

Control de altura de un vehículo aéreo planar con velocidad crucero

Ricardo Cuesta^{*,***} Joaquín Álvarez^{*} Ervin Álvarez^{**}
Moises Miranda^{***}

^{*} Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE
(e-mail: {jcuesta,jqalvar}@cicese.mx)

^{**} Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Campus Xalapa,
Universidad Veracruzana (e-mail: eralvarez@uv.mx)

^{***} Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, UABC (e-mail:
{ricardo.cuesta,mmiranda}@uabc.edu.mx)

Resumen: En este trabajo se utiliza un modelo simplificado de una aeronave PVTOL para diseñar un par de leyes de control discontinuas. El diseño del primer controlador es mediante una superficie deslizante no conexas. El segundo controlador permite llevar a cabo el despegue y aterrizaje de la aeronave sin que se presenten sobreimpulsos y alcanzando la altura deseada en un tiempo finito.

Palabras clave: Modos deslizantes, regulación de posición y velocidad, control de aeronaves.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo y control de un avión con movimiento en un plano con despegue y aterrizaje vertical (PVTOL por sus siglas en inglés) ha sido estudiado extensamente por varios investigadores Wang (2013); Hu and Zhang (2013); Sanchez-Rodriguez Omar et al. (2013); Abdessameud and Tayebi (2010); Wang et al. (2009); Benosman (2009); Hauser et al. (1992); Martin et al. (1996); Zhang and Brandt (1999). Uno de los primeros trabajos en proponer un esquema de control automático es presentado en Hauser et al. (1992), donde se desarrolla una aproximación mediante un procedimiento de linealización entrada-salida que produce un seguimiento acotado y la estabilización asintótica de un avión con despegue y aterrizaje vertical/corto (V/STOL por sus siglas en inglés), el modelo de este tipo de aeronave es no lineal subactuado de 6 grados de libertad, por lo que propone usar el modelo de un PVTOL como una simplificación para estudiar el control de altitud del avión. En Martin et al. (1996) se propone una extensión del resultado propuesto en Hauser et al. (1992), proponiendo un modelo matemático simplificado, el cual permite el desacoplamiento entre las variables, lo que permite analizar el problema de control por partes. En general los primeros esquemas de control propuestos son obtenidos por procesos de linealización y presentan sensibilidad a perturbaciones, en Zhang and Brandt (1999) se presenta un esquema de control robusto para regulación de movimientos laterales con una altitud constante. Varios autores utilizan esta aproximación y proponen diversas estrategias de control considerando únicamente como objetivo de control la posición Abdessameud and Tayebi (2010); Benosman (2009); Wang et al. (2009), algunos otros proponen esquemas de control de la posición considerando la altura constante Azinheira and Moutinho (2008); Hauser et al. (1992); Zhang and Brandt (1999). En la mayoría de los trabajos se considera comúnmente el uso

de una función saturación para limitar el ángulo de giro y la velocidad de la aeronave para evitar que la dinámica interna desestabilice al sistema. Algunos trabajos como Hu and Zhang (2013); Sanchez-Rodriguez Omar et al. (2013) consideran en el diseño del esquema de control esta saturación, pero solo pueden mostrar estabilidad local.

En este trabajo se implementa un esquema de control para la altitud y el ángulo de giro de un PVTOL, utilizando un control por modos deslizantes utilizando una superficie discontinua. También se desarrolla un esquema de control que está basado en el propuesto en Cuesta et al. (2013), pero que llega a una referencia fija en tiempo finito con una velocidad constante acotada. A la velocidad constante definida por el usuario también se le conoce como *velocidad crucero*. La cota de velocidad y el punto de referencia se establecen como parámetros del control. Además, se muestra la estabilidad global del punto de equilibrio. Se presentan los resultados obtenidos en la simulación numérica al implementar los controladores propuestos.

El trabajo se divide de la siguiente manera; en la siguiente sección se presenta el modelo utilizado, en la sección 3 se desarrolla el esquema de control, un experimento numérico se presenta en la sección 4 y finalmente en la sección 5 se dan las conclusiones del trabajo.

2. SISTEMA

Como en Martin et al. (1994), consideramos un modelo simplificado de aeronave PVTOL. El esquema de este sistema se ilustra en la figura 1. Considere (i, j, k) un marco de referencia inercial fijo y (i_b, j_b, k_b) con $j_b = j$ un marco móvil referido a la aeronave (ejes del cuerpo).

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son

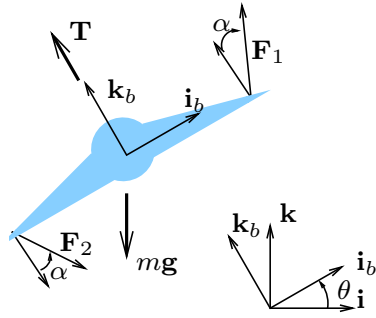


Fig. 1. Aeronave planar VTOL.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T\mathbf{k}_b, \\ \mathbf{F}_1 &= (\sin \alpha \mathbf{i}_b + \cos \alpha \mathbf{k}_b)F, \\ \mathbf{F}_2 &= (\sin \alpha \mathbf{i}_b - \cos \alpha \mathbf{k}_b)F, \\ m\mathbf{g} &= -mg\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento escritas en términos del centro de masa C son

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_C &= \mathbf{T} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + m\mathbf{g}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_C &= \mathbf{C}M_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{C}M_2 \times \mathbf{F}_2, \end{aligned}$$

donde \mathbf{a}_C es la aceleración de C y $\boldsymbol{\sigma}_C$ es el momento angular sobre C . M_1 y M_2 son los puntos donde las fuerzas F_1 y F_2 son aplicadas. Expandiendo estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) &= T\mathbf{k}_b + 2F \sin \alpha \mathbf{i}_b - mg\mathbf{k}, \\ -J\ddot{\theta}\mathbf{j}_b &= -2lF \cos \alpha \mathbf{j}_b, \end{aligned}$$

donde J es el momento de inercia sobre C , y l es la distancia del punto C a los puntos M_1 y M_2 . Definiendo

$$\begin{aligned} u_1 &:= \frac{T}{2F}, \\ u_2 &:= \frac{\cos \alpha}{m}, \\ \varepsilon &:= \tan \alpha, \\ \lambda &:= \frac{ml}{J} \end{aligned}$$

y proyectando sobre el marco de referencia fijo, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - g, \\ \ddot{\theta} &= \lambda u_2. \end{aligned}$$

Haciendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, z_1 = z, z_2 = \dot{z}$ y $\theta_1 = \theta, \theta_2 = \dot{\theta}$ tenemos que en variables de estado, la dinámica del modelo de la aeronave PVTOL es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - g, \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \lambda u_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Utilizando la transformación propuesta en Olfati-Saber (2000) aplicamos los siguientes cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \sin \theta_1, \\ \xi_2 &= x_2 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \theta_2 \cos \theta_1, \\ \zeta_1 &= z_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} (\cos \theta_1 - 1), \\ \zeta_2 &= z_2 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \theta_2 \sin \theta_1, \\ \psi_1 &= \theta_1, \\ \psi_2 &= \theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -\bar{u}_1 \sin \psi_1, \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= \bar{u}_1 \cos \psi_1 - g, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= u_2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\bar{u}_1 = u_1 - \varepsilon \psi_2^2$ y consideraremos que $\lambda = 1$.

3. CONTROL

Aunque el objetivo en este trabajo es relativa a la altura z de la aeronave PVTOL, se deben considerar las otras dos variables libres, es decir, la posición horizontal x y el ángulo de giro de la aeronave θ . El sistema (1) tiene tres grados de libertad y solo dos actuadores, por lo tanto se trata de un sistema subactuado. Para el despegue o aterrizaje la variable de mayor importancia es el ángulo de giro, ya que éste siempre debe ser cero. Debido a esta consideración y a que se trata de un sistema subactuado, la posición horizontal de la aeronave no será analizada en este trabajo.

Para simplificar el análisis, del sistema reducido (3), es posible hacer

$$\bar{u}_1 \cos \psi_1 - g = v_1,$$

donde v_1 es la nueva entrada de control encargada de imponer la dinámica en lazo cerrado para la altura. Así, tenemos que

$$\bar{u}_1 = \frac{v_1 + g}{\cos \psi_1}. \quad (4)$$

Finalmente, al sustituir (4) en (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -(v_1 + g) \tan \psi_1, \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= v_1, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= u_2, \end{aligned} \quad (5)$$

de esta forma se desacoplan las variables asociadas a la altura ζ y al ángulo de giro ψ .

3.1 Despegue

Para lograr imponer una dinámica en la aeronave, tal que el despegue hacia un punto fijo lo haga con una velocidad constante deseada, se utilizará la ley de control propuesta en Cuesta et al. (2013). En dicho trabajo se utiliza una superficie deslizante discontinua, mediante la cual se mantiene una velocidad constante hasta alcanzar la posición deseada y posteriormente permite la convergencia exponencial hacia el origen, tal como se muestra en la figura 2.

Dada la forma de las ecuaciones en (5) es posible obtener el siguiente resultado.

Teorema 1. Considere el sistema dado en (5) y las siguientes leyes de control

$$\begin{aligned} v_1 &= -b_1 \zeta_2 - \alpha_1 \text{sign}(\beta_1 \text{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + z_2) \\ u_2 &= -b_2 \psi_2 - \alpha_2 \text{sign}(\beta_2 \text{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2) \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ son constantes reales positivas y $(\zeta_d, \psi_d) \in \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ es un punto de operación fijo.

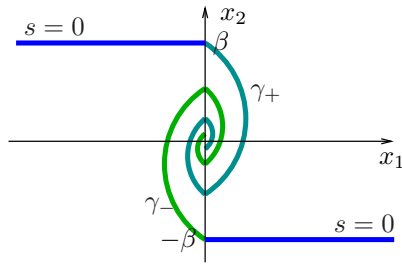


Fig. 2. Superficie deslizante discontinua ($s = 0$) y la evolución de la solución al dejar dicha superficie (γ_+ ó γ_-).

Si $b_1\beta_1 - \alpha_1 < 0$ y $b_2\beta_2 - \alpha_2 < 0$, entonces $\zeta \rightarrow \zeta_d$ y $\psi \rightarrow \psi_d$ cuando $t \rightarrow \infty$ y la velocidad crucero estará dada por β_1 y β_2 para z_2 y ψ_2 , respectivamente.

Demostración. Sustituyendo las leyes de control en el sistema (5), tenemos las siguientes ecuaciones de estado en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= -b_1\zeta_2 - \alpha_1 \text{sign}(\beta_1 \text{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2), \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -b_2\psi_2 - \alpha_2 \text{sign}(\beta_2 \text{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2). \end{aligned}$$

Dado que se tienen dos sistemas desacoplados de segundo orden cada uno y por el teorema dado en Cuesta et al. (2013), tenemos que $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow (\zeta_d, 0)$ y que $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\psi_d, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En este caso solo se ha considerado controlar las variables ζ y ψ . Debido a que el sistema (5) es subactuado, la variable ξ no podrá ser manipulada mientras el objetivo de control esté sobre ζ y ψ . En otras palabras, si el objetivo es que la aeronave tenga un ángulo de giro fijo distinto de cero, está inevitablemente se moverá sobre la componente horizontal; *e.g.* si el ángulo fijo es positivo (negativo) se moverá a la izquierda (derecha), aunque se conserve la altura deseada.

Para aplicar el resultado del teorema 1 al sistema (1) se debe considerar que $u = \bar{u}_1 + \varepsilon\psi_2^2$ y $\bar{u}_1 = (v_1 + g)/\cos\psi_1$. Por otra parte, tenemos que si $\psi_d = 0$ y por el cambio de variables dado en (2) tenemos que $\theta_1 \rightarrow 0$ y entonces $z_1 \rightarrow \zeta_d$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1. Considere el sistema dado en (1) con los siguientes parámetros, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda = 1$, $g = 9.81$ y el controlador descrito en el teorema 1 con los siguientes parámetros de diseño $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Las condiciones iniciales del sistema son $(x_{10}, x_{20}, z_{10}, z_{20}, \theta_{10}, \theta_{20})^T = 0 \in \mathbb{R}^6$, el tiempo de simulación es $t \in [0, 5]$ y las referencias deseadas son $x_d = 2$ y $\theta_d = 0$.

En la figura 3 se muestra un esquema de despegue de la aeronave PVTOL y cada dibujo que se muestra está espaciado del siguiente por la misma diferencia de tiempo (equitemporal). La aeronave inicia en el origen (dibujo inferior) y va subiendo a la posición deseada. Observe que al inicio y al final del trayecto, la distancia entre dibujos no es constante. Se observa que en una región entre el origen y el punto de referencia la distancia entre los dibujos es constante, lo que indica que la velocidad de la aeronave también es constante.

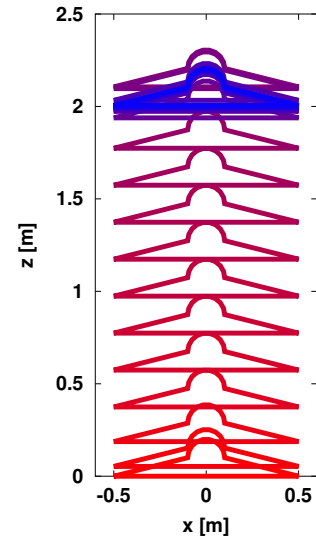


Fig. 3. Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en el teorema 1.

3.2 Aterrizaje

El controlador para la altura dado en el teorema 1 también es útil en el aterrizaje de la aeronave PVTOL al hacer $z_d = 0$, pero de manera práctica la aeronave puede chocar con la referencia utilizada para el aterrizaje, debido a que se tienen sobretiros al momento en que la aeronave alcanza la altura deseada y esos sobretiros no son recomendables al momento de aterrizar (véase figura 3, dibujos superiores).

Para evitar los sobretiros generados al aplicar el control dado en el teorema 1, pero conservando la velocidad crucero proponemos el controlador que se describe a continuación.

Superficie sigmoide. Considere el sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + u_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Con la siguiente ley de control

$$u_1 = -\alpha \text{sign } s,$$

donde b y α son constantes reales positivas y

$$s = \begin{cases} 2\alpha x_1 + x_2^2 \text{sign } x_2, & |x_1| < \frac{\beta^2}{2\alpha}, \\ \beta \text{sign } x_1 + x_2, & |x_1| \geq \frac{\beta^2}{2\alpha}, \end{cases} \quad (7)$$

con β una constante real positiva. En la figura 4 se muestra el lugar geométrico donde $s = 0$.

Observe que cuando $|x_1| \geq \beta^2/2\alpha$ se tiene el mismo controlador que en el teorema 1 (compárese la figura 4 con la figura 2), por lo que solo nos enfocaremos al caso en que $|x_1| < \beta^2/2\alpha$.

Una forma usual de demostrar que la superficie s es atractora es demostrando que $s \cdot \dot{s} < 0$ (véase Utkin (1978, 1992)). En nuestro caso, por la complejidad de la desigualdad, decidimos basarnos en la geometría de la superficie y de la dirección del campo vectorial alrededor de dicha superficie.

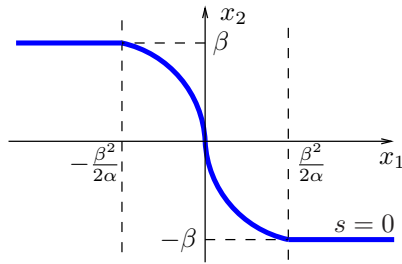


Fig. 4. Superficie deslizante sigmoide.

Primeramente, consideremos que $-\beta^2/2\alpha < x_1 < 0$; en ese intervalo tenemos que $s = 2\alpha x_1 + x_2^2 = 0$, por lo que el lugar geométrico está dado por $x_2 = (-2\alpha x_1)^{1/2} = f(x_1)$. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la superficie está dada por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\alpha}{x_2}.$$

Por otra parte, la pendiente del campo vectorial está dado por

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -b \pm \frac{\alpha}{x_2},$$

donde el signo positivo (negativo) corresponde cuando x_2 es menor (mayor) que $(-2\alpha x_1)^{1/2}$.

Entonces, para que la superficie sea atractora se debe satisfacer (véase figura 5):

- (1) La pendiente del campo vectorial debe ser menor que la derivada de la función $f(x_1)$ cuando $x_2 > (-2\alpha x_1)^{1/2}$.
- (2) La pendiente del campo vectorial debe ser mayor que la derivada de la función $f(x_1)$ cuando $x_2 < (-2\alpha x_1)^{1/2}$.

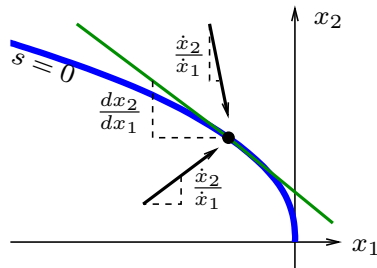


Fig. 5. Segmento de la superficie dada en (7) cuando $-\beta^2/2\alpha < x_1 < 0$.

Por lo tanto, para que la superficie s sea atractiva se tiene que cumplir con

1. $-b - \frac{\alpha}{x_2} < \frac{-\alpha}{x_2} \rightarrow b > 0$.
2. $-b + \frac{\alpha}{x_2} > \frac{-\alpha}{x_2} \rightarrow bx_2 < 2\alpha$.

El valor máximo que puede tomar x_2 dentro del intervalo de análisis es $x_2 = \beta$, por lo que, de la segunda desigualdad tenemos que $b\beta < 2\alpha$. Esta desigualdad siempre se satisface debido a que la condición del teorema 1 es $\alpha > b\beta$. Para el caso en que $0 < x_1 < \beta^2/2\alpha$ se hace un procedimiento similar y se llegan a las mismas condiciones.

La superficie propuesta se diseñó de manera que está asociada a la curva solución que tendría el sistema si éste fuera

conservativo y ante una entrada constante, de manera que pase por el origen a partir de la velocidad crucero β . La solución del sistema conservativo considerando que las condiciones iniciales son $(y_{10}, y_{20})^T = (\mp\beta^2/2\alpha, \pm\beta)^T$ es

$$y_1(t) = \mp\frac{\alpha}{2}t^2 \pm \beta t \mp \frac{\beta^2}{2\alpha},$$

$$y_2(t) = \mp\alpha t \pm \beta,$$

donde obtenemos que el tiempo en llegar al origen está dado por $t = \beta/\alpha$.

Ley de control. A partir de la sección anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2. Considere el sistema dado en (5) y las siguientes leyes de control

$$v_1 = -b_1\zeta_2 - \alpha_1 \text{sign}(s)$$

$$u_2 = -b_2\psi_2 - \alpha_2 \text{sign}(\beta_2 \text{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2)$$

con

$$s = \begin{cases} 2\alpha_1(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2^2 \text{sign} \zeta_2, & |\zeta_1 - \zeta_d| < \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1}, \\ \beta_1 \text{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2, & |\zeta_1 - \zeta_d| \geq \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1}, \end{cases}$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ son constantes reales positivas y $(\zeta_d, \psi_d) \in \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ es un punto de operación fijo. Si $b_1\beta_1 - \alpha_1 < 0$ y $b_2\beta_2 - \alpha_2 < 0$, entonces $\zeta \rightarrow \zeta_d$ y $\psi \rightarrow \psi_d$ cuando $t \rightarrow \infty$ y la velocidad crucero estará dada por β_1 y β_2 para ζ_2 y ψ_2 , respectivamente. Además la convergencia a la altura deseada ζ_d se dará en tiempo finito.

Demostración. Al sustituir las leyes de control en (5) tenemos que el ángulo de giro ψ_1 permanece idéntica que en el teorema 1, mientras que para la altura obtenemos la misma estructura que la dada en (6) con la superficie dada en (7). Por lo descrito en la sección anterior tenemos que la altura no presentará sobretiros, llegará a la referencia en tiempo finito y mientras lo hace será con una velocidad constante.

Nuevamente, para aplicar el resultado del teorema 2 al sistema (1) se debe considerar que $u = \bar{u}_1 + \varepsilon\psi_2^2$ y $\bar{u}_1 = (v_1 + g)/\cos \psi_1$. Por otra parte, tenemos que si $\psi_d = 0$ y por el cambio de variables dado en (2) tenemos que $\theta_1 \rightarrow 0$ y entonces $z_1 \rightarrow \zeta_d$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 2. Considere el mismo sistema, parámetros, condiciones iniciales y referencias deseadas que se usaron en el ejemplo 1. En la figura 6 se muestra un esquema de despegue de la aeronave PVTOL, pero empleando los controladores dados en el teorema 2. Observe que al igual que en el ejemplo 1, los dibujos están equiespaciados en el intermedio del trayecto, lo que indica que la velocidad de la aeronave es constante. También es posible apreciar que no existen sobretiros al llegar a la altura deseada (compárese con la figura 3).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Ejemplo 3. Considere el sistema dado en (1) con los siguientes parámetros, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda = 1$, $g = 9.81$ y el controlador descrito en el teorema 1 con los siguientes parámetros de diseño $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Las condiciones iniciales del sistema son $(x_{10}, x_{20}, z_{10}, z_{20}, \theta_{10}, \theta_{20})^T = (0, 0, 0, 0, 0.2, 0)^T$, el tiempo

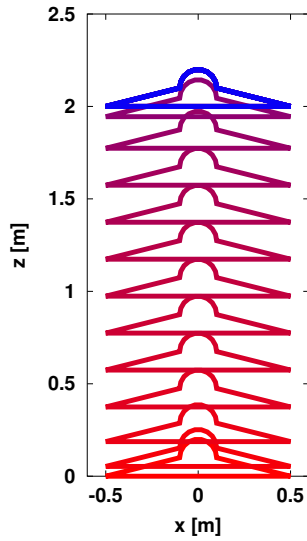


Fig. 6. Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en teorema 2.

de simulación es $t \in [0, 10]$ y las referencias deseadas son $\theta_d = 0$ y

$$x_d = \begin{cases} 2, & t \leq 5, \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

En este ejemplo tenemos que el ángulo es distinto de cero y la referencia deseada de altura es despegar hasta llegar a los 2 metros y después aterrizar (0 metros). En la figura 7a se muestra la altura de la aeronave y su respectiva velocidad. Observe que la velocidad crucero se presenta durante los intervalos de transición entre la condición inicial y la referencia deseada, ya sea en el despegue o en el aterrizaje. Por otra parte, la velocidad de la altura de la aeronave no excede en magnitud el valor de diseño β_1 .

La figura 7b muestra el ángulo de giro de la aeronave el cual es controlado por la entrada u_2 y se puede apreciar que éste llega a la referencia fija deseada, *i.e.* $\theta_d = 0$. En la figura 7c se muestran las entradas de control requeridas para cumplir con los dos objetivos de regulación. Finalmente, en la figura 7d se muestra el plano de fase $z_1 - z_2$, donde el punto de la izquierda corresponde al origen $z = 0 \in \mathbb{R}^2$, mientras que el punto de la derecha está dado por la otra referencia deseada, *i.e.* $z = (2, 0)^T$. En el plano de fase se puede apreciar fácilmente que la velocidad se mantiene constante en un intervalo mientras la trayectoria va de un punto a otro.

Ejemplo 4. Considere el mismo sistema, parámetros, condiciones iniciales y referencias deseadas que se usaron en el ejemplo 3, pero empleando los controladores descritos en el teorema 2.

En la figura 8a se muestran las variables de estado asociadas con la altura z_1 y la velocidad z_2 . Se puede apreciar que se alcanza la referencia deseada z_d y la velocidad se mantiene constante en diversos intervalos de tiempo, coincidiendo éstos entre el movimiento inicial y el final, observe que este comportamiento se presenta tanto en el despegue como en el aterrizaje. A diferencia de la respuesta

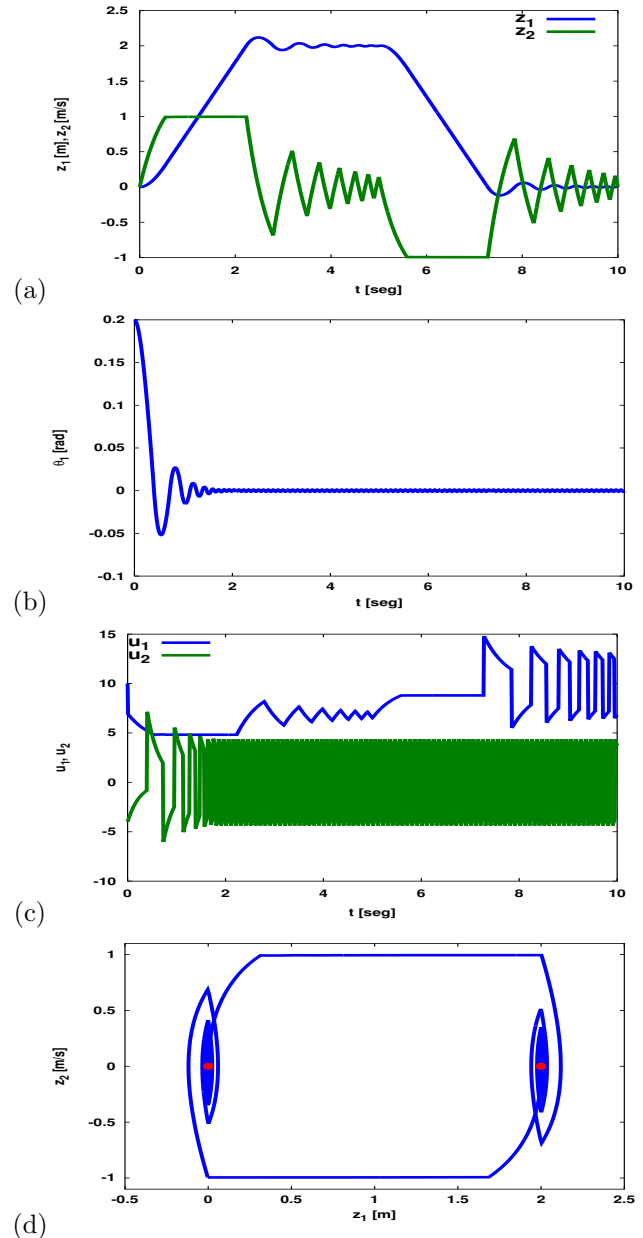


Fig. 7. Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 1. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad.

de la figura 7a, en este caso no se presentan sobretiros al desplazarse la aeronave de una posición fija a otra.

Dado que el control para el ángulo de giro es el mismo que el empleado en el teorema 1, el resultado idéntico y éste se muestra en la figura 8b. En la figura 8c se muestran las entradas de control requeridas para cumplir con los dos objetivos de regulación. La diferencia entre las señales de control contra las propuestas en el teorema 1 solo se presenta en u_1 , ya que es la entrada asociada con la altura. Finalmente, en la figura 8d se muestra el plano de fase $z_1 - z_2$. Al igual que en el ejemplo anterior, en la figura se indican los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$, correspondientes a los puntos fijos deseados. También se puede apreciar

fácilmente que la velocidad se mantiene constante en un intervalo mientras la trayectoria va de un punto a otro.

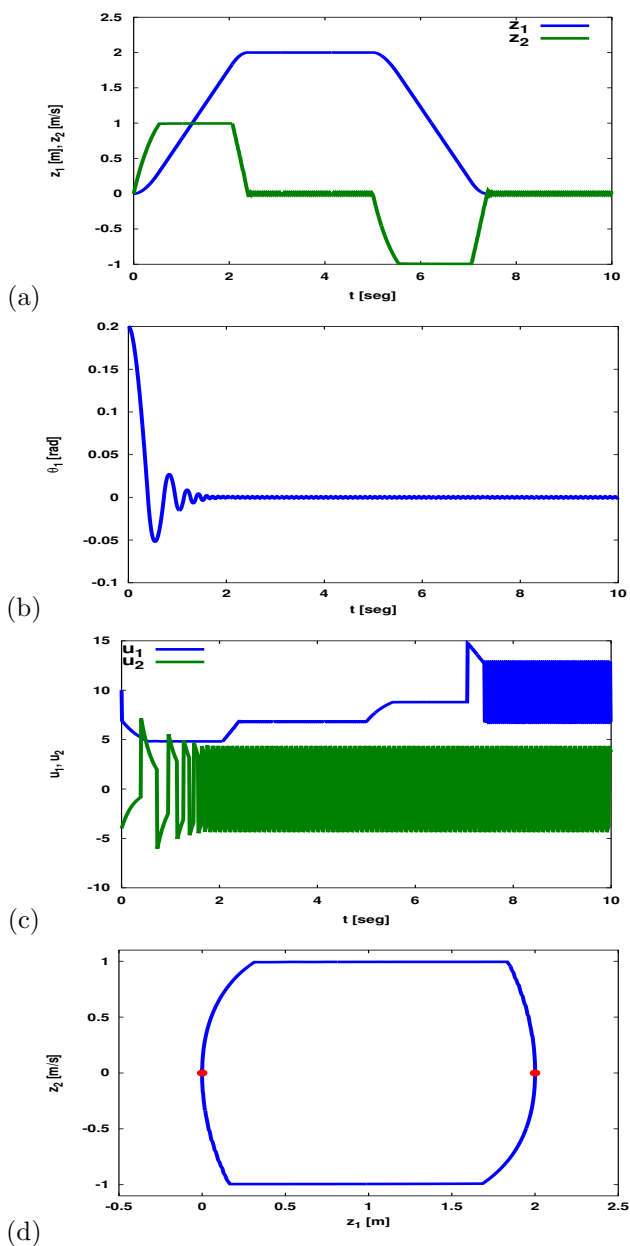


Fig. 8. Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 2. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad.

5. CONCLUSIONES

La ley de control del teorema 1 permite tener una velocidad constante mientras el sistema PVTOL alcanza un punto fijo deseado. Por otra parte, la ley de control para regulación del teorema 2 permite que el sistema no tenga sobretiros al momento de aterrizar (o de alcanzar un punto fijo) y hacerlo en tiempo finito. Debido al desacoplamiento entre variables del sistema es posible aplicar el control de altura propuesto en este trabajo independientemente si se busca controlar el ángulo de giro o la posición horizontal de la aeronave.

REFERENCIAS

- Abdessameud, A. and Tayebi, A. (2010). Global trajectory tracking control of VTOL-UAVs without linear velocity measurements. *Automatica*, 46(6), 1053–1059.
- Azinhira, J. and Moutinho, A. (2008). Hover Control of an UAV With Backstepping Design Including Input Saturations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(3), 517–526. doi:10.1109/TCST.2007.908209.
- Benosman, M. (2009). Nonlinear Control Allocation for Non-Minimum Phase Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(2), 394–404. doi:10.1109/TCST.2008.924568.
- Cuesta, R., Alvarez, J., Liera, C., and Miranda, M. (2013). Superficie discontinua aplicada a un sistema torsional. In *Congreso Nacional de Control Automatico, 2013*. AMCA.
- Hauser, J., Sastry, S., and Meyer, G. (1992). Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 28(4), 665–679.
- Hu, J. and Zhang, H. (2013). Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles. *Automatica*, 49(7), 2160–2167.
- Martin, P., Devasia, S., and Paden, B. (1994). A different look at output tracking: control of a vtol aircraft. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 3, 2376–2381. IEEE.
- Martin, P., Devasia, S., and Paden, B. (1996). A different look at output tracking: control of a vtol aircraft. *Automatica*, 32(1), 101–107. doi:10.1016/0005-1098(95)00099-2.
- Olfati-Saber, R. (2000). *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Sanchez-Rodriguez Omar, Chimal-Eguia Juan Carlos, and Barron-Fernandez Ricardo (2013). Nonlinear Control Approach Applied to PVTOL with Restricted Cartesian Dynamic. *Cybernetics and Physics*, 2(3), 169–176.
- Utkin, V.I. (1978). *Sliding modes and their applications in variable structure systems*. MIR.
- Utkin, V.I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Spinger-Verlag.
- Wang, X. (2013). Takeoff/landing control based on acceleration measurements for VTOL aircraft. *Journal of the Franklin Institute*, 350(10), 3045–3063.
- Wang, X., Liu, J., and Cai, K.Y. (2009). Tracking control for a velocity-sensorless VTOL aircraft with delayed outputs. *Automatica*, 45(12), 2876–2882.
- Zhang, W. and Brandt, R. (1999). Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3), 343–351. doi:10.1109/87.761054.