

Esquema Predictor–Observador para el Control de un Robot Móvil Omnidireccional con Retardos de Tiempo

M. Velasco–Villa, E. Mandujano–García, I. Estrada–Sánchez
H. Rodríguez–Cortés y H. Sira–Ramírez

*CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de
Mecatrónica, Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07300
México D.F., México. (e-mail: {velasco, emandujano, ivanestrada,
hrodriguez, hsira}@cinvestav.mx)*

Resumen. En este trabajo se presenta una estrategia de control para un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos de tiempo en las entradas de control. Por medio de un cambio de variable adecuado, se desarrolla un predictor–observador que provee una estimación de los estados del sistema, T unidades de tiempo en el futuro, los cuales son utilizados para proponer una retroalimentación de estados que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias. Se muestra formalmente la convergencia de los estados predecidos así como también la convergencia de los errores de seguimiento. La estrategia de control presentada constituye formalmente una generalización al caso no lineal del conocido predictor de Smith, el cual resuelve un problema similar en el caso de sistemas lineales.

Palabras Clave: Robot móvil, retardo de transporte, predicción de estados, seguimiento de trayectorias.

1. INTRODUCCIÓN

Las nuevas tendencias en el uso de robots móviles controlados a distancia ha generado un problema adicional: la introducción de tiempos muertos en el esquema de control.

El análisis y control de sistemas con retardos de tiempo ha sido abordado extensamente en la literatura, véase por ejemplo, Hale [1997]. En el caso lineal, el problema de control de sistemas con retardo a la entrada fue tratado inicialmente en el trabajo de Smith [1957] y sus generalizaciones Palmor [1996]. Desafortunadamente la consideración de un esquema de predicción como el Compensador de Smith estaba limitado a sistemas lineales estables en lazo abierto.

La consideración de sistemas no lineales con retardo a la entrada tuvo como consecuencia el estudio del problema de observación para esta clase de sistemas (Germani et al. [2002], Hou et al. [2002]) que en la mayoría de los casos están basados en el estudio pionero del problema de observación debido a Thau [1973] o su generalización posterior en Rajamani [1998] desarrollados en el caso de sistemas libres de retardo. La necesidad de retroalimentaciones causales en la mayoría de los casos ha inducido la obtención de soluciones aproximadas a problemas de estabilización o seguimiento de trayectorias véase por ejemplo Mazenc and Bliman [2006], Krstic [2010].

En el caso de la robótica móvil, la consideración de retardos de tiempo a la entrada del sistema se ha analizado primordialmente en el caso de los modelos cinemáticos de los robots. Un esquema aproximado del predictor de Smith es presentado por Velasco-Villa et al. [2007b] en el caso continuo y en el caso discreto por Velasco-Villa et al. [2007a]. El caso del robot móvil tipo unicycle ha sido analizado en Wargui et al. [1997]. El caso de robots móviles aéreos fue tratado en Ordaz et al. [2013] mediante una predicción aproximada.

En el presente trabajo se presenta un esquema de control basado en estados futuros estimados para el modelo dinámico del robot móvil omnidireccional. Primero se desarrolla una estrategia de predicción de estados futuros, adelantados T unidades de tiempo, los cuales serán usados en el diseño de una retroalimentación basada en estados futuros que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias. Se detalla cómo el predictor propuesto constituye una generalización particular del predictor de Smith original (Smith [1957]) a el caso de los sistemas no lineales con retardo y se muestra que este predictor es equivalente a un observador de estados para el caso de un sistema en adelanto generado a partir de un adecuado cambio de variable. Se muestra también cómo el sistema en lazo cerrado controlado con estados predecidos genera errores de predicción y seguimiento convergentes.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 el modelo del robot móvil considerando un esquema de control a distancia. En la Sección 3 se desarrolla la estrategia de predicción y la dinámica del error de predicción mientras que en la Sección 4 se presenta la estrategia de control basada en estados futuros. La evaluación experimental de la estrategia propuesta se presenta en la Sección 5 y finalmente en la Sección 6 se dan algunas conclusiones generales del trabajo.

2. CLASE DE ROBOT MÓVILES

Una vista superior de la configuración del robot móvil omnidireccional se muestra en la Figura 1. Un marco de referencia móvil $X_m - Y_m$ se localiza en el centro de masa del vehículo con el eje X_m alineado con respecto a la rueda 3. Las ruedas 1 y 2 son colocadas simétricamente con un ángulo 60° con respecto al eje Y_m . El marco de referencia fijo $X - Y$ provee la localización absoluta del vehículo en el espacio de trabajo. El robot móvil es del tipo $(\delta_m, \delta_s) = (3, 0)$ (Canudas et al. [1996]), esto es, tiene

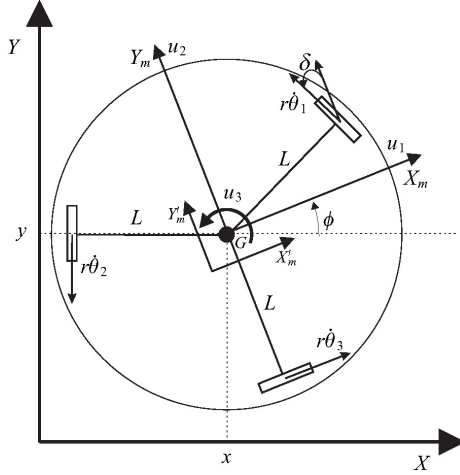


Figura 1. Robot móvil omnidireccional.

tres grados de movilidad y cero grados de direccionabilidad permitiendo el desplazamiento del vehículo en cualquier dirección de forma instantánea. En la Figura $\delta = 30^\circ$.

2.1 Modelo dinámico del robot omnidireccional

Un análisis simple de las restricciones de velocidad Campion et al. [1996] en la Figura 1 produce,

$$J_1 R(\phi) \dot{\xi} - J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

con $\xi = [x \ y \ \phi]^T$, y

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin \delta & \cos \delta & L \\ -\sin \delta & -\cos \delta & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ representan los desplazamientos angulares de las ruedas uno, dos y tres respectivamente; δ es la orientación de la i -ésima rueda con respecto a su eje longitudinal; L es la distancia entre el centro de cada rueda y el centro del vehículo y r es el radio de cada rueda.

Considerando los resultados presentados en Campion et al. [1996]-Canudas et al. [1996], la energía cinética del robot está dada por la energía rotacional de las ruedas, además de las energías rotacional y traslacional del cuerpo del robot. El Lagrangiano del sistema toma entonces la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T R^T(\phi) M_p R(\phi) \dot{\xi} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\varphi}_i^T I_r \varphi_i, \quad (2)$$

con $M = \text{diag}\{M_p, M_p, I_p\}$ y $I_r = \text{diag}\{I_\varphi, I_\varphi, I_\varphi\}$. M_p es la masa del vehículo y I_p es el momento de inercia alrededor del eje Z del vehículo, I_φ es el momento de inercia de cada rueda con respecto a sus ejes de rotación.

Considerando que las restricciones cinemáticas (1) se satisfacen para todo t , a partir de la formulación de Euler-Lagrange es posible obtener

$$D \ddot{\xi}(t) + C(\dot{\xi}(t)) \dot{\xi}(t) = B(\xi) \tau(t) \quad (3)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad C(\dot{\xi}) = a \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & 0 \\ -\dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\xi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\delta + \phi) & -\sin(\delta - \phi) & \cos \phi \\ \cos(\delta + \phi) & -\cos(\delta - \phi) & \sin \phi \\ L & L & L \end{bmatrix}$$

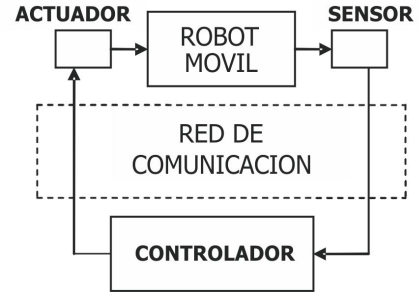


Figura 2. Red de comunicación.

con $d_1 = M_p + \frac{3I_r}{2r^2}$, $d_3 = I_p + \frac{3I_r L^2}{r^2}$ y $a = \frac{3I_r}{2r^2}$.

La implantación práctica de una ley de control para cualquier robot móvil implica la necesidad de considerar los retardos de tiempo debidos a la red de comunicación que enlaza los sensores y actuadores del robot móvil y un controlador colocado en una posición remota. La representación esquemática de esta situación se describe en la Figura 2.

La existencia de retardos de tiempo como los mostrados en la Figura 2, producen la representación alternativa

$$D \ddot{\xi}(t) + C(\dot{\xi}(t)) \dot{\xi}(t) = B(\xi) \tau(t - T) \quad (4)$$

donde $T > 0$ es un retardo constante.

3. ESTRATEGIA DE PREDICCIÓN

La estrategia de predicción se llevará a cabo considerando la representación en adelante del sistema (4). Para tal efecto, defínase inicialmente $z_1 = [z_{11} \ z_{12} \ z_{13}]^T$ y $z_2 = [z_{21} \ z_{22} \ z_{23}]^T$ y considere la representación en variables de estado obtenida a partir de

$$z_1(t) = \xi(t), \quad z_2(t) = \dot{\xi}(t).$$

De esta forma se obtiene,

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -D^{-1} C(z_{23}) z_2 + D^{-1} B(z_{13}) \tau(t - T). \quad (5)$$

El sistema en adelante mencionado puede obtenerse al considerar el nuevo cambio de variable

$$w_1(t) = z_1(t + T), \quad w_2(t) = z_2(t + T) \quad (6)$$

que produce directamente la nueva representación,

$$\dot{w}_1(t) = \dot{z}_1(t + T) = z_2(t + T) = w_2(t)$$

$$\dot{w}_2(t) = \dot{z}_2(t + T) = -D^{-1} C(z_{23}(t + T)) z_2(t + T) + D^{-1} B(z_{13}(t + T)) \tau(t)$$

$$= -D^{-1} C(w_{23}(t)) w_2(t) + D^{-1} B(w_{13}(t)) \tau(t)$$

esto es,

$$\dot{w}_1(t) = w_2(t)$$

$$\dot{w}_2(t) = -D^{-1} C(w_{23}(t)) w_2(t) + D^{-1} B(w_{13}(t)) \tau(t). \quad (7)$$

Nótese que el modelo representado en (7), provee la dinámica del sistema (5) adelantada T unidades de tiempo.

Para el sistema auxiliar (7) se propone ahora el *observador de estados del sistema adelantado con inyecciones presentes del error*, descrito en la forma,

$$\dot{\hat{w}}_1(t) = \hat{w}_2(t) + \lambda_1 e_{w_1}(t - T)$$

$$\dot{\hat{w}}_2(t) = -D^{-1} C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2(t) + D^{-1} B(\hat{w}_{13}(t)) \tau(t) + \lambda_0 e_{w_1}(t - T) \quad (8)$$

donde

$$e_w(t) = [e_{w_1}(t) \ e_{w_2}(t)]^T \\ = [w_1(t) - \hat{w}_1(t) \ w_2(t) - \hat{w}_2(t)]^T \quad (9)$$

representa el error de observación para el sistema en adelanto.

Observación 1. Es importante mencionar que se pretende diseñar un observador de estados del tipo Luenberger para el sistema en adelanto (7) que a su vez representa un predictor para el sistema original dado por la ecuación (5). Nótese también que la inyección del error $e_{w_1}(t-T)$ en el predictor-observador (8) se realiza T unidades de tiempo en el pasado debido al requerimiento de causalidad que impone la ecuación (6) ya que en las coordenadas originales

$$e_{w_1}(t-T) = w_1(t-T) - \hat{w}_1(t-T) \\ = z_1(t) - \hat{z}_1(t) \\ = \xi(t) - \hat{\xi}(t). \quad (10)$$

Dado que $\xi(t)$ corresponde a las posiciones del robot móvil, estas señales pueden considerarse como medibles y, por lo tanto, se obtiene un estimador-predictor realizable. Es claro entonces que en el sistema (8) no es posible utilizar la señal de error $e_{w_1}(t)$ dada que corresponde a una señal que no se tiene disponible por considerar valores futuros del sistema original.

3.1 Dinámica del error de predicción

Considerando entonces el error de observación $e_w(t)$ dado en (9) se obtiene

$$\dot{e}_{w_1}(t) = e_{w_2}(t) - \lambda_1 e_{w_1}(t-T) \\ \dot{e}_{w_2}(t) = -\lambda_0 e_{w_1}(t-T) - D^{-1} [C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ + D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] \tau \quad (11)$$

Por otra parte, nótese que

$$C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2 \\ = \begin{bmatrix} aw_{23}w_{22} \\ -aw_{23}w_{21} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a\hat{w}_{23}\hat{w}_{22} \\ -a\hat{w}_{23}\hat{w}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a(w_{23}w_{22} - \hat{w}_{23}\hat{w}_{22} + w_{23}\hat{w}_{22} - w_{23}\hat{w}_{22}) \\ -a(w_{23}w_{21} - \hat{w}_{23}\hat{w}_{21} + w_{23}\hat{w}_{21} - w_{23}\hat{w}_{21}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} aw_{23}e_{w_{22}} + a\hat{w}_{22}e_{w_{23}} \\ -aw_{23}e_{w_{21}} - a\hat{w}_{21}e_{w_{23}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

esto es

$$C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2 \\ = \begin{bmatrix} 0 & aw_{23} & a\hat{w}_{22} \\ -aw_{23} & 0 & -a\hat{w}_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}} \\ e_{w_{22}} \\ e_{w_{23}} \end{bmatrix} \\ = \bar{C}_a(w_2, \hat{w}_2)e_{w_2} \quad (12)$$

además

$$B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13}) \\ = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin\delta_{+13} & \sin\delta_{-13} & -\cos w_{13} + \cos \hat{w}_{13} \\ \cos\delta_{+13} & \cos\delta_{-13} & -\sin w_{13} + \sin \hat{w}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\sin\delta_{\pm 13} = \sin\delta_{\pm 13} - \sin\delta_{\mp 13}$ y $\cos\delta_{\pm 13} = \cos\delta_{\pm 13} - \cos\delta_{\mp 13}$ con $\delta_{\pm 13} = \delta \pm w_{13}$. La consideración de algunas relaciones trigonométricas produce

$$B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13}) = \frac{2}{r} \sin\left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2}\right) \bar{S}(\bar{w}_{13}) \quad (13)$$

donde

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\delta + \bar{w}_{13}}{2} & -\cos \frac{2\delta - \bar{w}_{13}}{2} & \sin \frac{\bar{w}_{13}}{2} \\ \sin \frac{2\delta + \bar{w}_{13}}{2} & \sin \frac{2\delta - \bar{w}_{13}}{2} & -\cos \frac{\bar{w}_{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\bar{w}_{13} = w_{13} + \hat{w}_{13}$. Es fácil ver que a partir del sistema (11) puede obtenerse alternativamente,

$$\ddot{e}_{w_{11}} = -\lambda_1 \dot{e}_{w_{11}}(t-T) - \lambda_0 e_{w_{11}}(t-T) \\ - \frac{a}{d_1} (w_{23}e_{w_{12}} + \hat{w}_{22}e_{w_{23}}) + \frac{2}{r} \sin\left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2}\right) \bar{S}_1 \tau \\ \ddot{e}_{w_{12}} = -\lambda_1 \dot{e}_{w_{12}}(t-T) - \lambda_0 e_{w_{12}}(t-T) \\ - \frac{a}{d_1} (-w_{23}e_{w_{21}} - \hat{w}_{21}e_{w_{23}}) + \frac{2}{r} \sin\left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2}\right) \bar{S}_2 \tau \\ \ddot{e}_{w_{13}} = -\lambda_1 \dot{e}_{w_{13}}(t-T) - \lambda_0 e_{w_{13}}(t-T) \quad (14)$$

donde \bar{S}_1 y \bar{S}_2 representan la primera y segunda fila de la matriz \bar{S} .

A partir de la consideración de $\tau(t)$ acotado; se puede establecer que las velocidades del robot móvil permanecerán también acotadas y por lo tanto, considerando (12) se tiene que

$$\|C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\| \leq m_1 \|e_w\| \quad (15)$$

y a partir de (13), considerando que las funciones trigonométricas son acotadas, puede escribirse

$$\|[B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] \tau\| \leq m_2 \|e_{w_{13}}\| \leq m_3 \|e_w\|. \quad (16)$$

Para establecer la convergencia del observador propuesto en la ecuación diferencial no lineal retardada, en el caso particular de los pares de entrada acotados, es posible recurrir ahora a un resultado previo reportado en la literatura por Niculescu et al. [1998] el cual puede ser particularizado al caso de interés de este trabajo.

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-T) + f(x(t), t) \quad (17)$$

donde $x \in R^n$ es el estado, $A, A_d \in R^{n \times n}$ son matrices reales constantes, T es un tiempo de retardo constante y $f: R^n \times R \rightarrow R^n$ es una función no lineal, tal que,

$$\|f(x, t)\| \leq \beta \|x\|. \quad (18)$$

Corolario 2. (Niculescu et al. [1998]) Considere el sistema (17) y suponga que $A + A_d$ es una matriz Hurwitz. Si se satisface la desigualdad

$$\mu(A + A_d) + T(\|A_d A\| + \|A_d^2\| + \|A_d\| \beta) + \beta < 0$$

entonces el sistema (17) es exponencialmente estable.

En el corollario anterior $\mu(A + A_d)$ representa una *medida* de la matriz $A + A_d$ definida en la forma

$$\mu(\chi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \varepsilon \chi\| - 1}{\varepsilon}.$$

Nótese que el resultado anterior es fácilmente aplicable al sistema (11) al reescribirlo en la forma,

$$\dot{e}_w(t) = Ae_w(t) + A_d e_w(t-T) + f(e_w(t), t)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\lambda_0 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -D^{-1} [C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ +D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] \tau \end{bmatrix}$$

al considerar las cotas dadas en (15) y (16).

A pesar de la convergencia mostrada para el error de observación (11), el resultado anterior es limitado en el sentido que una posible retroalimentación τ basada en retroalimentación de estados estimados podría inestabilizar al sistema por lo que a partir de lo anterior no es posible garantizar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado controlado a partir de estados estimados.

A continuación se mostrará que en el caso particular del robot móvil omnidireccional, es posible utilizar el predictor-observador dado en (11) y asegurar al mismo tiempo la convergencia del error de observación y la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

4. SISTEMA CONTROLADO POR VALORES FUTUROS

Es claro que no se puede establecer un principio de separación en el caso del control del robot móvil omnidireccional. A continuación se muestra el control del robot por medio de los estados predcidos estimados con el fin de resolver el problema estándar de seguimiento de trayectorias.

Considérese la retroalimentación,

$$\tau(t) = [D^{-1}B(w_{13}(t))]^{-1} \{v(t) + D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t)\} \quad (19)$$

que en lazo cerrado con el sistema en adelante (7) produce

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= v(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Como la retroalimentación (19) no es implementable debido a que $w_1(t) = \xi(t+T)$ y $w_2(t) = \dot{\xi}(t+T)$ se propone la retroalimentación alternativa basada en estados predcidos,

$$\tau(t) = [D^{-1}B(\hat{w}_{13}(t))]^{-1} \{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2(t)\} \quad (21)$$

la cual produce en lazo cerrado con (7) el sistema

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= -D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t) + D^{-1}BB^{-1}D \times \\ &\quad \times \{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2(t)\} \end{aligned} \quad (22)$$

Nótese que,

$$B(w_{13})B^{-1}(\hat{w}_{13}) = D^{-1}B(w_{13})B^{-1}(\hat{w}_{13})D = I_{3 \times 3} + S(e_{w_{13}}) \quad (23)$$

donde $I_{3 \times 3}$ representa la matriz identidad de 3×3 y

$$S(e_{w_{13}}) = \begin{bmatrix} -\sin^2(e_{w_{13}}) & -\sin(e_{w_{13}}) & 0 \\ -\sin(e_{w_{13}}) & -\sin^2(e_{w_{13}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver, que la ecuación (22) toma entonces la forma,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= v(t) - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}})\{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Defínase ahora la nueva entrada de control $v(t)$ en la forma

$$\begin{aligned} v(t) &= \ddot{w}_{2d} - k_2(w_2 - w_{2d}) - k_1(w_1 - w_{1d}) \\ &= \dot{w}_{2d} - k_2e_{w_{2d}} - k_1e_{w_{1d}} \end{aligned} \quad (25)$$

donde $w_d = [w_{1d} \ w_{2d}]^T$ corresponde a las trayectorias predefinidas que se desea que el robot móvil siga.

Considerando (25), el sistema (24) puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= \dot{w}_{2d} - k_2e_{w_{2d}} - k_1e_{w_{1d}} \\ &\quad - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}})\{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\} \end{aligned} \quad (26)$$

Definiendo ahora, los errores de seguimiento en la forma

$$e_{w_d} = [e_{w_{1d}} \ e_{w_{2d}}]^T = [w_1 - w_{1d} \ w_2 - w_{2d}]^T$$

el sistema (26) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_{1d}} &= e_{w_{2d}} \\ \dot{e}_{w_{2d}} &= -k_1e_{w_{1d}} - k_2e_{w_{2d}} \\ &\quad - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}})\{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\} \end{aligned} \quad (27)$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema en lazo cerrado controlada mediante estados predcidos está formada por las dinámicas de los errores de predicción y seguimiento dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_1}(t) &= e_{w_2}(t) - \lambda e_{w_1}(t - T) \\ \dot{e}_{w_2}(t) &= -\lambda_0 e_{w_1}(t - T) \\ &\quad - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &\quad + D^{-1}[B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})]\tau \\ \dot{e}_{w_{1d}}(t) &= e_{w_2}(t) \\ \dot{e}_{w_{2d}}(t) &= -k_1e_{w_{1d}}(t) - k_2e_{w_{2d}}(t) \\ &\quad - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}})\{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\} \end{aligned} \quad (28)$$

Considerando los errores previamente definidos

$$e_w = w - \hat{w} \text{ y } e_{w_d} = w - w_d \quad (29)$$

se tiene entonces, a partir de la ecuación (12), que

$$\begin{aligned} f_{a_1} &= -D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] \\ &= -D^{-1}C_a(w_2, \hat{w}_2)e_{w_2} \\ &= -D^{-1}C_a(e_{w_2}, e_{w_{2d}}, w_{2d})e_{w_2} \end{aligned} \quad (30)$$

es una función de las señales de error y de los valores deseados, esto es, C_a toma la forma,

$$C_a = a \begin{bmatrix} 0 & e_{w_{23}} - w_{23d} & e_{w_{22d}} - e_{w_{22}} - w_{22d} \\ -e_{w_{23}} + w_{23d} & 0 & -e_{w_{21d}} + e_{w_{21}} + w_{21d} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta que la señal de control esta dada por la ecuación (21) es fácil ver que

$$\begin{aligned} f_{a_2} &= D^{-1}[B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})]\tau \\ &= S(e_{w_{13}})\{v + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando $v(t)$ dada en (25) y los errores (29), se obtiene equivalentemente,

$$\begin{aligned} f_{a_2} &= -S(e_{w_{13}})\{\dot{w}_{2d} - k_2e_{w_{2d}} - k_1e_{w_{1d}} \\ &\quad + D^{-1}C(e_{w_{23d}} - e_{w_{23}} - w_{23d})(e_{w_{2d}} - e_{w_2} - w_{2d})\hat{w}_2\} \end{aligned} \quad (32)$$

la cual es otra función que depende de las señales de error y de los valores deseados.

Considérese ahora el vector de estados extendido

$$e = [e_{w_1} \ e_{w_2} \ e_{w_{1d}} \ e_{w_{2d}}]^T \quad (33)$$

y defínase la función

$$f_a = f_{a_1}(e_w, e_{w_d}, w_d) + f_{a_2}(e_w, e_{w_d}, w_d). \quad (34)$$

Es posible entonces escribir el sistema (28) en la forma,

$$\dot{e}(t) = A_1e(t) + A_2e(t - T) + f_e(e, w_d) \quad (35)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & -k_1I_{3 \times 3} & -k_2I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad f_e = \begin{bmatrix} 0 \\ f_a \\ 0 \\ f_a \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

donde $A_1, A_2 \in R^{12 \times 12}$ y "0" representa bloques con entradas cero de dimensión adecuada.

Considerando que los valores deseados w_d están acotados por diseño y considerando f_{a1}, f_{a2} dadas respectivamente en (30) y (32) es posible entonces encontrar cotas de la forma

$$\|f_{a1}(e_w, e_{w_d}, w_d)\| \leq m_4 \|e\|, \|f_{a2}(e_w, e_{w_d}, w_d)\| \leq m_5 \|e\| \quad (37)$$

con lo cual se obtiene

$$\|f_e(e_w, e_{w_d}, w_d)\| \leq m_6 \|e\|. \quad (38)$$

Considérese ahora la representación del sistema en lazo cerrado dado en la ecuación (35)-(36). Nótese ahora que la matriz $A_1 + A_2$ toma la forma

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ -\lambda_2 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & -k_1 I_{3 \times 3} & -k_2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la elección adecuada de los parámetros de diseño $k_1, k_2, \lambda_0, \lambda_1$ permite colocar los valores propios de $A_1 + A_2$ en el lado izquierdo del plano complejo. Entonces, la consideración de la cota dada en (38) permite la aplicación directa del Corolario 2, con lo cual se asegura la convergencia de los errores de predicción y seguimiento. De esta forma se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias basado en estados estimados futuros planteado en este trabajo.

5. EVALUACIÓN NUMÉRICA

En la presente sección se mostrará la eficacia del esquema de control basado en predicción de estados considerando un robot móvil omnidireccional cuyos parámetros se toman a partir de un vehículo existente en nuestro laboratorio. El modelo dinámico del robot móvil se muestra en (3) y sus parámetros asociados se muestran en la Tabla 1.

| | | | |
|-------|---|--------------------------|---|
| M_p | = | 9.85 kg | Masa total |
| I_r | = | 0.52 kg · m ² | Inercia de las ruedas |
| I_p | = | 0.17 kg · m ² | Inercia del robot |
| L | = | 0.1877 m | Distancia del centro de masa a las ruedas |
| r | = | 0.03812 m | Radio de las ruedas |
| T | = | 0.5 s | Tiempo de Retardo |

Tabla 1. Parámetros del robot móvil.

El valor de retardo $T = 0.5$ se elige de manera que se asegure que una ley de control implementada sin el esquema predictor-observador no sea capaz de resolver el problema.

La trayectoria deseada $w_d(t) = [w_{1d}(t) \ w_{2d}(t)]^T$ se genera a partir de un modelo virtual de la forma (3) en el cual se han considerado los pares de entrada $\tau_1(t) = 2 \sin^2(\frac{t}{2})$, $\tau_2(t) = \cos^2(\frac{t}{2})$, $\tau_3(t) = -3 \sin(\frac{t}{5})$.

Se consideran además las condiciones iniciales, $\xi(0) = [0.5 \ -1 \ 0.2]^T$ y $\dot{\xi}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y las ganancias de diseño $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $k_{0i} = 0.25$ y $k_{1i} = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

En la Figura 3 se muestra la evolución del robot móvil sobre el plano de trabajo donde la convergencia a la trayectoria deseada es obtenida ante errores iniciales de seguimiento no nulos. La convergencia de los errores de seguimiento es mucho más clara en las Figura 4 y 5 donde se muestran la evolución de los errores de posición

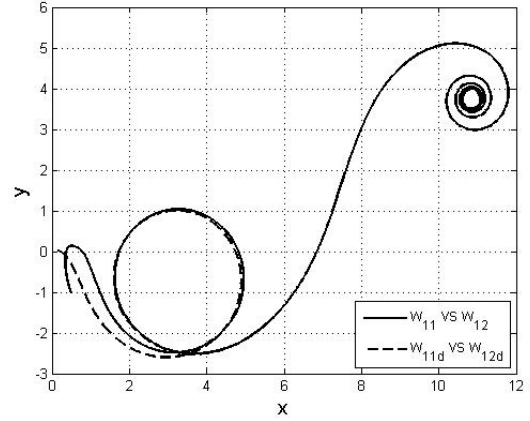


Figura 3. Evolución en el plano $X - Y$.

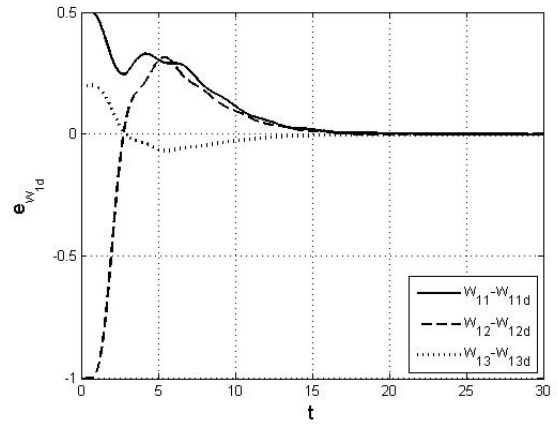


Figura 4. Error de seguimiento en posición e_{w1d} .

y velocidad respectivamente. Los errores de predicción en posición se muestran en la Figura 6 mientras que los errores de predicción de velocidad de describen en la Figura 7. Las señales de control resultante se muestran en la Figura 8.

A partir de las figuras anteriores es importante resaltar que a pesar de las condiciones iniciales fuera de la trayectoria deseada, los errores de predicción y observación convergen a cero produciendo un sistema en lazo cerrado que resuelve adecuadamente en problema de seguimiento de trayectorias aun ante la presencia de tiempos de retardo en las señales de entrada.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza el problema de control de un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos de tiempo en las señales de entrada. La solución del problema se obtiene mediante la utilización de un esquema predictor-observador el cual se diseña para obtener una estimación de valores futuros de los estados T unidades de tiempo en el futuro. El predictor de estados propuesto es equivalente a un observador para un sistema en adelantos obtenido a partir de un adecuado cambio de variable. Se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias a través de una retroalimentación basada en estados estimados futuros y se muestra la convergencia tanto de los errores de estimación como de los errores de seguimiento. El esquema de predicción propuesto constituye una generalización al

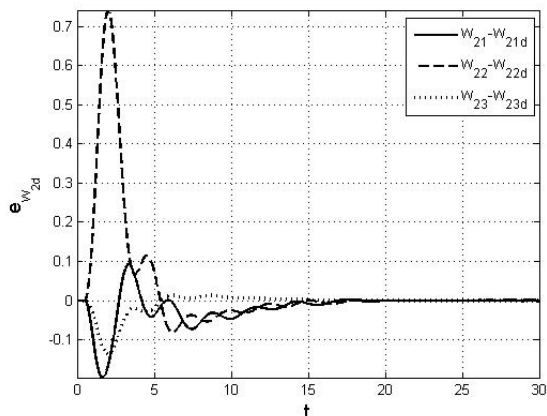


Figura 5. Error de seguimiento en velocidad e_{w2d} .

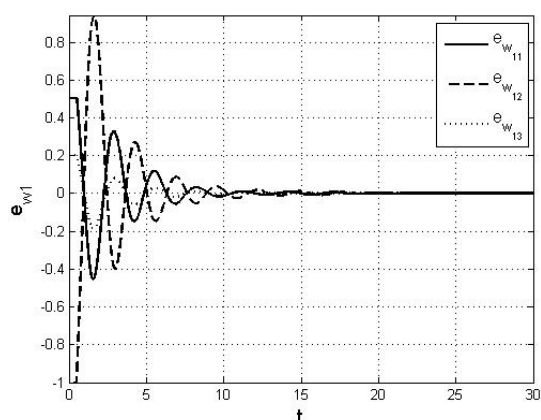


Figura 6. Error de predicción en posición e_{w1} .

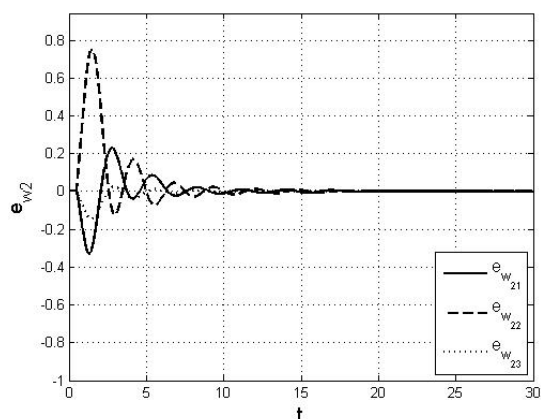


Figura 7. Error de predicción en velocidad e_{w2} .

caso no lineal del famoso predictor de Smith utilizado en el campo de los sistemas lineales.

REFERENCIAS

G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Structural properties and clasification of kinematics and dynamics models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–61, 1996.

C. Canudas, B. Siciliano, G. Bastin, B. Brogliato, G. Campion, B. D'Andrea-Novel, A. De Luca, W. Khalil, R. Lo-

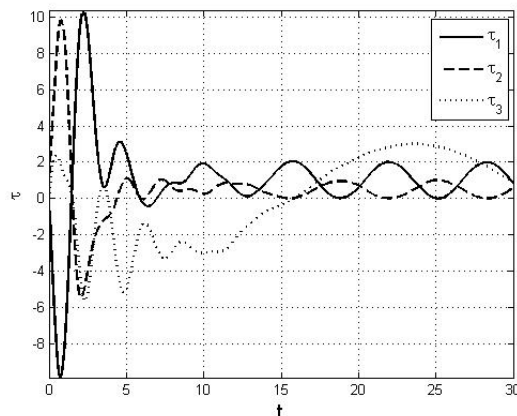


Figura 8. Señales de control $\tau(t)$.

zano, R. Ortega, C. Samson, and P. Tomei. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London, 1996.

A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(1):96–101, 2002.

J. K. Hale. *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1997.

M. Hou, P. Zitek, and R.J. Patton. An observer design for linear time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(1):121–125, 2002.

M. Krstic. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(2):287–303, 2010.

F. Mazenc and P. Bliman. Backstepping design for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1):149–154, 2006.

S-I Niculescu, C E de Souza, L Dugard, and J-M Dion. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):743–748, 1998.

J. Ordaz, S. Salazar, S. Mondici, H. Romero, and R. Lozano. Predictor-based position control of a quad-rotor with delays in gps and vision measurements. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 70(1-4):13–26, 2013.

Z. J. Palmor. Time-delay compensation smith predictor and its modifications. *The control handbook*, pages 224–237, 1996.

R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(3):397–401, 1998.

O. J. M. Smith. Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5):217–219, 1957.

FE. Thau. Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479, 1973.

M. Velasco-Villa, A. Alvarez-Aguirre, and G. Rivera-Zago. Discrete-time control of an omnidirectional mobile robot subject to transport delay. In *American Control Conference 2007*, New York City, USA, 2007a.

M. Velasco-Villa, B. del Muro-Cuellar, and A. Alvarez-Aguirre. Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot. In *15th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages T30–027, Athens, Greece, 2007b.

M. Wargui, A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid. On the stability of an autonomous mobile robot subject to network induced delay. In *Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 28–30, Hartford, CT, October 1997.