \mu_6 & 2\mu_7 \end{pmatrix}, \text{ y } D_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_8 & \mu_9 \\ \mu_9 & 2\mu_{10} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la fórmula dada en (F. Verduzco González (2011)) para calcular la velocidad de cruce (ver Apéndice), para el campo perturbado $F_p(z, \mu)$, en el equilibrio $(z_0, 0)$, obtenemos,

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mu}(z_0, 0) = \begin{pmatrix} z_0^T & 0 & 0 & r_0^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0^T & 0 & 0 & 0 & r_0^T \end{pmatrix},$$

$$DF_p(z_0, 0) = L + z_0^T \mathcal{B},$$

$$D^2 F_p(z_0, 0) = \mathcal{B},$$

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial z \partial \mu}(z_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$z_0^T = (z_{01}, z_{02}),$$

$$r_0^T = (z_{01}^2, z_{01}z_{02}, z_{02}^2),$$

$$\mathcal{L}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{01} & 2z_{02} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{01} & 2z_{02} \end{pmatrix}.$$

Si $B_i = (B_i^1 \ B_i^2)$, y

$$(DF_p^{-1}(z_0, 0))^T (B_1^1 + B_2^2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

entonces

$$d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \alpha z_{01} \\ -\alpha z_{02} \\ -\beta z_{01} \\ 1 - \beta z_{02} \\ 2z_{01} - \alpha z_{01}^2 \\ z_{02} - \alpha z_{01} z_{02} \\ -\alpha z_{02}^2 \\ -\beta z_{01}^2 \\ z_{01} - \beta z_{01} z_{02} \\ 2z_{02} - \beta z_{02}^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1. Considere el sistema en forma normal (5)

$$\dot{y} = \begin{cases} \bar{A}_1 y + \bar{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \bar{A}_2 y + \bar{b}_2, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

Sea $\tilde{F}_s(z) = Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z$ el campo en la región de deslizamiento $\bar{\Sigma}^s$, y z_0 un equilibrio satisfaciendo C1) y C2). Entonces si $d \neq 0$, el sistema perturbado

$$F_p(z, \mu) = Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z + L_1(\mu)z + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}_1(\mu)z$$

presenta la bifurcación de Hopf en $z = z_0$ y $\mu \approx 0$.

5.1 Ejemplo

Considere el sistema no lineal en el plano

$$\dot{z} = \tilde{F}_s(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ -z_1 - 2z_2 + az_1z_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

con $a \neq 0$. Este sistema tiene como equilibrios al origen y

$$z_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(2 - \sqrt{2}) \\ \frac{1}{a}(1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \in \bar{\Sigma}^s.$$

Además, la matriz Jacobiana en z_0 está dada por

$$D\tilde{F}_s(z_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

la cual tiene los valores propios $\pm i\omega_0$, con $\omega_0^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$, por lo que se cumplen las condiciones C1) y C2) en el equilibrio z_0 . Además, la velocidad de cruce d está dada por (8), con $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}a}{\omega_0^2}$. Podemos, entonces, perturbar el sistema original en aquella dirección en la cual la entrada del vector d sea diferente de cero. Por ejemplo, la tercera entrada de d ,

$$d_3 = -\frac{1}{2}\beta z_{01} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

por lo que perturbaremos el coeficiente de z_1 en la segunda ecuación del sistema (9),

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ -z_1 - 2z_2 + az_1z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_3 z_1 \end{pmatrix}.$$

La teoría nos dice que el sistema perturbado presentará la bifurcación de Hopf, cuando el parámetro de bifurcación μ_3 varíe un poco de su valor nominal $\mu_3 = 0$. Para determinar si la bifurcación es no degenerada, debemos determinar el primer coeficiente de Lyapunov.

Siguiendo (J.A. Castillo. (2011)) y el apéndice, el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$l_1 = -\frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{2}).$$

Este coeficiente siempre es negativo, por lo que concluimos que al ocurrir la bifurcación de Hopf, se presenta una órbita periódica atractora para $\mu_3 > 0$. Para que la órbita periódica atractora se localice en la región de deslizamiento se requiere que $a > 0$ y para que se localice en la región de escape se requiere que $a < 0$. Para observar la órbita periódica estable en la región de deslizamiento, tomamos

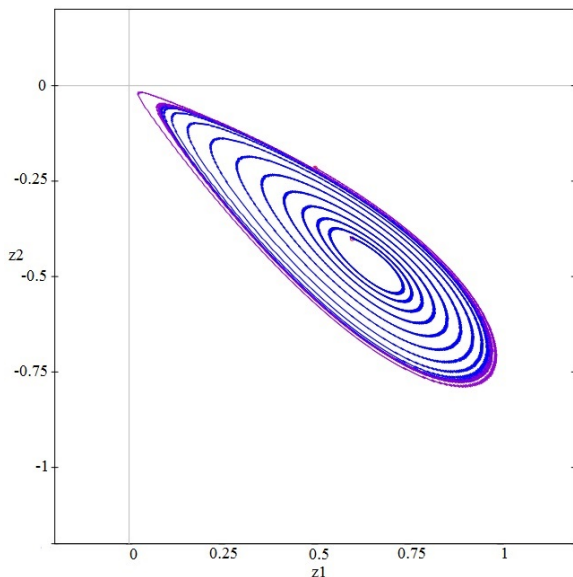


Figura 3. Órbita periódica estable en la región de deslizamiento para $\mu_3 = 0.05$, $a = 1$.

las condiciones iniciales $(0, 0.5, -0.215)$ y $(0, 0.6, -0.4)$, con $\mu_3 = 0.05$, $a = 1$. Ver figura 3.

Observación 2. Aunque los campos vectoriales no presentan oscilación, es decir las matrices $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & -1 \\ g_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son invertibles, se presenta oscilación en el campo de deslizamiento.

6. CONCLUSIONES

Se mostró que es posible la ocurrencia de la bifurcación de Hopf sobre el campo de deslizamiento de un sistema lineal por pedazos discontinuo. Esto fué posible gracias a la forma normal propuesta, la cual nos permitió obtener una expresión canónica del campo de deslizamiento.

AGRADECIMIENTOS

El autor Juan Castillo agradece el apoyo de CONACYT: No. de beca 205856.

REFERENCIAS

- A. Colombo, M. di Bernardo, E. Fossas, M.R. Jeffrey. (2010). Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems. *Systems & Control Letters*, 59 (2010), 615-622.
- A. Colombo, M. di Bernardo, S.J. Hogan, M.R. Jeffrey. (2012). Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems. *Physica D* 241 (2012), 1845-1860.
- A.F. Filippov. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- E. Campos-Cantón, Ricardo Femat, and Guanrong Chen. (2012). Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos* 22, 033121 (2012).

- F. Verduzco González (2011). On a Formula for the Cross Speed at the Hopf Bifurcation. *In Advanced Topics in Nonlinear Chaotic Systems*, 45-61. LAP LAMBERT Academic Publishing.
- J.A. Castillo. (2011). Invariantes en la bifurcación de Hopf. *Tesis de Maestría*.
- J. Guckenheimer, P. Holmes. (1993). Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*.
- M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk. (2008). *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer.
- M.R. Jeffrey, A. Colombo. (2009). The two-fold singularity of discontinuous vector fields. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 8 (2009), 624-640.
- Yu. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Gragnani. (2003). One parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 13, No. 8 (2003), 2157-2188.

Apéndice A. BIFURCACIÓN DE HOPF

Teorema 2. Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in R^n$, $\mu \in R$ tiene un equilibrio (x_0, μ_0) el cual satisface las siguientes propiedades:

H1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ posee un único par de valores propios puramente imaginarios y ningún valor propio real simple nulo.

H2) Sea $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \mu)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, tales que

$$d = \frac{d}{d\mu} (Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0 \quad (A.1)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por $(x_0, \mu_0) \in R^n \times R$ y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, esta dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c\mu + br^2 \end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenspacio generado por $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ el cual coincide en dimensión dos, con el paraboloide $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$.

Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables, mientras que si $l_1 > 0$ son inestables.

Para sistemas en el plano, existe una expresión para calcular el llamado primer coeficiente de Lyapunov l_1 .

Considere el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$, $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_0 R_2), \quad (A.2)$$

donde

$$\begin{aligned}
 R_1 &= (F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) \\
 &\quad - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) \\
 &\quad - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2})|_{x=0} \\
 R_2 &= (F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2})|_{x=0}.
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces, los siguientes cuatro escenarios posibles:

- Si $d > 0$, $l_1 < 0$. El origen es estable para $\mu < 0$, inestable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica estable para $\mu > 0$.
- Si $d < 0$, $l_1 < 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$ y estable para $\mu > 0$. El origen es rodeado por una órbita periódica estable para $\mu < 0$.
- Si $d > 0$, $l_1 > 0$. El origen es estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. Además, el origen es rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu < 0$.
- Si $d < 0$, $l_1 > 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$, estable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu > 0$.

Apéndice B. VELOCIDAD DE CRUCE

Teorema 3. Considere el sistema no-lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

donde $x \in R^n$, $\mu \in R^m$, y F es suficientemente suave. Suponga que existe (x_0, μ_0) tal que

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,

H2) $\sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 3, \dots, n\}$.

Si $v = v_1 + iv_2 \in C^n$ y $w = w_1 + iw_2 \in C^n$ son los vectores propios derecho e izquierdo de $A = DF(x_0, \mu_0)$ con valor propio $i\omega_0$, respectivamente, tales que

$$w_i^T v_j = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$$

entonces la velocidad de cruce d está dada por

$$d = \frac{1}{2} ((w_1 \cdot \mathcal{S}) v_2 + (w_2 \cdot \mathcal{S}) v_1) \quad (\text{B.1})$$

donde $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$, con $S_i = (S_i^1 \ S_i^2 \ \dots \ S_i^n) \in R^{m \times n}$,

y $S_i = F_{i\mu x}(x_0, \mu_0) - (A^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F_i(x_0, \mu_0)$ para $i = 1, \dots, n$.

Observación 3. Para el caso en que $n = 2$, la fórmula (B.1) se escribe de la siguiente manera

$$d = \frac{1}{2} (S_1^1 + S_2^2) \quad (\text{B.2})$$