

## Atenuación de Vibraciones Mediante Excitación Paramétrica

M. Ramírez \* J. Collado \*\*

\* Departamento de Control Automático, Cinvestav, DF, MEX (e-mail:  
mramirez@ctrl.cinvestav.mx

\*\* Departamento de Control Automático, Cinvestav, DF, MEX (e-mail:  
jcollado@ctrl.cinvestav.mx

---

Resumen: En el trabajo se muestra que mediante la introducción de excitación paramétrica se puede atenuar la respuesta de un sistema mecánico amortiguado. El sistema excitado está descrito por la ecuación de Hill, por lo que el trabajo muestra los diagramas de estabilidad conocidos como las Lenguas de Arnold.

*Keywords:* Excitación Paramétrica, Vibraciones Mecánicas, Ecuación de Hill, Control en Lazo Abierto, Sistemas Lineales.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es mostrar que mediante la excitación paramétrica se puede incrementar el amortiguamiento en un sistema mecánico de al menos dos grados de libertad ligeramente amortiguado. La importancia de utilizar este método es que podemos aumentar el coeficiente de amortiguamiento sin medir ningún estado del sistema, es un control en lazo abierto, únicamente haciendo un análisis previo de estabilidad podemos garantizar que la respuesta del sistema con excitación paramétrica será más amortiguada que la del sistema original.

En muchos sistemas de ingeniería, eléctricos, mecánicos y químicos, es de gran interés analizar el comportamiento de los sistemas que oscilan, en particular cuando son excitados por alguna señal periódica pequeña, pues se puede presentar resonancia. En la ecuación  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ ,  $f(t) = A \cos \omega t$ , cuando la  $\omega$  es cercana o igual a  $\omega_0$  tenemos resonancia, la cual hace crecer de forma lineal la amplitud de la respuesta del sistema, ver Landau (1976), es decir el sistema se vuelve inestable.

En la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad p(t) = p(t+T), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

que ha sido estudiada a profundidad en distintos textos, ver Magnus and Winkler (1966) y Yakubovich and Starzhinskii (1975), observamos que  $p(t)$  es un parámetro de la ecuación, a diferencia de  $f(t)$  que es una señal externa al sistema. Una de las principales diferencias entre la resonancia clásica y la resonancia paramétrica, es que la primera se presenta en un único punto  $\omega = \omega_0$ , sin embargo, la resonancia paramétrica se presenta en intervalos, en zonas de inestabilidad. Por ello en general siempre es deseado no contar con resonancia paramétrica, en la mayoría de análisis se busca eliminar o disminuir este efecto. Recientemente se han publicado algunos ejemplos donde se busca controlar sistemas mecánicos modelados con la ecuación de Hill, ver Fossen and Nijmeijer (2012). Uno de ellos es la estabilización de un barco, pues las olas del mar pueden

provocar que el barco se voltee en poco tiempo, debido a que el barco entra en resonancia paramétrica. Estos fenómenos son modelados con la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

un caso particular de la ecuación de Hill (1), donde  $\alpha, \beta$  son parámetros. Como mencionamos anteriormente la ecuación (2) presenta intervalos de estabilidad e inestabilidad, siempre uno alternado del otro. Si se analiza la estabilidad para cada par  $(\alpha, \beta)$  y se grafica  $\alpha$  contra  $\beta$ , estos intervalos de estabilidad e inestabilidad describen, las llamadas lenguas de Arnold, ver Arnold (1983). Se puede conocer analíticamente donde nacen estas zonas sobre el eje  $\beta = 0$ , estas aparecen en la siguiente relación  $\alpha = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  para  $\alpha > 0$ , pero si tenemos funciones  $2\pi$  periódicas las lenguas nacen sobre el eje  $\beta = 0$ , en  $\alpha = \frac{k^2}{4}$ , ver Seyranian and Mailybaev (2003).

Otras diferencias entre la resonancia clásica y la resonancia paramétrica son: la respuesta en zonas inestables crecen de forma exponencial, en las zonas de estabilidad la respuesta es estable y no asintóticamente estable. Pero una de las más importantes y que más nos interesa es ¿qué pasa si la ecuación cuenta con un factor de amortiguamiento?. En la ecuación  $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$  si  $\omega = \omega_0$  implica resonancia sin embargo debido a  $k > 0$  la respuesta es acotada. Pero en la ecuación de Hill  $\ddot{x} + k\dot{x} + p(t)x = 0$  si tenemos un punto inestable y se agrega  $k > 0$  en general el punto sigue siendo inestable, por lo tanto no basta con agregar amortiguamiento para estabilizar el sistema.

Tomando en cuenta lo anterior, en el trabajo se aprovecha de forma positiva la excitación paramétrica, consideremos el sistema:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Ax = 0 \quad (3)$$

con  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $M > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  diagonal,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , tiene una respuesta asintóticamente estable con un amortiguamiento dado, nuestro trabajo consiste en introducir excitación en uno de sus parámetros de forma periódica por lo tanto el sistema (3) lo expresamos como:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + (\alpha A + \beta P(t))x = 0 \quad (4)$$

con  $P(t+T) = P(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , como se puede observar la ecuación (4), es la ecuación de Hill pero en dimensión 2, el análisis de estabilidad es similar, sin embargo las lenguas de Arnold son diferentes en varios aspectos, además de que las técnicas para graficarlas son muy diferentes al caso para cuando  $x \in \mathbb{R}$ . Uno de los métodos usados para graficar son los llamados determinantes infinitos, ver Hansen (1985), sin embargo es tardado calcular las series para cada una de funciones periódicas a utilizar. Con la nuevas herramientas de cómputo podemos realizar estos diagramas de estabilidad integrando la ecuación numéricamente para cada uno de los parámetros y aplicando los criterios de estabilidad, en unos pocos minutos, lo que hace algunos años computacionalmente era muy tardado.

## 2. SISTEMAS LINEALES PERIÓDICOS

Sea

$$\dot{x} = A(t)x \quad A(T+t) = A(t) \quad (5)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n, A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y donde  $T$  es el período fundamental. La solución de (5)

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad x_0 = x(t_0)$$

no necesariamente es periódica, ver Cesari (1963), y en general no se puede calcular de forma analítica, salvo en algunas excepciones, ver Seyranian and Mailybaev (2003), sin embargo se puede realizar un análisis de estabilidad del sistema (5).

Sea  $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz fundamental de (5), ver Adrianova (1995), entonces definimos a la matriz de monodromía de (5) como  $M = e^{RT} = \Phi(T, 0) = Q(T)Q^{-1}(0)$ , es claro que  $Q(t+T)$  también es una matriz fundamental, puesto que ambas son soluciones de (5) entonces se pueden expresar como una combinación lineal  $Q(t+T) = Q(t)C$  para alguna  $C$  invertible, en particular  $Q(t+T) = Q(t)M$ . Ahora si  $\tilde{Q}(t)$  es otra matriz fundamental asociada a (5) entonces  $\tilde{Q}(t) = Q(t)C$ .

Con lo anterior se puede mostrar que el espectro de la matriz de monodromía es invariante con respecto al tiempo inicial considerado, es decir  $\sigma(\Phi(T, 0)) = \sigma(\Phi(t+T, t))$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t+T) &= \tilde{Q}(t)\tilde{M} \\ Q(t+T) &= Q(t)M \\ \tilde{Q}(t) &= Q(t)C \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t)\tilde{M} &= Q(t+T)C = Q(t)MC \\ &= Q(t)CC^{-1}MC = \tilde{Q}(t)C^{-1}MC \\ &\rightarrow \tilde{M} = C^{-1}MC \Rightarrow \sigma(\tilde{M}) = \sigma(M) \end{aligned}$$

este resultado es importante ya que la estabilidad de la ecuación (5) depende de la matriz de monodromía. Si expresamos a  $t = kT + \tau$  para  $k \in \mathbb{N}$  con  $\tau \in [0, T)$ , usando las propiedades de la matriz de transición de estados, la solución de (5) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, 0)x_0 \\ &= \Phi(kT + \tau, kT)\Phi(kT, (k-1)T) \cdot \\ &\quad \cdot \Phi((k-1)T, (k-2)T) \dots \Phi(T, 0)x_0 \\ &= \Phi(\tau, 0) \underbrace{\Phi(T, 0)\Phi(T, 0) \dots \Phi(T, 0)}_{k-\text{veces}} x_0 \\ &= \Phi(\tau, 0) [\Phi(T, 0)]^k x_0 = \Phi(\tau, 0) [M]^k x_0 \end{aligned}$$

Dado que los sistemas lineales se cumple que  $x(t) \rightarrow \infty$  solo para  $t \rightarrow \infty$  y que  $\tau$  es un número finito,  $\Phi(\tau, 0)$  es acotada, por otro lado las condiciones iniciales  $x_0$  están acotadas, por lo que el único término que podría causar la inestabilidad del sistema es la matriz de monodromía  $M$ , con lo que hemos probado el:

*Teorema 1.* [Lyapunov-Floquet] Sea  $M$  la matriz de monodromía del sistema (5) con  $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , entonces (5) es:

- i) Asintóticamente Estable si y solo si:  
 $|\lambda_i| < 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$
- ii) Estable si y solo si:  
 $|\lambda_i| \leq 1$  para  $i = 1, \dots, n$   
 y si  $|\lambda_j| = 1$ , son raíces simples del polinomio mínimo de  $M$  para  $j = 1, \dots, k$
- iii) Inestable si y solo si:  
 existe un  $\lambda_i$  tal que  $|\lambda_i| > 1$   
 o  $|\lambda_j| = 1$   $j = 1, \dots, k$  raíz múltiple del polinomio mínimo

### 2.1 La Ecuación de Hill

La ecuación

$\ddot{x} + P(t)x = 0$   $P(t) = P(t+T)$   $x \in \mathbb{R}^n, P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (6)  
 se conoce como la ecuación de Hill, si  $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\dot{y} = Ay \quad A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -I_n \\ -P(t) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

por lo que es un caso particular de (5). Cabe señalar que la ecuación  $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$  siempre se puede escribir como la ecuación de Hill (6), ver Magnus and Winkler (1966), por lo tanto el análisis de estabilidad hecho para (5) es válido para ecuaciones con amortiguamiento.

Notamos que la traza de  $A$  es cero, si  $M(0) = I_4$ , por el teorema de Jacobi-Liouville, ver Jordan and Smith (2007), el determinante de  $M$   $\det(M) = 1$ , por lo tanto si  $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$ . Debido a que  $M$  es una matriz simpléctica, ver Yakubovich and Starzhinskii (1975),  $\lambda \in \sigma(M) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(M)$  es decir los valores característicos de la matriz de monodromía se comportan de forma simétrica con respecto al círculo unitario, con lo que la ecuación de Hill solo puede ser estable si  $\sigma(M)$  está sobre el círculo unitario.

Con base en lo anterior se pueden dibujar los diagramas de estabilidad, las llamadas lenguas de Arnold, la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_A + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_B \cos(\omega t) \right) x = 0 \quad (7)$$

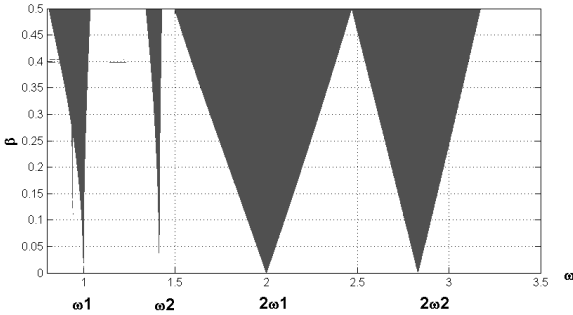


Figura 1. Zonas de estabilidad para la ecuación (7)

con  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Bajo el siguiente cambio de variable  $\tau = \omega t$ , entonces  $\omega^2 \ddot{x} + (A + \beta B \cos(\tau)) x = 0 \rightarrow \ddot{x} + (\alpha A + \beta B \cos(\tau)) x = 0$  con  $\alpha = 1/\omega^2$  y  $\beta = \beta/\omega^2$ , por lo tanto graficar  $\alpha$  contra  $\beta$  es equivalente a graficar  $\omega$  contra  $\beta$ . Como se mencionó en la introducción las lenguas nacen sobre el eje  $\alpha$  en  $\alpha = (\frac{k\pi}{T})^2$   $k \in \mathbb{N}$ , si definimos a  $\omega_j^2 = \alpha$  y usando el hecho que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  entonces las lenguas de Arnold nacen en  $\frac{2\omega_j}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , es decir  $\omega = 2\omega_j, \omega_j, \frac{2\omega_j}{3}, \frac{\omega_j}{2}, \dots$  sobre el eje  $\omega$ . Dado que  $A$  y  $B$  son diagonales entonces tenemos dos ecuaciones de Mathieu desacopladas,  $\ddot{x} + (1 + 2\beta \cos(\tau)) x = 0$  y  $\ddot{x} + (2 + 2\beta \cos(\tau)) x = 0$ , el diagrama de estabilidad es la superposición de los diagramas de cada uno de los subsistemas, por lo tanto debido  $\omega_1^2 = 1$  las lenguas nacen en  $\omega = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \dots$  y debido a  $\omega_2^2 = 2$  nacen en  $\omega = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{6}$  como se muestra en la Fig. 1.

Si  $A$  o  $B$  no son diagonales, entonces existe interacción entre los subsistemas, es decir están acoplados, ahora la lenguas de Arnold nuevamente solo dependen de los valores característicos de la matriz  $A$ , si los valores característicos de  $A$  son  $\sigma(A) = \{\omega_1^2, \omega_2^2\}$  las lenguas de Arnold nacen en  $\frac{2\omega_j}{k}$ ,  $j = 1, 2$ ; las cuales corresponden a cada uno de los subsistemas, pero ahora aparecen otras lenguas que dependen del acoplamiento de los subsistemas y estas aparecen en:

$$\frac{|\omega_1 \pm \omega_2|}{k} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

ver Yakubovich and Starzhinskii (1975), realizando la grafica de la ecuación (7) con  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , tenemos las mismas lenguas que en la Fig. 1 más las lenguas debidas a la combinación  $\frac{|\omega_1 \pm \omega_2|}{k} = 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, \omega_2, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \omega_1 \dots$  como se muestra en la Fig. 2

### 3. SISTEMA MECÁNICO

En la Fig. 3 se muestra el sistema mecánico de dos masas con tres resortes, cuya dinámica está dada por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_3 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ver Axisa (2003), donde  $\gamma$  es la constante de fricción dinámica, y es igual para ambas masas.

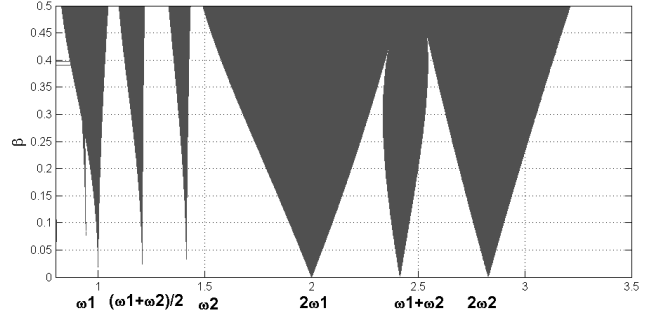


Figura 2. Zonas de estabilidad para la ecuación (7) con  $B$  no diagonal

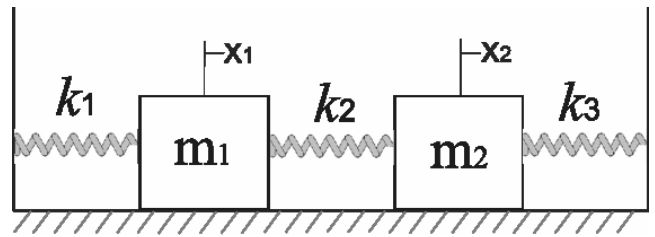


Figura 3. Esquema del Sistema Mecánico

Si hacemos variar de forma periódica la constante de elasticidad de uno de los resortes obtendremos un sistema en la forma de la ecuación de Mathieu vectorial. En particular si  $k_3(t) = k_{3a} + k_{3b} \cos(t)$  con  $k_{3a} > 0$ ,  $|k_{3a}| > |k_{3b}|$

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \left( \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_{3a} + k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_A + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{3b} \end{bmatrix}}_B \cos(t) \right) x = 0 \quad (9)$$

entonces debemos hacer el análisis de estabilidad para la ecuación (9), si  $m_1 = 0,5$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0,1$ ,  $k_3(t) = 2 + \cos(t)$ , entonces  $A = \begin{bmatrix} 3,1 & -0,1 \\ -0,05 & 1,05 \end{bmatrix}$  y

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , y se puede observar en la Fig. 4 las zonas de estabilidad para el sistema, si escogemos un punto de operación  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  y realizando una simulación con  $x(0) = [1 \ 0]^T$  podemos observar en la Fig. 5 como la respuesta del sistema con excitación paramétrica (9) tiene un factor de amortiguamiento mayor que el sistema sin excitación paramétrica (8).

La respuesta en general es quasi-periódica de la forma  $Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + Be^{-\delta t} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ , si consideramos el término más energético, es decir, el correspondiente a  $\max\{|A|, |B|\}$ , entonces la respuesta será de la forma:

$$x(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi)$$

Podemos estimar el factor de decaimiento de la señal  $\delta$ , como si se tratase de un sistema invariante en el tiempo de segundo orden, los resultados son alentadores con excitación paramétrica el factor de decaimiento de la señal aumenta en 20%.

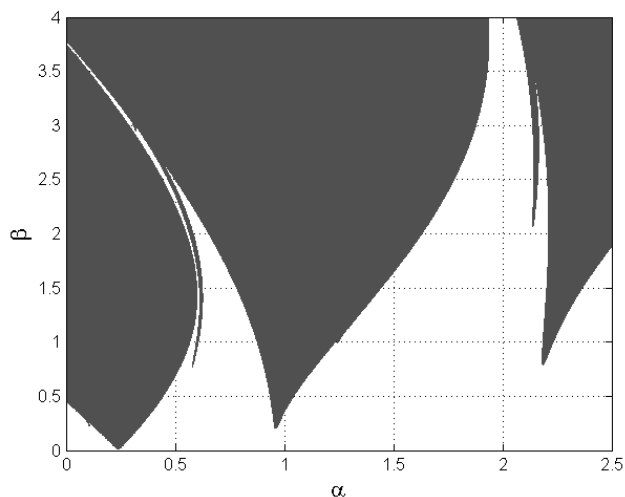


Figura 4. Zonas de estabilidad para la ecuación (9)

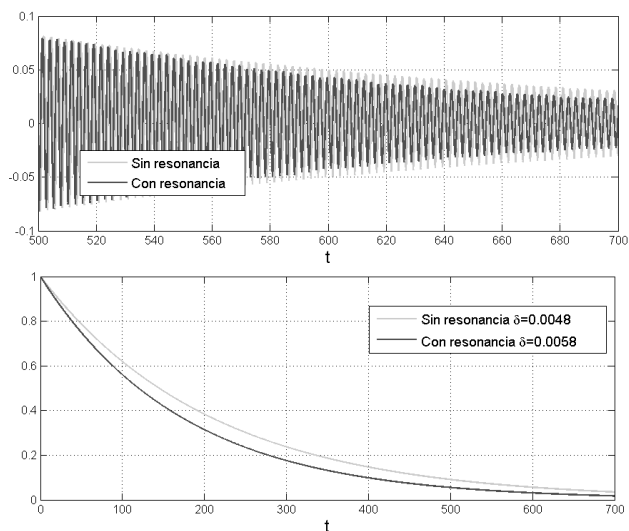


Figura 5. Señal de la respuesta de la ecuación (9) para  $\alpha = 2, \beta = 3$

Gracias a la factorización de Lyapunov-Floquet, ver Brockett (1970), el sistema (5) variante en el tiempo de forma periódica, se puede transformar en un sistema invariante en el tiempo

$$\dot{z} = Rz \quad (10)$$

donde  $R$  proviene de la definición de la matriz de monodromía  $M = e^{RT}$ . Cabe señalar que esta equivalencia entre (5) y (10) es útil solo para el análisis, pues para conocer  $R$  es necesario conocer la matriz de monodromía  $M$ , lo que implica conocer la solución de (5) lo que sólo se puede hacer con métodos numéricos. Pero por ahora basta con conocer el espectro de  $R$ ,  $\sigma(R) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$ , donde  $\rho_i$  esta dado por  $\rho_i = \frac{1}{T} \ln(-\lambda_i)$ , ver Adrianova (1995), donde  $\lambda_i \in \sigma(M)$ .

Por otro lado sabemos que (8) se puede escribir como

$$\dot{y} = \tilde{A}y \quad (11)$$

con  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -A & -\Gamma \end{bmatrix}$ . Otra forma de comparar o estimar cuanto amortiguamiento ganamos con la introducción de la excitación paramétrica es comparando los

valores característicos de  $\tilde{A}$  con los de  $R$ , particularmente el valor característico de mayor norma, entonces suponemos que  $\delta$  es la componente real del valor característico como si se tratase de un sistema de segundo orden, podemos ver en la Fig. 6 que (10) cuenta con más amortiguamiento que (11), pues los valores característicos de  $R$  están más a la izquierda que los de  $\tilde{A}$ .

Ahora si variamos las constantes de elasticidad en dos de los tres resortes:

$$k_1(t) = k_{1a} + k_{1b} \cos(t), \text{ con } k_{1a} > 0, |k_{1a}| > |k_{1b}|$$

$$k_3(t) = k_{3a} + k_{3b} \sin(t), \text{ con } k_{3a} > 0, |k_{3a}| > |k_{3b}|$$

obtendremos

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + (\alpha A + \beta (B \cos(t) + C \sin(t))) x = 0 \quad (12)$$

si  $m_1 = 0,5, m_2 = 1, k_2 = 0,1, k_{1a} = 2, k_{1b} = 1, k_{3a} = 2, k_{3b} = 1$ . Por lo tanto  $A = \begin{bmatrix} 3,1 & -0,1 \\ -0,05 & 1,05 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Haciendo el análisis de estabilidad para (12)

obtendremos el diagrama mostrado en la Fig. 7. En la Fig. 8 podemos observar que la respuesta del sistema con excitación paramétrica (12), en el punto de operación  $\alpha = 1,75, \beta = 1$ , decae más rápido casi en 37% que el sistema sin excitación paramétrica (8).

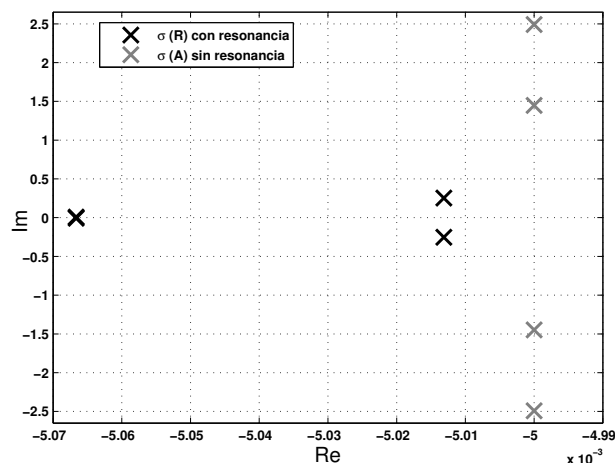


Figura 6. Valores característicos de (11) y (10)

Por último podemos mostrar un ejemplo donde se varia la frecuencia de la señal de excitación. Variamos la constante de elasticidad del segundo resorte  $k_2(t) = k_{2a} + k_{2b} \cos(\omega t)$  entonces:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + (A + \beta B \cos(\omega t)) x = 0 \quad (13)$$

si  $A = \begin{bmatrix} 3,1 & -0,1 \\ -0,05 & 1,05 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  la grafica de estabilidad de (13) se observa en la Fig. 9 y la respuesta del sistema para  $\omega = 1, \beta = 2$ , nuevamente, es más atenuada en un 21% que la del sistema sin excitación paramétrica, y se puede ver en la Fig. 10

Como pudimos observar en los tres ejemplos mostrados vale la pena variar el parámetro de forma periódica, pues la respuesta se atenúa más rápido, sin embargo como se puede observar en cada uno de los ejemplos la señal de respuesta son diferentes, mientras que en el primer

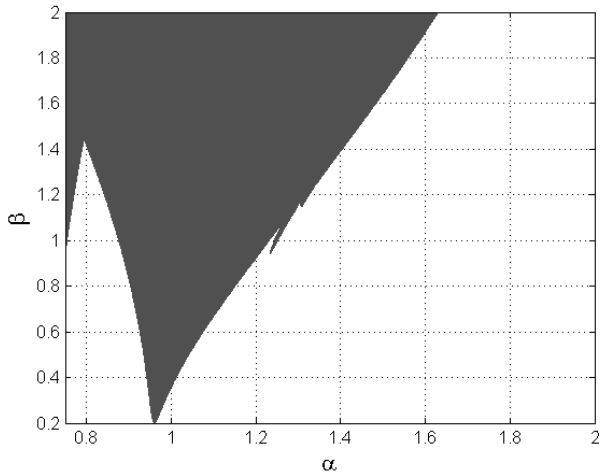


Figura 7. Zonas de estabilidad para la ecuación (12)

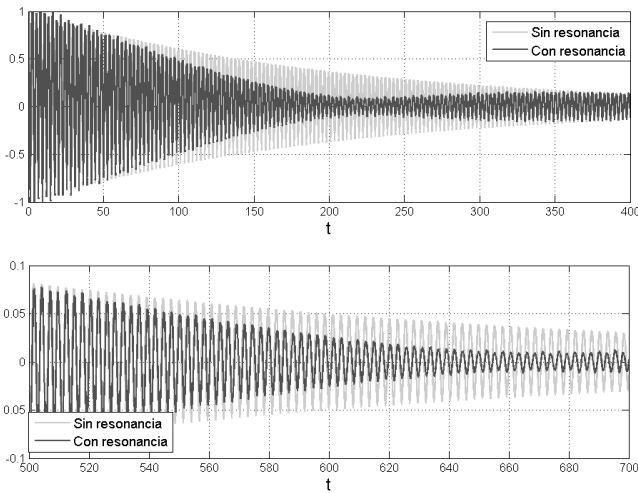


Figura 8. Señal de la respuesta de la ecuación (12) para  $\alpha = 1,75$ ,  $\beta = 1$

caso se pudo suponer que la respuesta está descrita por  $x(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi)$  en los otros dos casos no se puede hacer, pues la señal de respuesta tiene formas oscilatorias quasi-periódicas, sin embargo para los tres ejemplos el factor de decaimiento de las señales es mayor que en el caso del sistema sin excitación.

En resumen, al tener un sistema mecánico (3) con un ligero amortiguamiento, nosotros introducimos un resorte con elasticidad variable de forma periódica, ver Bolotin (1964) y Panovko and Gubanov (1967) (donde se propone una manera de construir este resorte), o usando el efecto piezoeléctrico, ver por ejemplo Jalili (2010). Con esto obtenemos un sistema en forma de la ecuación de Hill en dimensión dos. Es importante aclarar que el sistema no presenta resonancia paramétrica, nosotros introducimos esta variación periódica de la elasticidad, a diferencia de los trabajos de Fossen and Nijmeijer (2012), donde el sistema físico es modelado con la ecuación de Mathieu.

Al no medir el estado el costo de la implementación es considerablemente más barato, esta es la gran ventaja del control en lazo abierto, sin embargo si tenemos información

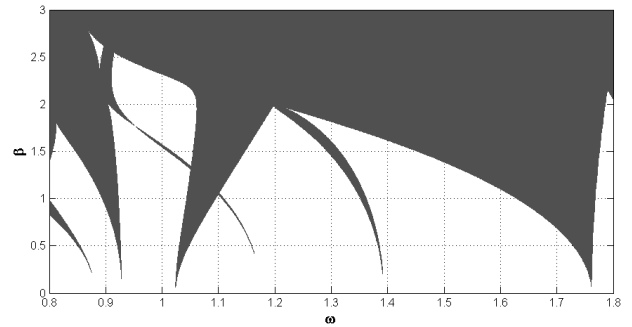


Figura 9. Zonas de estabilidad para la ecuación (13)

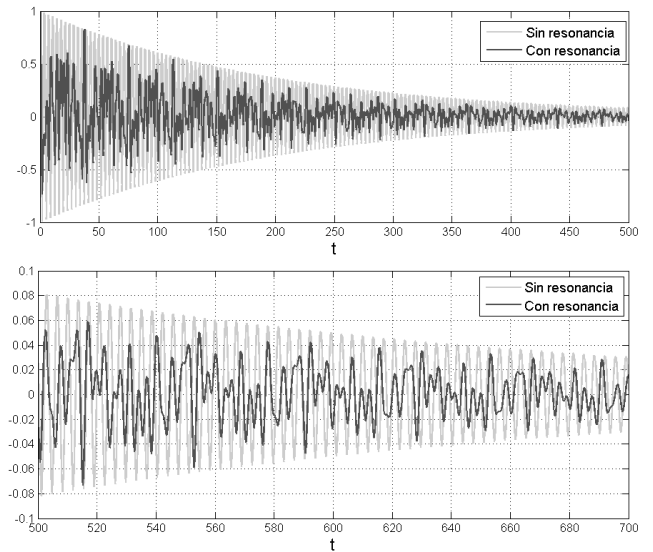


Figura 10. Señal de la respuesta de la ecuación (13) para  $\omega = 1$ ,  $\beta = 2$

del estado podremos incrementar la atenuación con retroalimentación de estado. La comparación del desempeño entre un sistema y otro es injusta en el sentido que estamos consiguiendo atenuación en lazo abierto.

#### 4. CONCLUSIONES

Al introducir excitación paramétrica en el sistema agregamos bastantes puntos de inestabilidad, sin embargo podemos reducir vibraciones en la respuesta del sistema sin medir el estado, está es la gran ventaja de este método, el control aplicado es en malla abierta. Sin duda vale la pena hacer un análisis matemático más profundo para la ecuación de Hill en dimensión dos, de tal manera que podamos crear una metodología para la elección de la función periódica necesaria para tener el máximo amortiguamiento y las zonas de inestabilidad sean mínimas.

#### REFERENCIAS

- Adrianova, L.Y. (1995). *Introduction to linear systems of differential equations*. 146. American Mathematical Soc.
- Arnold, V.I. (1983). Remarks on the perturbation theory for problems of mathieu type. *Russian Mathematical Surveys*, 38(4), 215–233.
- Axisa, F. (2003). *Modelling of Mechanical Systems: Discrete Systems*. Elsevier.

- Bolotin, V. (1964). *The Dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day, Inc.
- Brockett, R. (1970). *Finite dimensional linear systems*. John Wiley and Sons.
- Cesari, L. (1963). *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Springer.
- Fossen, T.I. and Nijmeijer, H. (2012). *Parametric resonance in dynamical systems*. Springer.
- Hansen, J. (1985). Stability diagrams for coupled mathieu-equations. *Ingenieur-Archiv*, 55(6), 463–473.
- Jalili, N. (2010). *Piezoelectric-based vibration control*. Springer.
- Jordan, D.W. and Smith, P. (2007). *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*. New York.
- Landau, L. (1976). *Mechanics: Volume 1 (Course Of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann.
- Magnus, W. and Winkler, S. (1966). *Hill's equation*. John Wiley and Sons.
- Panovko, Y.G. and Gubanov, I.I. (1967). *Stability and oscillation of elastic systems: modern concepts, paradoxes and errors*.
- Seyranian, A.P. and Mailybaev, A.A. (2003). *Multiparameter stability theory with mechanical applications*, volume 13. World Scientific.
- Yakubovich, V. and Starzhinskii, V. (1975). *Linear Differential Equations With Periodic Coefficients*. John Wiley and Sons.