

Implementación del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden en un Helicóptero Experimental

Hugo A. Franco* Leonid Fridman**

* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
UNAM, C.P. 04510, D.F., México (e-mail:
hugo.franco.1102@gmail.com).

** División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, C.P. 04510,
D.F., México (e-mail: lfridman@unam.mx).

Resumen: En este trabajo se presenta la implementación de un algoritmo de control por modos deslizantes de tercer orden para regular la posición de un helicóptero experimental de tres grados de libertad; el controlador tiene propiedades de convergencia en tiempo finito de los estados y provee una señal de control continua. Se utiliza un algoritmo de diferenciación por modos deslizantes de alto orden para estimar las velocidades del sistema. Se presentan resultados de simulación y experimentales.

Palabras Clave: Control por modos deslizantes, algoritmo super-twisting, helicóptero.

1. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes [Edwards and Spurgeon, 1998], [Utkin et al., 1999] es una de las técnicas de control más utilizadas en sistemas perturbados. Un controlador de este tipo compensa perturbaciones acopladas a la señal de control, teóricamente de manera exacta, manteniendo ciertas variables (de deslizamiento) elegidas de forma adecuada, en cero. Para poder lograr este objetivo, el controlador necesita conmutar a una frecuencia teóricamente infinita, sin embargo, desde el punto de vista de la implementación, este tipo de control no es deseable debido al efecto *chattering* (oscilaciones causadas por el control discontinuo de alta frecuencia). El control por modos deslizantes de primer orden requiere que la señal de control se presente en la primera derivada de la variable de deslizamiento, i.e., el grado relativo de la variable de deslizamiento debe ser uno, con respecto a la señal de control.

Para reducir el problema del *chattering* han surgido diferentes propuestas, sin embargo el denominado *Control por Modos Deslizantes de Orden Superior* ha sido la estrategia más prometedora [Bartolini et al., 1998], [Levant, 1993], [Levant, 2003] y [Levant, 2007], la idea principal de éstos es llevar a cero no sólo la variable de deslizamiento, sino también sus derivadas de alto orden.

Para controlar sistemas de segundo orden con grado relativo dos de la salida con respecto a la señal de control (que representan muchos sistemas mecánicos y eléctricos), uno de los controladores por modos deslizantes más utilizado es el conocido Algoritmo Supert-Twisting (AST) el cual evita la aparición de *chattering* debido a que produce una señal de control continua, y para sistemas de grado relativo uno, estabiliza al sistema en tiempo finito. Para poder utilizarlo en sistemas de segundo orden es necesario el diseño de una

superficie de deslizamiento, lo que resulta en convergencia asintótica de los estados y no en tiempo finito.

En [Zamora and Moreno, 2013], se presenta un controlador por modos deslizantes basado en el AST, denominado Control Integral Discontinuo. Es un algoritmo de tercer orden aplicable a sistemas de segundo orden con grado relativo dos y preserva las características del AST:

- Proporciona estabilización en tiempo finito de la salida del sistema y sus dos primeras derivadas de forma simultánea.
- Genera un señal de control absolutamente continua reduciendo el problema de *chattering*.
- Compensa de manera exacta perturbaciones e incertidumbres continuas.
- Requiere solamente el conocimiento de la salida del sistema y su primera derivada.

Es por esto que en este trabajo se le denomina Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden (3-AST) y se presenta una de las primeras pruebas experimentales de éste, consistente en el control de posición de un helicóptero experimental de tres grados de libertad, el cual es un sistema subactuado y no lineal. El resto del artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta el objetivo de control, la descripción y el modelo del helicóptero. En la Sección 3 se introduce el 3-AST. El diseño del esquema de control utilizado se presenta en la Sección 4. Los resultados de simulaciones y experimentos se muestran en la Sección 5. La Sección 6 ofrece algunas conclusiones.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se diseñará un esquema de control para regular la posición de un helicóptero experimental de tres grados de

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, & \dot{\varepsilon}_2 &= -\frac{Mgl\varepsilon_1}{J_\varepsilon} \cos(\varepsilon_1) + \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon} u_s \cos(\theta_1), \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2, & \dot{\theta}_2 &= -\frac{mgl\theta}{J_\theta} \sin(\theta_1) + \frac{K_f L_h}{J_\theta} u_d, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, & \dot{\psi}_2 &= \frac{K_p L_a}{J_\psi} \sin(\theta_1).\end{aligned}\quad (2)$$

2.3 Linealización del modelo

Para facilitar la implementación del controlador que se utilizará se linealiza el modelo (2) en torno al origen, considerando éste como la posición horizontal del helicóptero, i.e., $X = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $U = \left[0 \ \frac{Mgl\varepsilon}{K_f L_a}\right]^T$, es claro que para mantener el helicóptero horizontal los motores tienen que empujar hacia arriba para cancelar los efectos gravitatorios. De acuerdo con lo anterior el modelo lineal es de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, & \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon} u_s, \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2, & \dot{\theta}_2 &= -\frac{mgl\theta}{J_\theta} \theta_1 + \frac{K_f L_h}{J_\theta} u_d, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, & \dot{\psi}_2 &= \frac{K_p L_a}{J_\psi} \theta_1.\end{aligned}\quad (3)$$

Por restricciones físicas, el espacio de trabajo es tal que

- El ángulo de cabeceo $\theta_1 \in [-45^\circ < \theta < 45^\circ]$.
- El ángulo de elevación $\varepsilon_1 \in [-27.5^\circ < \varepsilon < 30^\circ]$.

Del modelo (3) es claro que no es posible controlar el ángulo de desplazamiento ψ_1 cuando $\theta_1 = 0$, para producir un cambio en ψ_1 es necesario actuar θ_1 .

3. ALGORITMO SUPER-TWISTING DE TERCER ORDEN

En esta sección se utilizará la siguiente notación, para una variable real $z \in \mathbb{R}$ elevada a una potencia real $p \in \mathbb{R}$, $|z|^p = |z|^p \text{sign}(z)$, por ejemplo, $|z|^2 = |z|^2 \text{sign}(z) \neq z^2$. Si p es un número impar, esta notación no cambia el significado de la ecuación, i.e., $|z|^p = z^p$. Por lo tanto, $|z|^0 = \text{sign}(z)$, $|z|^0 z^p = |z|^p$, $|z|^0 |z|^p = |z|^p$, $|z|^p |z|^q = |z|^p \text{sign}(z) |z|^q \text{sign}(z) = |z|^{p+q}$.

Para presentar el algoritmo de control a utilizar, se considera la forma general de un sistema mecánico

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + \zeta(x, t), \quad (4)$$

en donde x_1 y x_2 son la posición y la velocidad del sistema, respectivamente; u es la señal de control y el término $\zeta(x, t)$ representa incertidumbres o perturbaciones.

Teorema 3.1. [Zamora and Moreno, 2013] El control definido por

$$\begin{aligned}u &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2) + z, \\ \dot{z} &= -k_3 \text{sign}(x_1),\end{aligned}\quad (5)$$

estabiliza robustamente y en tiempo finito al origen del sistema (4) para toda perturbación $\zeta(x, t)$ Lipschitz con respecto al tiempo, si las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son diseñadas adecuadamente. ■

La prueba de este teorema y las condiciones necesarias para que el algoritmo establezca el sistema mecánico (4) están dados en [Zamora and Moreno, 2013] en donde se utiliza la siguiente función de Lyapunov

$$V(x) = \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 + \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 |x_3|^2 \text{sign}(x_3).$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -\gamma_{13} k_3 |x_1| + \gamma_{13} x_1 \dot{\zeta}_1 - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \gamma_{23} |x_3|^3 - q_{12} |x_1|^{\frac{2}{3}} x_2 + q_{23} x_2 x_3 \\ &\quad + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 - 4\gamma_3 k_3 |x_1|^0 x_3^3 \\ &\quad + 4\gamma_3 x_3^3 \dot{\zeta} + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_2|^2.\end{aligned}$$

con $q_{12} = 2\gamma_2 k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1$ y $q_{23} = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 |x_1|^0 |x_3|^0 - 2\gamma_{23} |x_3|^0 \dot{\zeta}$.

3.1 Diseño de las ganancias del 3-AST

Para el diseño de las ganancias debe cumplirse $k_3 > \Delta$ con $\Delta = |\dot{\zeta}|$, además se considera el caso particular cuando $q_{12} = 0$, es decir, $\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 = 0$, entonces

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}, \quad (6)$$

Además γ_3 se calcula como

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right), \quad (7)$$

en donde η es una variable positiva que cumple $\eta > 1$. Por otro lado también debe cumplirse que

$$\begin{aligned}\alpha &< 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}}, \\ \phi &< \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23}^3 - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\frac{2^2 \gamma_{23} k_1^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \right),\end{aligned}\quad (8)$$

con $\phi(\alpha) = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$ tal que $\phi \geq \psi(\alpha, \lambda)$, en donde

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \max(0, \psi_1(\alpha, \lambda)) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha}, \end{cases}$$

con $\psi_1(\alpha) = -\alpha r_1^3 + \lambda r_1^2 + r_1$ y $\psi_2(\alpha) = \alpha r_2^3 - \lambda r_1^2 + r_1$, para los cuales r_1 y r_2 se definen como $r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$ y $r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$, y λ puede tomar los valores $\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$ y $\lambda_2 = 2\gamma_2 - \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$.

A (8) se le da una interpretación gráfica, en donde la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ que cumple $\psi(\alpha, \lambda) \leq \phi(\alpha)$, tiene que pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$, dentro del intervalo permitido de α , esta última condición involucra a dos funciones ψ ya que existen λ_1 y λ_2 .

Una vez establecido lo anterior, el método de diseño de las ganancias del controlador consiste en proponer k_1 , k_2 y k_3 , además de los parámetros γ_1 , γ_{13} y γ_{23} , calcular γ_2 y γ_3 con (6) y (7) y realizar la comprobación gráfica con (8).

4. DISEÑO DEL ESQUEMA DE CONTROL

El objetivo de control consiste en regular las posiciones de elevación y desplazamiento a diferentes puntos de

operación, para esto se utilizará el 3-AST, un algoritmo de control por modos deslizantes de tercer orden con la propiedad de que puede ser aplicado a sistemas mecánicos con grado relativo dos y llevar los estados del sistema a cero en tiempo finito, es decir, no requiere el diseño de una superficie de deslizamiento como en otros casos. A continuación se presenta la implementación de esta ley de control para el helicóptero, para esto se divide el modelo en dos subsistemas, la dinámica del ángulo de elevación y por otro lado la parte subactuada del sistema, i.e., los ángulos de cabeceo y desplazamiento.

4.1 Control del ángulo de elevación

El sistema no lineal para la parte de elevación es

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, & \dot{\varepsilon}_2 &= -a \cos(\varepsilon_1) + bu_s \cos(\theta_1), \\ a &= \frac{Mgl_\varepsilon}{J_\varepsilon}, & b &= \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (9)$$

y linealizado en el origen es de la forma

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = bu_s + \zeta_1, \quad (10)$$

en donde el término ζ_1 representa incertidumbres en el modelado y perturbaciones, comparando (9) y (10), se considera como perturbación la parte no lineal de la dinámica de elevación, i.e., $\zeta_1 = -a \cos(\varepsilon_1)$. Para tener la dinámica de elevación como en (4), se elige $u_1 = \frac{1}{b}u_s$, por lo que el sistema (10) se puede reescribir como

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = u_1 + \zeta_1.$$

Dado que el objetivo de control es realizar regulación a diferentes puntos de operación, se definen los errores $e_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{1d}$, $e_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2$, cuya dinámica está dada por

$$\dot{e}_{\varepsilon_1} = e_{\varepsilon_2}, \quad \dot{e}_{\varepsilon_2} = u_1 + \zeta_1,$$

y aplicando el 3-AST al sistema de errores anterior, el controlador que gobierna la dinámica de elevación es

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{\varepsilon_1} |e_{\varepsilon_1}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(e_{\varepsilon_1}) - k_{\varepsilon_2} |e_{\varepsilon_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\varepsilon_2}) + z_\varepsilon, \\ \dot{z}_\varepsilon &= -k_{\varepsilon_3} \text{sign}(e_{\varepsilon_1}), \end{aligned} \quad (11)$$

las ganancias k_{ε_1} , k_{ε_2} y k_{ε_3} , se diseñan con el método presentado en la Sección 3. Para esto es necesario conocer $\Delta_1 = |\dot{\zeta}_1|$.

4.2 Control de los ángulos de cabeceo y desplazamiento

El modelo no lineal de este subsistema es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, & \dot{\theta}_2 &= -c \sin(\theta_1) + du_d, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, & \dot{\psi}_2 &= e \sin(\theta_1), \\ c &= \frac{mgl_\theta}{J_\theta}, & d &= \frac{K_f L_h}{J_\theta}, & e &= \frac{K_p L_a}{J_\psi}, \end{aligned} \quad (12)$$

y linealizado tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, & \dot{\theta}_2 &= du_d - c\theta_1 + \zeta_2, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, & \dot{\psi}_2 &= e\theta_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Observando el sistema (13) es claro que no es posible actuar directamente el ángulo de desplazamiento, sino que

este se controla por medio del ángulo de cabeceo. Para resolver este problema se diseña la dinámica deseada para el cabeceo, θ_{1c} , como señal de control para el desplazamiento.

Control del ángulo de desplazamiento Para controlar este estado se utiliza un control PD y mediante u_s con el 3-AST se obliga al ángulo de cabeceo a seguir la referencia calculada θ_{1c} . El control PD es diseñado en términos de las señales de error del ángulo de desplazamiento, $e_{\psi_1} = \psi_1 - \psi_{1d}$ y $e_{\psi_2} = \psi_2$, por lo tanto el control PD tiene la siguiente estructura

$$\theta_{1c} = k_{\psi_p} e_{\psi_1} + k_{\psi_d} e_{\psi_2}. \quad (14)$$

Control del ángulo de cabeceo Para forzar al ángulo de cabeceo a seguir a θ_{1c} se implementa el 3-AST en u_s , para esto se definen las señales de error $e_{\theta_1} = \theta_1 - \theta_{1c}$ y $e_{\theta_2} = \theta_2 - \dot{\theta}_{1c}$, en donde la velocidad deseada se estima por medio de un diferenciador por modos deslizantes. Además el término lineal $-c\theta_1$ se engloba en ζ_2 , es decir, se considera como perturbación, por lo que, comparando (12) y (13), ζ_2 se considera como la parte no lineal del sistema, i.e., $\zeta_2 = -c \sin(\theta_1)$. Por otro lado se elige $u_2 = \frac{1}{d}u_d$, con las consideraciones anteriores, la dinámica del error de regulación del ángulo de cabeceo es

$$\dot{e}_{\theta_1} = e_{\theta_2}, \quad \dot{e}_{\theta_2} = u_2 - \ddot{\theta}_{1c} + \zeta_2. \quad (15)$$

El término $\ddot{\theta}_{1c}$, es considerado también como perturbación, por lo que se considera que su derivada temporal es acotada, i.e. $|\dot{\ddot{\theta}}_{1c}| < \Theta$. Para llevar a cero en tiempo finito el sistema de errores (15) se utiliza el 3-AST dado por (5), por lo que el controlador toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_2 &= -k_{\theta_1} |e_{\theta_1}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(e_{\theta_1}) - k_{\theta_2} |e_{\theta_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\theta_2}) + z_\theta \\ \dot{z}_\theta &= -k_{\theta_3} \text{sign}(e_{\theta_1}), \end{aligned} \quad (16)$$

las ganancias k_{θ_1} , k_{θ_2} y k_{θ_3} se diseñan con los métodos presentado en la Sección 3, para lo cual es necesario conocer $\Delta_2 = |\dot{\zeta}_2|$ y $\Theta = |\ddot{\theta}_{1c}|$ y en este caso $k_{\theta_3} > \Delta_2 + \Theta$.

Las señales de control diseñadas hasta este momento son $u_s = \frac{1}{b}u_1$ y $u_d = \frac{1}{d}u_2$, con u_1 y u_2 definidas en (11) y (16), respectivamente. Sin embargo las señales que se aplican a los motores son u_f y u_b , despejando éstas de la ecuaciones que las definen, se tiene que $u_f = \frac{1}{2}(u_s + u_d)$ y $u_b = \frac{1}{2}(u_s - u_d)$.

4.3 Diferenciador Robusto y Exacto

Debido a que el equipo sólo cuenta con sensores para medir las posiciones angulares, es necesario implementar algún método para estimar las velocidades, para esto se utiliza un diferenciador robusto exacto de segundo orden [Levant, 2003], el cual tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= \nu_0, & \nu_0 &= -\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |z_0 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1, \\ \dot{z}_1 &= \nu_1, & \nu_1 &= -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_1 - \nu_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_2 - \nu_1) + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\lambda_0 L \text{sign}(z_2 - \nu_1), & |f^{(2)}(t)| &\leq L. \end{aligned}$$

En donde $f(t) = [\varepsilon_1 \theta_1 \psi_1]$ es el vector de posiciones angulares y $L = \text{diag}([L_\varepsilon \ L_\theta \ L_\psi])$. Levant propone las ganancias $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 3$. Este algoritmo

también es utilizado para obtener la velocidad de referencia $\dot{\theta}_{1c}$ utilizada en el control PD (14) y cuya ganancia es L_1 . Debido a la estructura del controlador (5), es necesario que la señal estimada sea absolutamente Lipschitz en el tiempo, el algoritmo de diferenciación utilizado cumple esta condición.

5. SIMULACIONES Y EXPERIMENTOS

Para evaluar el esquema de control implementado se eligieron dos rutinas de vuelo para el helicóptero, la primera para observar el desempeño del controlador de elevación y la segunda para observar el funcionamiento de todo el sistema.

Rutina 1: Se regula la elevación desde el origen a -5° , luego a 5° , para nuevamente descender a -10° , después un ascenso a 10° y finalmente regresar al origen, manteniendo el desplazamiento, en todo momento, en cero.

Rutina 2: Se da un giro completo sobre la base del sistema, mientras se regula a 10° la elevación.

Para la elección de las ganancias de los controladores 3-AST, es necesario conocer las cotas de las derivadas de las perturbaciones $\zeta_1 = -a \cos(\varepsilon_1)$ y $\zeta_2 = -c \sin(\theta_1)$, i.e., $\Delta_1 = |\dot{\zeta}_{1max}| = |max\{a \sin(\varepsilon_1)\varepsilon_2\}|$ y $\Delta_2 = |\dot{\zeta}_{2max}| = |max\{-c \cos(\theta_1)\theta_2\}|$; de las cuales los parámetros a y c son conocidos y las funciones trigonométricas toman un valor máximo de uno. Mediante simulaciones del sistema con controladores PID [Manual, 2007] se determinaron las cotas de las velocidades ε_2 y θ_2 , además de Θ , obteniendo $\Delta_1 = 0.4472 \left[\frac{rad}{s^3}\right]$, $\Delta_2 = 0.78 \left[\frac{rad}{s^3}\right]$ y $\Theta = 0.15 \left[\frac{rad}{s^3}\right]$.

Las ganancias de los controladores 3-AST se presentan en la tabla 2, las comprobaciones gráficas se muestran en la figura 3. Las ganancias del controlador PD se encuentran en la tabla 3, éstas se determinaron de forma experimental. Las ganancias de los diferenciadores se presentan en la tabla 4. Tanto en simulaciones como en experimentos el ángulo de cabeceo se limitó a un valor máximo de 20° .

Las simulaciones de las dos rutinas se presentan en las figuras 4 y 5. Es claro que el esquema de control utilizado tiene un buen funcionamiento, las posiciones angulares llegan a la referencia muy rápido y con el mínimo de sobrepaso, además de que las señales de control son continuas e implementables.

Los resultados experimentales se muestran en las figuras 6 y 7. El funcionamiento en la rutina 1 es rápido, el cambio de 5° en la referencia es alcanzado en 2 [s], mientras que los cambios de 10° , 15° y 20° son alcanzados en 2.5 [s], 3 [s] y 4 [s], respectivamente, además todas las referencias son alcanzadas de forma precisa. Por otro lado, en la rutina 2 la regulación también es rápida, pero el funcionamiento en conjunto de los controladores produce algunas desviaciones en el ángulo de elevación. El comportamiento del ángulo de cabeceo parece no ser tan eficiente en el seguimiento a la dinámica deseada, esto es debido a que por la sintonización utilizada hay una transitorio largo y no se tiene tanta velocidad en el seguimiento, sin embargo es suficiente para tener una regulación buena en el ángulo de desplazamiento.

Tabla 2. Parámetros controladores 3-AST

	Elevación	Pitch
k_1	4	5
k_2	4.5	4.5
k_3	1	1
γ_1	20	20
γ_2	3.3333	2.6667
γ_3	1.46×10^{-5}	1.46×10^{-5}
γ_{13}	1	1
γ_{23}	0.001	0.001
η	1.1	1.1
Δ	0.4872	0.78

Tabla 3. Ganancias PD

Ganancia	Valor
k_{ψ_p}	0.75
k_{ψ_d}	3

Tabla 4. Ganancias Diferenciadores

Ganancia	Valor
L_ε	70
L_θ	80
L_ψ	70
L_1	100

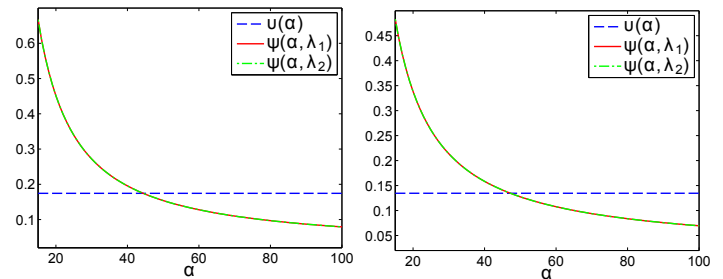


Figura 3. Comprobación gráfica elevación y cabeceo

Para tener una idea de la rapidez y precisión del 3-AST frente a otros esquemas de control, se comparan los resultados obtenidos en este trabajo, con los resultados de [Ferreira de Loza et al., 2012], puesto que se utiliza un esquema de control muy similar al utilizado en este trabajo, pero en este caso implementaron controladores PID y un observador por modos deslizantes para estimar y compensar perturbaciones en línea. En este artículo realizan un experimento similar a la rutina 2. Realizan una regulación de 4° en elevación y de 280° en desplazamiento, llegando a las posiciones deseadas en 70 [s] y 40 [s], respectivamente.

Utilizando el 3-AST, en la rutina 3 se realiza una regulación de 10° en elevación y de 360° en desplazamiento y los tiempos de establecimiento son de 3 [s] y 18 [s], respectivamente. De esta comparación es claro que los controladores implementados realmente presentan convergencia en tiempo finito de los estados.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una prueba experimental del 3-AST, este controlador tiene las características del AST pero con la ventaja de que puede ser aplicado a sistemas mecánicos con grado relativo dos de la salida con respecto a la señal de control, de forma directa; logrando con esto tener convergencia en tiempo finito de los estados del sistema por medio de una señal de control absolutamente continua. Se utilizó un diferenciador por modos deslizantes de orden superior robusto y exacto para estimar las velocidades. El funcionamiento del helicóptero controlado con el 3-AST, tanto en las simulaciones y las pruebas experimentales confirman las propiedades del 3-AST y la posibilidad de implementar los controladores aliviando el fenómeno de *chattering*.

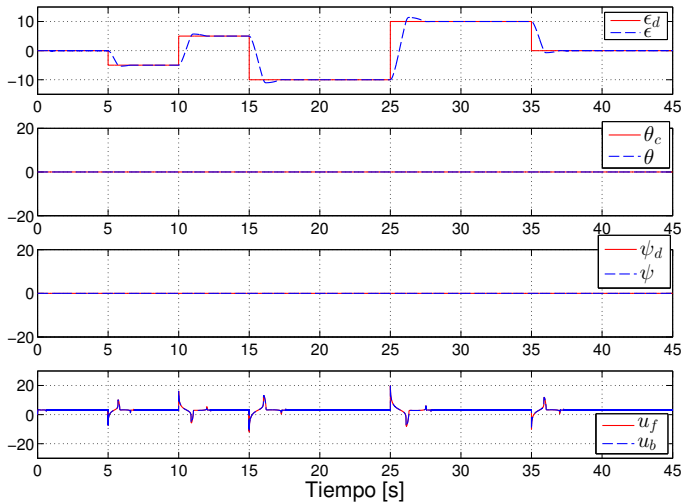


Figura 4. Simulación de la rutina 1. ε , θ y ψ , en grados, u_f y u_b en volts

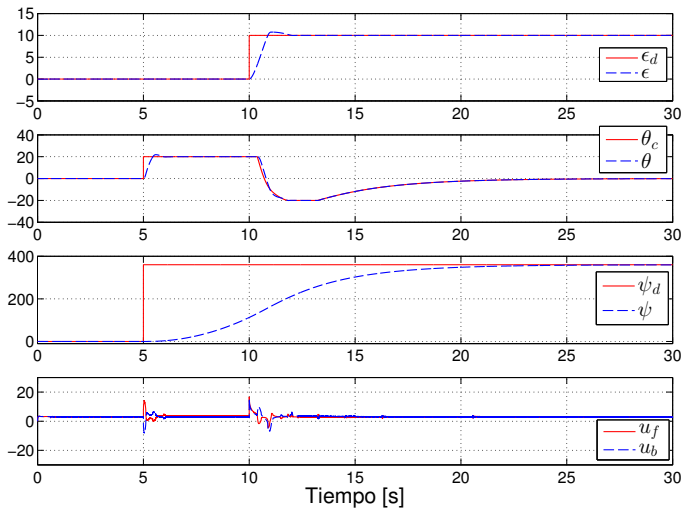


Figura 5. Simulación de la rutina 2, ε , θ y ψ , en grados, u_f y u_b en volts

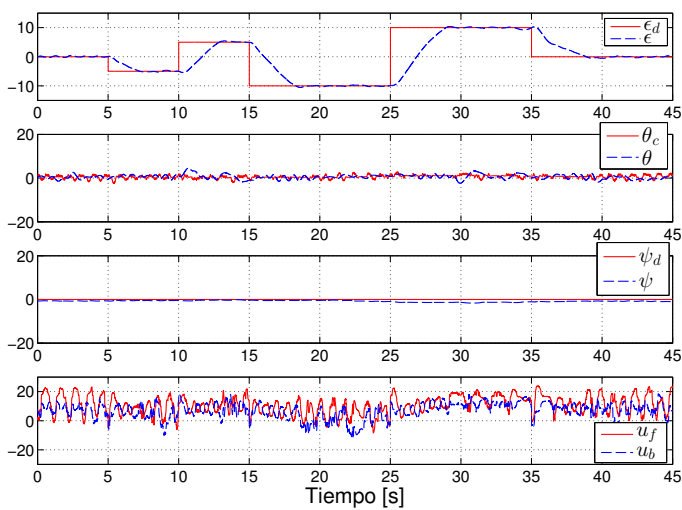


Figura 6. Rutina 1 experimental, ε , θ y ψ , en grados, u_f y u_b en volts

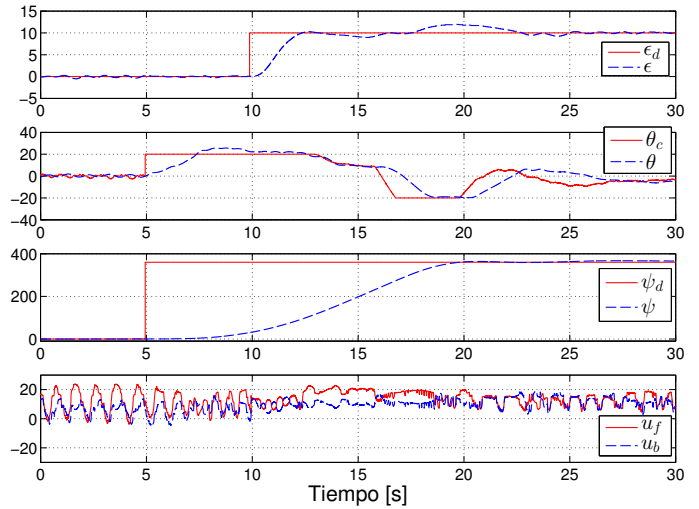


Figura 7. Rutina 2 experimental, ε , θ y ψ , en grados, u_f y u_b en volts

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido del Fondo de Colaboración II-FI, UNAM. Proyecto IISGBAS-109-2013; al PAPIIT, UNAM, concesión IN113613, Proyecto 132125; y de CONACYT CVU 598211.

REFERENCIAS

- Bartolini, G., Ferrara, A., and Usai, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *Automatic control, IEEE Transactions on*, 43(2), 241–246.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. CRC Press.
- Ferreira de Loza, A., Rios, H., and Rosales, A. (2012). Robust regulation for a 3-dof helicopter via sliding-mode observation and identification. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2), 700–718.
- Ishutkina, M.A. (2004). *Design and implementation of a supervisory safety controller for a 3DOF helicopter*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of control*, 76(9-10), 924–941.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4), 576–586.
- Manual (2007). *3DoF Helicopter System*.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shijun, M. (1999). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volume 34. CRC press.
- Zamora, C.A. and Moreno, J.A. (2013). Control integral discontinuo para sistemas mecánicos. In *Congreso Nacional de Control Automático 2013, Ensenada, Baja California, México*. AMCA.