

Gain Scheduled - Model Predictive Control Applied to Nonlinear Systems[★]

Eduardo Escobar^{*} Jimmy Salgado^{*} Nicanor Quijano^{*}
Juan Saldarriaga^{**}

^{*}Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia (e-mails: e.escobar37@uniandes.edu.co, ej.salgado10@uniandes.edu.co, nquijano@uniandes.edu.co).

^{**}Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia (e-mail: jsaldarr@uniandes.edu.co).

Abstract: This paper introduces a strategy for controlling nonlinear systems, based on the combination of linear Model Predictive Control (MPC) and Gain Scheduling (GS) techniques. The strategy, denoted as Gain Scheduled - Model Predictive Control (GS-MPC) is applied on two hydraulic testbeds. The results are compared to a traditional MPC control. The study cases show positive results for the GS-MPC controller, achieving better control performance (steady state error, overshoot) than the classical MPC controller.

Keywords: Gain Scheduling, Hydraulic Systems, Model Predictive Control, Nonlinear Systems

1. INTRODUCCIÓN

El control predictivo basado en modelo (MPC, por sus siglas en inglés) es un algoritmo de control que se basa en el modelo matemático de un sistema para generar una secuencia de acciones que optimicen unos objetivos de control determinados. Esta estrategia de control puede manejar sistemas de múltiples variables y de gran escala de manera natural, considerando limitaciones y restricciones en el sistema de una forma sencilla. Estas características han hecho que el MPC sea una de las técnicas más utilizadas en la industria [Ocampo-Martinez (2010)].

La gran mayoría de sistemas y fenómenos en la naturaleza tienen un comportamiento no lineal [Khalil (2002)], por lo que es de gran interés poder aplicar MPC a sistemas no lineales. El MPC es un algoritmo altamente dependiente del modelo matemático que se tiene del sistema a controlar. Debido a esto, en el caso de sistemas no lineales puede llegar a ser muy útil trabajar con la representación no lineal del sistema (información más acertada sobre sus dinámicas), en lugar de trabajar con aproximaciones lineales del modelo.

Ya existen estrategias de este tipo, y se conocen en general como Nonlinear Model Predictive Control (NMPC). Sin embargo, la aplicación de MPC en sistemas lineales tiene varias ventajas frente a la aplicación de NMPC. Algunas de estas ventajas son [Camacho and Bordons (2007)]:

- La identificación de modelos no lineales a partir de datos experimentales es aún un problema abierto. Por otra parte, actualmente existen numerosas técnicas de identificación para sistemas lineales, haciendo esta tarea mucho más sencilla.

- Al aplicar MPC en un sistema lineal se puede garantizar que el problema de optimización (OP) asociado a la ley de control es convexo. Esto permite garantizar que se va a encontrar un mínimo global para el OP. Por otro lado, la convexidad en el OP es mucho más difícil de garantizar en MPC aplicado a sistemas no lineales. Esto dificulta la obtención de un mínimo global, y puede llegar a ocasionar problemas de estabilidad en el controlador.
- Al tener un OP lineal y convexo, se pueden reducir costos computacionales y tiempos de cómputo para su solución. Esto es especialmente valioso para aplicaciones en tiempo real.
- El estudio de aspectos tales como estabilidad y robustez desde un punto de vista analítico es mucho más complejo en el caso de NMPC.

Debido a esto, es de gran interés poder aprovechar las ventajas del MPC lineal descritas anteriormente para el control de sistemas no lineales, sin perder tanta información de las dinámicas del sistema al utilizar como modelo tan solo una aproximación lineal del mismo. Una forma de lograr esto es la aplicación de la técnica de Gain Scheduling (GS) [Shamma (1988)]. Esta es una metodología de diseño que consiste en descomponer un controlador no lineal por medio del diseño de un número finito de controladores lineales. Estos controladores son calculados a partir de linealizaciones del sistema no lineal alrededor de varios puntos de equilibrio de una variable determinada.

El objetivo del presente artículo es utilizar las técnicas de GS y MPC de forma conjunta para el control de sistemas no lineales. Para esto se propone la estrategia de Gain Scheduled - Model Predictive Control (GS-MPC). Aunque existen muchas variaciones y versiones del algoritmo MPC, en este artículo se considera el MPC aplicado a sistemas lineales en tiempo discreto, representados en espa-

[★] Este trabajo ha sido apoyado por el proyecto de Colciencias N°548-2012 "Drenaje Urbano y Cambio Climático: Hacia los Sistemas de Alcantarillado del Futuro", patrocinado por Mexichem Colombia S.A.

cio de estados. En el presente artículo se implementan las técnicas de MPC y GS-MPC en dos sistemas hidráulicos sencillos de naturaleza no lineal. Los resultados de ambas técnicas en los casos de estudio son luego comparados, para de esta manera mostrar las mejoras que puede presentar la técnica aquí propuesta.

El resto de este artículo es estructurado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta la formulación y el funcionamiento básico de las técnicas de MPC y GS, y se introduce la estrategia de GS-MPC. Luego, en la Sección 3, se muestra un caso de aplicación del algoritmo GS-MPC para control de nivel en dos sistemas hidráulicos, de uno y dos tanques de agua. Los resultados de este caso de estudio, y su respectivo análisis, son presentados en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se discuten algunas conclusiones obtenidas y el trabajo futuro.

2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

2.1 Model Predictive Control

El MPC es un algoritmo de control multi-objetivo basado en modelo para sistemas dinámicos de múltiples entradas y salidas (MIMO). Este algoritmo se basa en el modelo matemático del sistema o planta a controlar para generar una secuencia de acciones futuras dentro de un horizonte de tiempo finito [Ocampo-Martinez (2010)]. Estas acciones, conocidas como ley de control $u(t)$, tienen como objetivo minimizar una función de costo determinada.

El MPC utiliza una filosofía de horizonte rodante, mejor conocido como *receding horizon*. Este enfoque consiste en tomar decisiones a partir de la predicción del comportamiento futuro del sistema dentro de un horizonte de tiempo finito [Toro (2010)]. Considérese un sistema lineal en tiempo discreto descrito por la siguiente representación en espacio de estados:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de estado del sistema en el tiempo k , $u(k) \in \mathbb{R}^m$ son las entradas, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ son las salidas del sistema y A, B, C, D son matrices de dimensiones adecuadas. En el instante de tiempo k , el algoritmo planea la mejor secuencia de acciones de control futuras $\mathbf{u}^* = [u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(k+H_p-1)]$, donde H_p es un horizonte de predicción finito previamente definido. La determinación de esta secuencia se realiza resolviendo un problema de optimización de la siguiente forma [Maciejowski (2002)]:

$$\min_{\mathbf{u}} J(x, u) \quad (2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) &= x(k) \\ x(k) &\in X, \quad u(k) \in U, \quad k = 0, \dots, H_p-1 \end{aligned}$$

donde X y U son el conjunto de valores que pueden tomar los estados y entradas del sistema, respectivamente, y dependen de las restricciones del sistema. En este problema

$J(x, u)$ es la función de costo del controlador, la cual incluye los objetivos de control del sistema. Generalmente, $J(x, u)$ es una función cuadrática de la forma:

$$J(x, u) = \sum_{j=1}^{H_p} x(k+j)^T Q x(k+j) + u(k+j-1)^T R u(k+j-1) \quad (3)$$

donde Q y R son matrices positivas definidas de dimensiones adecuadas. En la práctica el controlador solo puede realizar el primer movimiento $u^*(k)$. En el instante de tiempo $k+1$ se repite el mismo procedimiento, desplazando el horizonte de predicción.

2.2 Gain Scheduling

Gain Scheduling (GS) es una metodología de diseño utilizada para controlar sistemas no lineales en una variedad de aplicaciones tales como control aeronáutico y aplicaciones militares, entre otras. La metodología de GS consiste en descomponer un controlador no lineal por medio del diseño de un número finito de controladores lineales. Los controladores lineales son habilitados por diferentes variables observables, llamadas variables de *scheduling*, para ser aplicados en diferentes puntos de operación de estas variables [Shamma and Athans (1991)].

El primer paso para el diseño de un controlador utilizando GS es obtener una aproximación lineal de la planta no lineal, la cual incluye un conjunto apropiado de variables de *scheduling*. Considérese un sistema no lineal definido por las ecuaciones $\dot{x} = a(x, u, w, v), z = c_1(x, u, w, v), y = c_2(x, w, v)$, donde a es una función no lineal, c_1 y c_2 son funciones que pueden ser lineales o no lineales, x es el vector de variables de estado, u son las entradas del sistema, y son las salidas medidas del sistema y z es la señal de error que se desea controlar [Rugh and Shamma (2000)]. Las variables w y v son entradas exógenas del sistema.

Para un conjunto de variables de *scheduling* σ , se definen las funciones $x_e(\sigma), u_e(\sigma), w_e(\sigma)$ y $v_e(\sigma)$. Estas funciones definen una familia de equilibrio en un conjunto S para la planta no lineal si se cumple la siguiente ecuación:

$$a(x_e(\sigma), u_e(\sigma), w_e(\sigma), v_e(\sigma)) = 0, \quad \sigma \in S. \quad (4)$$

De forma similar, se define la familia de equilibrio del error y la familia de equilibrio de la salida, dadas por las funciones que cumplen las siguientes dos ecuaciones:

$$z_e(\sigma) = c_1(x_e(\sigma), u_e(\sigma), w_e(\sigma), v_e(\sigma)), \quad \sigma \in S, \quad (5)$$

$$y_e(\sigma) = c_2(x_e(\sigma), w_e(\sigma), v_e(\sigma)), \quad \sigma \in S. \quad (6)$$

En aplicaciones de *tracking*, donde el objetivo de control es que $z(t)$ busque una referencia constante r con un error en estado estacionario igual a cero, la familia de equilibrio debería satisfacer lo siguiente:

$$0 = a(x_e(\sigma), u_e(\sigma), w_e(\sigma), v_e(\sigma))$$

$$0 = z_e(\sigma) - c_1(x_e(\sigma), u_e(\sigma), w_e(\sigma), v_e(\sigma)).$$

A partir de esto un σ podría ser escogido para incluir r . En el caso general las variables de *scheduling* dependen

de la salida del sistema y y de la entrada exógena w . Esta dependencia se presenta matemáticamente como $\sigma = g(y, w)$. A partir de esto se puede asumir que existen las siguientes funciones:

$$w = w_e(g(y, w)), \quad r = r_e(g(y, w)).$$

De esta forma σ es tratada como un parámetro a través del proceso de diseño, lo que la convierte en una señal variante en el tiempo. Esto se representa a través de la dependencia $\sigma(t) = g(y(t), w(t))$. Cada linealización alrededor de σ describe el comportamiento local de la planta no lineal que corresponde al equilibrio.

En resumen, se puede describir el desarrollo de un controlador GS (*gain scheduled controller*) para seguimiento de un valor de referencia en sistemas no lineales de la siguiente manera [Khalil (2002)]:

- (1) Linealizar el modelo no lineal alrededor de una familia de puntos de operación (equilibrio), parametrizados por las variables de *scheduling*.
- (2) Diseñar una familia parametrizada de controladores lineales para alcanzar el comportamiento deseado en cada punto de operación.
- (3) Construir un controlador GS tal que:
 - Para cada valor constante de la entrada exógena, el sistema en lazo cerrado bajo el controlador GS tiene el mismo punto de equilibrio que el sistema en lazo cerrado bajo el controlador de ganancia fija.
 - La linealización del sistema en lazo cerrado bajo el controlador GS es equivalente a la linealización del sistema en lazo cerrado bajo el controlador de ganancia fija.
- (4) Revisar el desempeño no local del controlador GS simulando el modelo no lineal en lazo cerrado.

2.3 Gain Scheduled-Model Predictive Control

La técnica de Gain Scheduled - Model Predictive Control (GS-MPC) representa una combinación de las técnicas de MPC y GS para realizar control sobre sistemas no lineales, aprovechando las ventajas que ofrece el MPC lineal. En términos generales, esta técnica consiste en escoger un modelo linealizado alrededor de los puntos de operación de determinadas variables en un sistema no lineal dado. Una vez escogido el modelo lineal más apropiado para los puntos de operación del sistema en un instante de tiempo determinado, se puede aplicar un controlador MPC ajustado a este modelo. De esta forma se puede tener en cuenta la no linealidad del sistema, y a la vez aprovechar las ventajas que ofrece la aplicación de la técnica de MPC lineal.

Considérese un sistema no lineal descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

donde $f(x, u)$ y $h(x, u)$ son funciones no lineales que describen el comportamiento dinámico del sistema. Sea σ un vector de una o más variables de *scheduling* para este sistema. Una vez se definen los puntos de operación (equilibrio) de estas variables, se realizan las aproximaciones

lineales del sistema alrededor de estos puntos. Esto genera un conjunto de representaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c(\sigma)x(t) + B_c(\sigma)u(t) \\ y(t) &= C_c(\sigma)x(t) + D_c(\sigma)u(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Estas son representaciones lineales en espacio de estados definidas por las matrices A_c, B_c, C_c, D_c , cuyos coeficientes dependen del valor de σ . Estos modelos pueden ser fácilmente llevados a tiempo discreto, obteniendo modelos lineales de la forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d(\sigma)x(k) + B_d(\sigma)u(k) \\ y(k) &= C_d(\sigma)x(k) + D_d(\sigma)u(k). \end{aligned} \quad (9)$$

Para cada modelo lineal expresado de esta forma se puede obtener un controlador MPC, resolviendo el problema de optimización (2). Esto produce un número de controladores igual al número de puntos de operación que tenga σ . El número y el valor de los puntos de operación elegidos para σ dependen altamente del sistema que se desea controlar y de su naturaleza no lineal.

En este punto lo único que falta por definir es la forma en la que se asignan los controladores MPC en cada instante de tiempo. En este caso se ha decidido que en cada instante de tiempo k se miden (o estiman) las variables del sistema que se desean controlar, y se establece el punto de operación de σ más cercano a los valores actuales. Una vez se establece este punto de operación σ^* , se procede a asignar en ese instante de tiempo el controlador diseñado alrededor de σ^* .

Es necesario aclarar que, aunque todos los controladores MPC en esta técnica son diseñados en torno a un modelo lineal, la ley de control resultante no es necesariamente lineal. Esto es especialmente relevante cuando existen restricciones en el sistema [Maciejowski (2002)].

3. CASO DE ESTUDIO: CONTROL DE NIVEL EN SISTEMAS HIDRÁULICOS

En esta sección se describe la aplicación del algoritmo GS-MPC para dos casos de estudio. Los tanques de agua son uno de los elementos fundamentales de cualquier sistema hidráulico y presentan un comportamiento no lineal difícil de desarrollar analíticamente. Por esta razón, se han elegido como casos de prueba dos sistemas hidráulicos sencillos, el primero de un solo tanque y el segundo de dos tanques conectados en cascada por medio de una válvula. A continuación se describe el comportamiento dinámico no lineal de estos dos sistemas, y su correspondiente aproximación lineal alrededor de un punto de operación específico. También se describe la forma en la que se aplicó el algoritmo en ambos casos.

3.1 Sistemas de prueba

Sistema de un tanque Se considera un sistema hidráulico en el cual el agua es almacenada en un tanque abierto, tal como se muestra en la Figura 1. El volumen $V(m^3)$ de este tanque viene dado por $V = Ah$, donde $A(m^2)$ es el área transversal del tanque (constante) y $h(m)$ es la altura

de líquido en el tanque. Para un flujo de entrada q_{in} y un flujo de salida q_{out} , el comportamiento dinámico del volumen en el tanque se puede modelar por medio de la ecuación $\dot{V}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$.

Se define un suministro constante de agua $S(m^3/s)$ a la entrada del tanque. Adicionalmente, existe una válvula proporcional controlada por una señal $u \in [0, 1]$ que regula el paso de agua hacia el tanque. Teniendo en cuenta esto, el flujo de entrada de agua al tanque viene dado por $q_{in} = Su$.

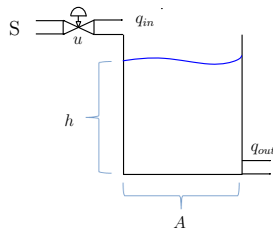


Figura 1. Sistema de un tanque.

El flujo de salida del tanque está a su vez dado por la ecuación $q_{out} = aC\sqrt{2gh}$; donde $a(m^2)$ es el área del orificio por el cual sale el agua, C es una constante positiva menor o igual a 1 conocida como coeficiente de descarga y $g(m/s^2)$ es la aceleración de la gravedad. Si se considera h como la variable de estado, la ecuación de estado de este sistema viene dada por:

$$\dot{h}(t) = f(h, u) = \frac{1}{A}[-aC\sqrt{2gh(t)} + Su(t)]$$

Se desea controlar en este sistema la altura de líquido en el tanque, así que se define $y = h$. Este control se va a realizar por medio de MPC, así que se desea llevar la ecuación de estado del sistema a una ecuación lineal en tiempo discreto de la forma de la Ecuación (1).

Para aplicar la técnica de GS, se define el valor de $h(t)$ en el tiempo t como la variable de *scheduling*. De esta forma, para un punto de operación (equilibrio) deseado $h^* = \sigma$ se puede obtener la acción de control deseada para lograr dicho equilibrio:

$$\dot{h} = 0 \rightarrow aC\sqrt{2g\sigma} = Su \rightarrow u^* = \frac{aC\sqrt{2g\sigma}}{S}$$

Una vez se tienen estos dos valores, se puede realizar la linealización de la función no lineal $f(h, u)$ alrededor de h^* y u^* :

$$A_c = \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \right|_{h^*, u^*} = -\frac{aCg}{A\sqrt{2g\sigma}}$$

$$B_c = \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \right|_{h^*, u^*} = \frac{S}{A}$$

Luego de este proceso se obtiene un sistema lineal descrito por $h'(t) = A_c(\sigma)h(t) + B_c(\sigma)u(t)$. Al discretizar este sistema (teniendo en cuenta una tasa de muestreo acorde a las características físicas del sistema), se obtiene el sistema lineal, en tiempo discreto requerido para la aplicación del controlador MPC.

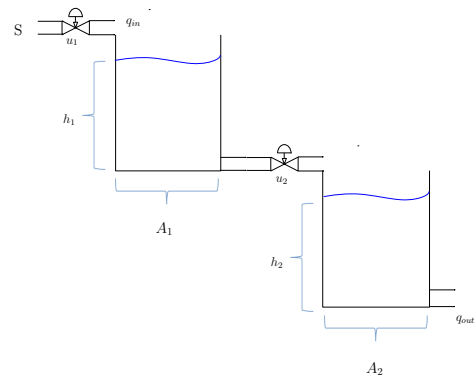


Figura 2. Sistema de dos tanques.

Sistema de dos tanques El segundo caso de estudio contempla un sistema en el que dos tanques (de comportamiento dinámico igual al del tanque del caso anterior) están conectados en cascada, tal como se ve en la Figura 2. En este sistema la entrada del segundo tanque es igual a la salida del primer tanque, regulada por medio de una válvula proporcional controlada por una señal $u_2 \in [0, 1]$. De esta forma, si se definen los parámetros a y C iguales para ambos tanques, el comportamiento dinámico del volumen de ambos tanques se puede modelar por medio de las ecuaciones:

$$\dot{V}_1 = Su_1 - aC\sqrt{2gh_1}$$

$$\dot{V}_2 = aC\sqrt{2gh_1}u_2 - aC\sqrt{2gh_2}$$

Si de nuevo se considera $h = [h_1 \ h_2]^T$ como las variables de estado del sistema, se tiene que las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}[-aC\sqrt{2gh_1} + Su_1]$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}[-aC\sqrt{2gh_2} + aC\sqrt{2gh_1}u_2]$$

De nuevo se escoge $h(t)$ como variable de *scheduling* y se encuentran los valores de $u = [u_1 \ u_2]^T$ deseados para lograr un equilibrio deseado $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$:

$$\dot{h}_1 = 0 \rightarrow aC\sqrt{2g\alpha_1} = Su_1 \rightarrow u_1^* = \frac{aC\sqrt{2g\alpha_1}}{S}$$

$$\dot{h}_2 = 0 \rightarrow aC\sqrt{2g\alpha_2} = aC\sqrt{2g\alpha_1}u_2 \rightarrow u_2^* = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}}$$

Teniendo estos valores ya se puede linealizar $f(h, u)$ alrededor de h^* y u^* :

$$A_c = \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \right|_{h^*, u^*} = \begin{bmatrix} -\frac{aCg}{A_1\sqrt{2g\alpha_1}} & 0 \\ \frac{aCg\sqrt{\alpha_2}}{A_2\alpha_1\sqrt{2g}} & -\frac{aCg}{A_2\sqrt{2g\alpha_2}} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \right|_{h^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{S}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{aC\sqrt{2g\alpha_1}}{A_2} \end{bmatrix}$$

Una vez más se tiene el sistema lineal $\dot{h}(t) = A_c(\sigma)h(t) + B_c(\sigma)u(t)$. Al igual que en el caso anterior, este sistema es discretizado para obtener el sistema lineal, en tiempo discreto deseado para la aplicación del controlador MPC.

3.2 Aplicación de la estrategia de control

Sistema de un tanque No existe aún una forma analítica de encontrar el número óptimo de puntos de operación para un sistema en particular. En estos casos de estudio se han tenido en cuenta 4 puntos de operación por tanque, considerando este un número adecuado para observar la acción de la técnica GS-MPC. En el sistema de un tanque, esto ha llevado a 4 linealizaciones del sistema no lineal, una alrededor de cada punto de operación deseado. En este caso se escogieron los puntos $\alpha_1 = 0.2h_{max}$, $\alpha_2 = 0.4h_{max}$, $\alpha_3 = 0.6h_{max}$, $\alpha_4 = 0.8h_{max}$, en donde h_{max} es el nivel máximo de líquido que puede haber en el tanque. Se escogieron los valores de esta forma para cubrir de forma uniforme todos los valores que puede tomar $h(t)$ durante la operación del sistema.

Para cada uno de estos valores se realizó entonces la linealización del sistema, tal como ha sido previamente descrito. Esto genera un conjunto de matrices $A_{di}, B_{di}, C_{di}, D_{di}$ que describen el sistema lineal en tiempo discreto \mathcal{S}_i . Luego, para cada uno de estos 4 sistemas fue diseñado un controlador MPC, tal que la variable a controlar $h(t)$ siguiera una señal de referencia r .

Finalmente, una vez obtenidos los 4 controladores se definió la forma en la que estos se conmutan, dependiendo del valor de la variable de *scheduling* ($h(t)$). En este caso la conmutación es sencilla, pues en cada instante t se observa el valor de $h(t)$ y se utiliza el controlador cuyo punto de operación esté más cercano a este valor. Por ejemplo, si en un instante $h(t) = 0.32h_{max}$, se utiliza en ese instante el controlador diseñado para el sistema \mathcal{S}_2 . Si en algún momento la variable de *scheduling* se encuentra exactamente en la mitad de dos puntos de operación (e.g., $h(t) = 0.3h_{max}$), se eligió utilizar el controlador con el menor punto de operación.

Sistema de dos tanques En el segundo sistema se ha aplicado la misma metodología del primer caso, definiendo 4 puntos de operación por tanque, en el 20%, 40%, 60% y 80% de la altura máxima de cada tanque. En este caso se define el vector $h(t) = [h_1(t) \ h_2(t)]^T$ como la variable de *scheduling*.

Al realizar todas las combinaciones posibles entre los puntos de operación del tanque 1 y el tanque 2, se obtiene que el vector $h(t)$ puede tener 16 valores posibles, y por lo tanto se requieren 16 linealizaciones del sistema. Siguiendo la metodología, esto lleva al desarrollo de 16 controladores MPC. Estos controladores son luego conmutados en cada instante al medir el valor de $h(t)$ y asignar el controlador diseñado en el punto de operación más cercano (tanto del tanque 1 como del tanque 2).

4. RESULTADOS

4.1 Sistema de un Tanque

Para el sistema de un tanque se aplicó en primera instancia la técnica de MPC para una única aproximación lineal del sistema, es decir, sin aplicar GS. Se introdujo una señal de referencia variante en el tiempo, y se deseaba que el nivel de líquido en el tanque siguiera esta señal. La respuesta del sistema con controlador MPC se puede ver en la Figura 3.

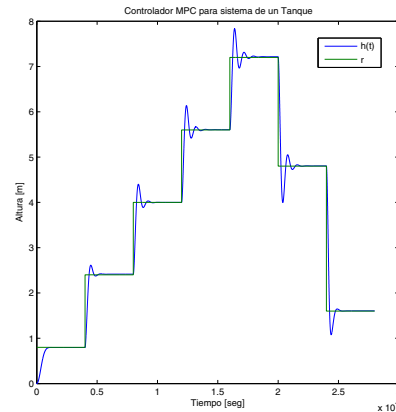


Figura 3. Sistema de un tanque controlado por medio de MPC.

La Figura 3 muestra que para cada valor de la señal de referencia la señal controlada $h(t)$ tiende a estabilizarse, con un error en estado estacionario muy pequeño. Adicionalmente, se puede observar una respuesta relativamente rápida del sistema a un cambio en el valor de referencia, aunque con valores elevados de sobreimpulso.

Posteriormente se aplicó el algoritmo GS-MPC al mismo sistema, con el mismo objetivo de control, la misma función de costo y la misma señal de referencia que en el caso anterior. Los resultados de este caso se pueden observar en la Figura 4.

El segundo caso muestra una reducción en los valores de sobreimpulso comparado con la aplicación de MPC únicamente. Además, el error en estado estacionario también se redujo considerablemente. La señal de control se demora un poco más en llegar al primer valor de referencia, pero después de este punto el sistema se comporta de una manera mucho más suave.

4.2 Sistema de dos Tanques

Para el sistema de dos tanques se siguió el mismo procedimiento, así que en primera instancia se aplicó la técnica MPC para seguir dos señales de referencia variantes en el tiempo, una para cada tanque. Los resultados de esta aplicación se pueden ver en la Figura 5.

Para este caso, al igual que en el sistema de un tanque, se tiene que $h(t)$ sigue los valores de referencia alcanzando estabilidad, aunque las señales controladas poseen altos valores de sobreimpulso cuando hay cambios en las señales de referencia. Nuevamente, los errores de estado estacionario son muy pequeños.

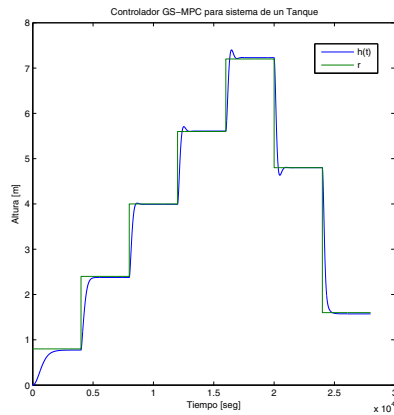


Figura 4. Sistema de un tanque controlado por medio de GS-MPC.

Luego se implementó el algoritmo GS-MPC en el sistema de 2 tanques. En la Figura 6 se muestran los resultados de esta implementación. Tal y como se esperaba teniendo en cuenta el primer caso, la respuesta utilizando únicamente MPC produce valores más altos de sobreimpulso y de error en estado estacionario, comparado a la respuesta utilizando GS-MPC.

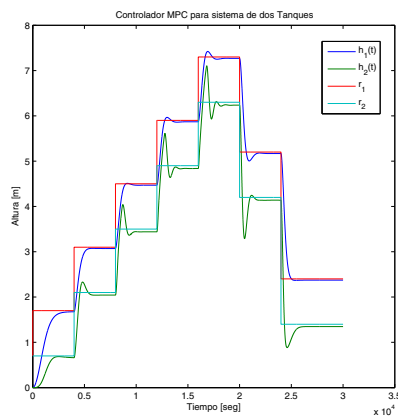


Figura 5. Sistema de dos tanques controlado por medio de MPC.

Se observa en este caso que el desempeño del control GS-MPC es mejor que el del control MPC también en sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Se puede apreciar en estos casos de estudio que en los dos sistemas estudiados el control MPC produce una respuesta un poco más rápida inicialmente, pero que el control GS-MPC produce un comportamiento del sistema mucho más suave, lo que resulta en una mejor operación de los tanques.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

A partir del desarrollo de la técnica GS-MPC y de su aplicación en el caso de estudio se pueden obtener algunas conclusiones. En primer lugar, la comparación entre el desempeño del controlador GS-MPC y el del controlador MPC en ambos sistemas establece que la técnica de GS-MPC mejora el comportamiento de los sistemas controlados en lazo cerrado. En aplicaciones de *tracking* se observa

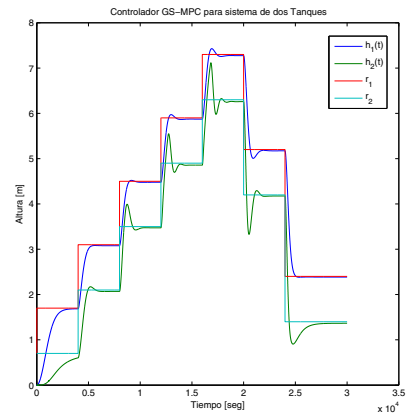


Figura 6. Sistema de dos tanques controlado por medio de GS-MPC.

la utilidad de aplicar GS al sistema de control cuando la señal de referencia varía a lo largo del rango de operación de las variables a controlar del sistema.

En el primer sistema se necesitaron 4 controladores, mientras que en el segundo se necesitaron 16. Esto muestra que el número de controladores necesarios, de acuerdo a la estrategia propuesta, crece muy rápidamente a medida que se añaden variables de *scheduling* y/o puntos de operación al sistema. Lo anterior pone en riesgo la viabilidad de la técnica planteada en este artículo para sistemas de gran escala, y genera la necesidad de desarrollar variaciones y alternativas para su uso. Esto constituye un tema abierto.

Otro tema en el que queda abierto a trabajo futuro es la forma en la que se asignan los controladores en cada instante de tiempo. En el presente artículo se ha elegido asignar los controladores diseñados para el punto de operación más cercano a los valores actuales de las variables de *scheduling*. Sin embargo, pueden existir reglas de asignación que brinden mejores resultados, dependiendo de la naturaleza no lineal de cada sistema, y del rango de operación en el que trabajan las variables de *scheduling*.

REFERENCIAS

- Camacho, E.F. and Bordons, C. (2007). *Model Predictive Control*. Springer.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd edition.
- Maciejowski, J.M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall.
- Ocampo-Martinez, C. (2010). *Model Predictive Control of Wastewater Systems*. Springer.
- Rugh, W.J. and Shamma, J.S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10), 1401–1425.
- Shamma, J.S. (1988). *Analysis and design of gain scheduled control systems*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Shamma, J.S. and Athans, M. (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, 27(3), 559–564.
- Toro, R. (2010). *Smart Tuning of Predictive Controllers for Drinking Water Networked Systems*. Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya UPC.