

## Observador adaptable para edificios basado en proyección paramétrica

Antonio Concha <sup>\*,\*</sup> Luis Alvarez-Icaza <sup>\*,\*\*</sup> Rubén Garrido <sup>\*\*</sup>

*\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Coyoacán D.F. 04510, México (e-mail: AConchaS@iingen.unam.mx,  
alvar@pumas.iingen.unam.mx)*

*\*\* Departamento de Control Automático, CINVESTAV IPN, Gustavo  
A. Madero D.F 07360, México, (e-mail: garrido@ctrl.cinvestav.mx)*

---

**Resumen:** Se presenta un observador adaptable que estima los parámetros y estados de un edificio excitado mediante un sismo, utilizando sólo mediciones de la aceleración del terreno y de cada piso del edificio. El observador propuesto emplea un algoritmo gradiente con proyección que estima sólo parámetros positivos y un estimador de estado de tipo Luenberger que emplea dichos parámetros. El algoritmo gradiente reduce la amplitud del transitorio de los parámetros estimados, lo cual a su vez permite que el transitorio de los estados estimados sea suave. Simulaciones numéricas confirman la efectividad del observador adaptable propuesto.

*Palabras clave:* Observador adaptable, gradiente con proyección, estructuras civiles, mediciones de aceleración, filtrado con integrales.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

La identificación simultánea de los parámetros y estados de un sistema ha sido un tema de investigación en las últimas cinco décadas. Luders y Narendra (1973), Zhang (2005), Ioannou y Fidan (2006) presentan observadores adaptables para sistemas lineales, cuyo modelo tiene que estar escrito en una forma canónica, obtenida mediante transformaciones estáticas o dinámicas. En el caso particular de edificios, se han propuesto observadores adaptables que estiman sus parámetros y su estado compuesto por los desplazamientos y velocidades de los pisos, utilizando sólo mediciones de aceleración (Yang et al., 2006; Jiménez y Alvarez-Icaza, 2008; Jiménez y Alvarez-Icaza, 2010; Angeles-Cervantes y Alvarez-Icaza, 2013). La estimación de estos parámetros y estado es importante porque permiten verificar la salud de la estructura, y porque son necesarios para el diseño de técnicas de control que atenúen las vibraciones del edificio cuando es sometido a fuerzas externas. La razón para emplear mediciones de aceleración en la identificación es que en la mayoría de los casos no es posible medir desplazamientos y velocidades absolutas en una estructura debido a que es difícil establecer una referencia inercial. Yang et al. (2006) propone un observador adaptable basado en el filtro de Kalman; en este caso los parámetros, los desplazamientos y velocidades de la estructura forman un estado extendido que se estima. Jiménez y Alvarez-Icaza (2008) presenta un observador adaptable basado en el método de Mínimos Cuadrados recursivo y propone una parametrización que permite estimar las relaciones masa/rigidez y masa/amortiguamiento. En Jiménez y Alvarez-Icaza (2010) se propone una nueva parametrización del edificio, la cual requiere menor es-

fuerzo computacional que la parametrización propuesta en Jiménez y Alvarez-Icaza (2008). Angeles-Cervantes y Alvarez-Icaza (2013) presenta un observador adaptable que estima el estado y los parámetros del modelo tridimensional de un edificio sujeto a dos señales de excitación sísmica, las cuales son horizontales y ortogonales.

Este artículo propone un observador adaptable que estima simultáneamente los estados y parámetros de un edificio. Las mediciones de la aceleración del terreno y la aceleración de cada piso del edificio se suponen disponibles. El observador adaptable combina el algoritmo gradiente con proyección con un estimador de estado del tipo Luenberger, el cual emplea los parámetros estimados por gradiente. Este algoritmo garantiza que los parámetros estimados son positivos y que se encuentran en un rango permitido, y ocasiona que la amplitud máxima del transitorio en dichos parámetros sea pequeña en comparación con la amplitud máxima que dichos estimados tendrían si éstos no se limitaran a dicho rango; la reducción de este transitorio a su vez permite que el comportamiento inicial de los estados estimados sea suave. El método gradiente utiliza la parametrización matricial de un edificio de  $n$  grados de libertad propuesta en Jiménez y Alvarez-Icaza (2008), la cual se puede dividir en  $n$  parametrizaciones independientes y desacopladas en los parámetros que se estimarán; dichas parametrizaciones son filtradas mediante integrales retardadas con la finalidad de utilizar sólo mediciones de aceleración y de atenuar el ruido de medición. Si el regresor de cada una de las  $n$  parametrizaciones cumple una condición de excitación persistente, entonces se asegura la convergencia de los parámetros y estados estimados a los reales. A diferencia de los observadores adaptables propuestos en Jiménez y Alvarez-Icaza (2008), Jiménez y Alvarez-Icaza (2010), Angeles-Cervantes y Alvarez-Icaza (2013), la prueba de estabilidad del estimador paramétrico

---

\* Investigador posdoctoral con beca otorgada por Conacyt

\*\*Autor corresponsal

es independiente de la prueba de estabilidad del estimador de estado. Además, en comparación con los observadores adaptables en Luders y Narendra (1973), Zhang (2005), Ioannou y Fidan (2006), el observador propuesto tiene la ventaja de que no requiere que el modelo del sistema esté escrito en una forma canónica particular.

El artículo está organizado como sigue. La Sección 2 muestra el modelo del edificio. La Sección 3 describe la parametrización del modelo empleada por el algoritmo de gradiente con proyección. La Sección 4 presenta el observador adaptable propuesto. La Sección 5 está dedicada a simulaciones numéricas. Finalmente, la Sección 6 establece las conclusiones de este trabajo.

## 2. MODELO DE UN EDIFICIO

El modelo de una estructura de  $n$  grados de libertad está dado por (Chopra, 2001)

$$M(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. La definición de estas matrices es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $c_i$  y  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) son respectivamente los coeficientes laterales de amortiguamiento y de rigidez de la columna entre el  $i$ -ésimo piso y el  $(i-1)$ -ésimo piso. Los componentes del vector  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$  son los desplazamientos de cada piso, medidos con respecto a la base. Las variables  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  son respectivamente los vectores de velocidad y de aceleración. El término  $\ddot{x}_g$  representa la aceleración absoluta del terreno inducida por el evento sísmico, finalmente,  $l = [1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \in R^n$ .

Defínase el vector de estado  $\zeta$  como

$$\zeta = [x^T, \dot{x}^T]^T \quad (3)$$

entonces, la ecuación (1) se puede expresar como:

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\ddot{x}_g, \quad y = D\zeta \quad (4)$$

donde  $y$  es la salida del sistema y está dada por:

$$y = \ddot{x} + l\ddot{x}_g \quad (5)$$

La definición de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $D$  es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad D = [-M^{-1}K \quad -M^{-1}C] \quad (6)$$

$$B = [O_{n \times 1}, \quad -l]^T \quad (7)$$

donde  $I_{p \times r}$  y  $O_{p \times r}$  son la matriz identidad y la matriz cero de tamaño  $p \times r$ , respectivamente.

La expresión (1) es equivalente a:

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = -M^{-1}C\dot{x} - M^{-1}Kx \quad (8)$$

Los términos  $M^{-1}C\dot{x}$  y  $M^{-1}Kx$  se pueden parametrizar como (Jiménez y Alvarez-Icaza, 2008):

$$M^{-1}C\dot{x} = \dot{u}\Theta_c, \quad M^{-1}Kx = u\Theta_k$$

donde  $\Theta_c, \Theta_k \in R^{2n-1}$  y  $u, \dot{u} \in R^{n \times 2n-1}$ ,

$$\Theta_c = [\theta_{c1}, \theta_{c2}, \theta_{c3}, \theta_{c4}, \theta_{c5} \cdots, \theta_{c(2n-1)}]^T$$

$$= \left[ \frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_1}, \frac{c_2}{m_2}, \frac{c_3}{m_2}, \frac{c_3}{m_3}, \frac{c_4}{m_3}, \dots, \frac{c_n}{m_n} \right]^T$$

$$\Theta_k = [\theta_{k1}, \theta_{k2}, \theta_{k3}, \theta_{k4}, \theta_{k5} \cdots, \theta_{k(2n-1)}]^T$$

$$= \left[ \frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{k_3}{m_2}, \frac{k_3}{m_3}, \frac{k_4}{m_3}, \dots, \frac{k_n}{m_n} \right]^T$$

$$u = - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_3 - x_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\dot{u}$  es la derivada con respecto al tiempo de  $u$ . En consecuencia, (8) es equivalente a

$$(\ddot{x} + l\ddot{x}_g) = \dot{u}\Theta_c + u\Theta_k \quad (10)$$

Supóngase lo siguiente:

- **A1** Las mediciones de aceleración del terreno y de cada piso están disponibles.
- **A2** La matrices  $M$ ,  $K$  y  $C$  son definidas positivas, lo cual implica que la matriz  $A$  en (6) es Hurwitz (Shieh et al., 1987).
- **A3** Se conocen cotas inferiores y superiores de las relaciones rigidez/masa y amortiguamiento/masa, es decir,
 
$$0 < \underline{\theta}_{ki} \leq \theta_{ki} \leq \overline{\theta}_{ki}, \quad 0 < \underline{\theta}_{ci} \leq \theta_{ci} \leq \overline{\theta}_{ci} \quad (11)$$
 $\underline{\theta}_{ki}, \underline{\theta}_{ci}$  son las cotas inferiores y  $\overline{\theta}_{ki}, \overline{\theta}_{ci}$  son las cotas superiores.
- **A4** Las condiciones iniciales  $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0), \dots$ , son cero. Esta suposición es razonable ya que la estructura se encuentra en reposo antes de un sismo.

## 3. PARAMETRIZACIÓN DEL MODELO

Esta sección presenta una parametrización empleada por el algoritmo gradiente de proyección el cual estima los parámetros de la estructura y forma parte del observador adaptable propuesto. La transformada de Laplace de (10) está dada por:

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g]) = sU(s)\Theta_c + U(s)\Theta_k \quad (12)$$

donde  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ .

El primer paso para obtener la parametrización utilizada por el algoritmo de identificación paramétrica consiste en multiplicar (12) por  $s^3$ , es decir,

$$(\mathcal{L}[\ddot{x}] + l\mathcal{L}[\ddot{x}_g])s^3 = U(s)s^4\Theta_c + U(s)s^3\Theta_k \quad (13)$$

La expresión (13) es equivalente a:

$$Y(s)s^3 = \mathcal{L}[\ddot{u}]s^2\Theta_c + \mathcal{L}[\ddot{u}]s\Theta_k \quad (14)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\ddot{x}(t) + l\ddot{x}_g(t)] \quad (15)$$

y  $\ddot{u}$  es la segunda derivada de  $u$  en (9) con respecto al tiempo. La ecuación (14) se puede escribir en el dominio del tiempo como:

$$y^{(3)} = u^{(4)}\Theta_c + u^{(3)}\Theta_k \quad (16)$$

donde el superíndice  $(i)$ ,  $i = 3, 4$  representa la  $i$ -ésima derivada de la variable correspondiente.

El siguiente paso consiste en integrar la ecuación anterior cinco veces sobre intervalos de tiempo finito para obtener términos que dependen de las variables medibles  $\ddot{u}$  e  $y$  en lugar de términos que dependen de sus derivadas. Para llevar a cabo este procedimiento es útil definir el siguiente operador (Garnier et al., 2003):

$$I_n\{\rho(t)\} = \frac{1}{\delta^n} \int_{t-\delta}^t \int_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} \cdots \int_{\tau_{n-1}-\delta}^{\tau_{n-1}} \rho(\tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1 \quad (17)$$

donde  $\delta \in R^+$ ,  $n$  es el número de integraciones sobre intervalos de tiempo finito de  $\rho$ . El periodo de integración  $\delta$  se define como

$$\delta = hT_s$$

$h > 0$  se denomina factor de longitud y  $T_s$  es el periodo de muestreo de  $\rho$ . Aplicando el operador  $I_5[\cdot]$  a la ecuación (16) resulta en:

$$\chi(t) = \Phi_c(t)\Theta_c + \Phi_k(t)\Theta_k \quad (18)$$

$$\chi(t) = \frac{1}{\delta^3} I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j y(t-j\delta) \right\} \quad (19)$$

$$\Phi_c(t) = \frac{1}{\delta^2} I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{u}(t-j\delta) \right\} \quad (20)$$

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{\delta} I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \ddot{u}(t-j\delta) \right\} \quad (21)$$

donde  $\chi \in R^n$ ,  $\Phi_c, \Phi_k \in R^{n \times 2n-1}$  y  $\binom{n}{j}$  es el coeficiente binomial. De (18) se obtiene la siguiente parametrización matricial:

$$\chi(t) = \Phi(t)\Theta \quad (22)$$

donde  $\Phi(t) = [\Phi_c(t) \ \Phi_k(t)]$  y  $\Theta = [\Theta_c^T \ \Theta_k^T]^T$ . Es importante mencionar que el parámetro  $\delta$  en (19)-(21) tiene que ser seleccionado para dejar pasar el contenido frecuencial de la estructura y para atenuar el ruido de medición (Garrido y Concha, 2012). Nótese que (18) se puede reescribir por medio de las siguientes  $n$  parametrizaciones desacopladas en los parámetros que se estimarán

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= \phi_{c11}(t)\theta_{c1} + \phi_{c12}(t)\theta_{c2} + \phi_{k11}(t)\theta_{k1} + \phi_{k12}(t)\theta_{k2} \\ \chi_2(t) &= \phi_{c23}(t)\theta_{c3} + \phi_{c24}(t)\theta_{c4} + \phi_{k23}(t)\theta_{k3} + \phi_{k24}(t)\theta_{k4} \\ &\vdots \\ \chi_n(t) &= \phi_{c(n \times 2n-1)}(t)\theta_{c(2n-1)} + \phi_{k(n \times 2n-1)}(t)\theta_{k(2n-1)} \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\phi_{cij}, \phi_{kij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n-1$  son los elementos de las matrices  $\Phi_c$  y  $\Phi_k$ , respectivamente. Las parametrizaciones en (23) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= \Psi_1^T(t)\vartheta_1 \\ \chi_2(t) &= \Psi_2^T(t)\vartheta_2 \\ &\vdots \\ \chi_n(t) &= \Psi_n^T(t)\vartheta_n \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(t) &= [\phi_{c j v}(t), \phi_{c j w}(t), \phi_{k j v}(t), \phi_{k j w}(t)]^T, \\ \vartheta_j &= [\theta_{c v}, \theta_{c w}, \theta_{k v}, \theta_{k w}]^T, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= [\phi_{c(n \times 2n-1)}(t), \phi_{k(n \times 2n-1)}(t)]^T, \\ \vartheta_n &= [\theta_{c(2n-1)}, \theta_{k(2n-1)}]^T \end{aligned}$$

donde  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $v = 2j-1$  y  $w = 2j$ .

#### 4. OBSERVADOR ADAPTABLE

En esta sección se describe el observador adaptable propuesto, el cual emplea al algoritmo gradiente con proyección para la identificación paramétrica y a un estimador de estado de tipo Luenberger. Defínense los siguientes conjuntos de proyección:

$$\begin{aligned} S_{\underline{ci}} &= \{\hat{\theta}_{ci} \in R \mid \underline{\theta}_{ci} - \hat{\theta}_{ci} \leq 0\} \\ S_{\overline{ci}} &= \{\hat{\theta}_{ci} \in R \mid \hat{\theta}_{ci} - \overline{\theta}_{ci} \leq 0\} \\ S_{\underline{ki}} &= \{\hat{\theta}_{ki} \in R \mid \underline{\theta}_{ki} - \hat{\theta}_{ki} \leq 0\} \\ S_{\overline{ki}} &= \{\hat{\theta}_{ki} \in R \mid \hat{\theta}_{ki} - \overline{\theta}_{ki} \leq 0\} \end{aligned} \quad (26)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ .

Sea la  $j$ -ésima parametrización en (23) y sean  $\phi_{kjs}$  y  $\phi_{cjs}$ ,  $s = (2j-1), 2j$  los componentes de  $\Phi$  en esa parametrización que son diferentes de cero. Aplicando el algoritmo gradiente con proyección a la  $j$ -ésima parametrización en (23) se obtienen las siguientes leyes de adaptación (Ioannou y Fidan, 2006):

$$\dot{\hat{\theta}}_{cs} = \begin{cases} \gamma_{cs} \epsilon_j \phi_{cjs}, & \text{si } \overline{\theta}_{cs} > \hat{\theta}_{cs} > \underline{\theta}_{cs} \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{cs} = \underline{\theta}_{cs} \text{ y } \epsilon_j \phi_{cjs} \geq 0) \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{cs} = \overline{\theta}_{cs} \text{ y } \epsilon_j \phi_{cjs} \leq 0) \\ 0, & \text{si } (\hat{\theta}_{cs} = \underline{\theta}_{cs} \text{ y } \epsilon_j \phi_{cjs} < 0) \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{cs} = \overline{\theta}_{cs} \text{ y } \epsilon_j \phi_{cjs} > 0) \end{cases} \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{ks} = \begin{cases} \gamma_{ks} \epsilon_j \phi_{kjs}, & \text{si } \overline{\theta}_{ks} > \hat{\theta}_{ks} > \underline{\theta}_{ks} \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{ks} = \underline{\theta}_{ks} \text{ y } \epsilon_j \phi_{kjs} \geq 0) \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{ks} = \overline{\theta}_{ks} \text{ y } \epsilon_j \phi_{kjs} \leq 0) \\ 0, & \text{si } (\hat{\theta}_{ks} = \underline{\theta}_{ks} \text{ y } \epsilon_j \phi_{kjs} < 0) \\ & \text{ó } (\hat{\theta}_{ks} = \overline{\theta}_{ks} \text{ y } \epsilon_j \phi_{kjs} > 0) \end{cases} \quad (28)$$

donde  $\gamma_{cs}$  y  $\gamma_{ks}$ ,  $s = (2j-1), 2j$  son las ganancias de adaptación y  $\epsilon_j$  es el error de estimación de la  $j$ -ésima parametrización; este error se define como

$$\epsilon_j(t) = \chi_j(t) - \hat{\chi}_j(t) \quad (29)$$

$$\hat{\chi}_j(t) = \Psi_j^T(t)\hat{\vartheta}_j \quad (30)$$

donde  $\hat{\vartheta}_j$  es el estimado de  $\vartheta_j$  en (25). Además, defínase el error paramétrico  $\tilde{\vartheta}_j$  como

$$\tilde{\vartheta}_j(t) = \vartheta_j - \hat{\vartheta}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

El observador adaptable propuesto también utiliza un estimador de estado, el cual se puede implementar ya que el par  $(A, D)$  es observable (véase la prueba en Jiménez

y Alvarez-Icaza (2010)). El estimador de estado para el sistema (4) es el siguiente:

$$\dot{\hat{\zeta}}(t) = \hat{A}(t)\hat{\zeta}(t) + B\ddot{x}_g(t) + L\tilde{y}(t) \quad (32)$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t), \quad \hat{y}(t) = \hat{D}(t)\hat{\zeta}(t) \quad (33)$$

$\hat{\zeta}$  es el estado estimado de  $\zeta$  y  $y$  es la salida del sistema definida en (4) y (5); las matrices  $\hat{A}$  y  $\hat{D}$  representan los estimados de  $A$  y  $D$  en (6), respectivamente. Estas matrices se definen como:

$$\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{O_{n \times n}} & \widehat{I_{n \times n}} \\ -\widehat{M^{-1}K}(t) & -\widehat{M^{-1}C}(t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\hat{D}(t) = \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K}(t) & -\widehat{M^{-1}C}(t) \end{bmatrix}$$

donde  $\widehat{M^{-1}K}$  y  $\widehat{M^{-1}C}$  se forman con los estimados  $\hat{\theta}_{c1}$ ,  $\hat{\theta}_{c2}$ ,  $\dots$ ,  $\hat{\theta}_{c(2n-1)}$  y  $\hat{\theta}_{k1}$ ,  $\hat{\theta}_{k2}$ ,  $\dots$ ,  $\hat{\theta}_{k(2n-1)}$  en (27) y (28).

Es útil definir los siguientes errores paramétricos matriciales:

$$\tilde{A}(t) = A - \hat{A}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{O_{n \times n}} & \widehat{O_{n \times n}} \\ -\widehat{M^{-1}K}(t) & -\widehat{M^{-1}C}(t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\tilde{D}(t) = D - \hat{D}(t) = \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K}(t) & -\widehat{M^{-1}C}(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M^{-1}C}(t) &= M^{-1}C - \widehat{M^{-1}C}(t) \\ \widehat{M^{-1}K}(t) &= M^{-1}K - \widehat{M^{-1}K}(t) \end{aligned} \quad (37)$$

También defínase el error de estimación de estado  $\tilde{\zeta}$  como

$$\tilde{\zeta}(t) = \zeta(t) - \hat{\zeta}(t) \quad (38)$$

#### 4.1 Convergencia del observador adaptable

A continuación se presentan teoremas relacionados con la estabilidad y convergencia del observador adaptable propuesto.

**Teorema 4.1.** Para  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $v = 2j - 1$  y  $w = 2j$ , el algoritmo gradiente con proyección en (27) y (28) garantiza que (Ioannou y Fidan, 2006):

- (i)  $\tilde{\vartheta}_j$  y  $\hat{\vartheta}_j$  son acotados, es decir, pertenecen a  $\mathcal{L}_\infty$ .
- (ii)  $\epsilon_j$  es acotado.
- (iii)  $\tilde{\vartheta}_j \in S_j \forall t \geq 0$  si  $\tilde{\vartheta}_j(0) \in S_j$  y  $\vartheta_j \in S_j$  donde
 
$$S_j = (S_{cv} \cap S_{cw}) \times (S_{cw} \cap S_{cw}) \times (S_{kv} \cap S_{kw}) \times (S_{kw} \cap S_{kw}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$S_n = (S_{c(2n-1)} \cap S_{c(2n-1)}) \times (S_{k(2n-1)} \cap S_{k(2n-1)}) \quad (39)$$

El operador  $\times$  denota el producto cartesiano y  $\cap$  la intersección de conjuntos.

- (iv) Si el vector  $\Phi_j$  cumple la siguiente condición de excitación persistente (EP)

$$\int_t^{t+T} \Phi_j^T(\tau)\Phi_j(\tau)d\tau \geq \alpha_0 I_{4 \times 4}, \quad \forall t \geq 0 \quad (40)$$

donde  $\alpha_0, T > 0$  son constantes, entonces el estimado  $\hat{\vartheta}_j$  converge exponencialmente a  $\vartheta_j$  siempre y cuando  $\hat{\vartheta}_j(0), \vartheta_j \in S_j$ .

**Corolario 4.2.** Las matrices  $\hat{A}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\hat{D}$  y  $\tilde{D}$  tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $\|\hat{A}\|, \|\tilde{A}\|, \|\hat{D}\|, \|\tilde{D}\| \in \mathcal{L}_\infty$ , donde  $\|\cdot\|$  puede ser cualquier norma inducida o la norma de Frobenius.

- (ii)  $\hat{A} \rightarrow A$  y  $\hat{D} \rightarrow D$  exponencialmente si los vectores  $\Phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  son de excitación persistente y  $\hat{\vartheta}_j(0), \vartheta_j \in S$ .

La prueba se presenta en el Apéndice A.

**Proposición 4.3.** La dinámica  $\dot{\tilde{\zeta}}$  del error de estimación de estado está dada por

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = (\hat{A}(t) - L\hat{D}(t))\tilde{\zeta}(t) + \Upsilon(t) \quad (41)$$

donde  $\Upsilon$  es acotada y se define como

$$\Upsilon(t) = (\tilde{A}(t) - L\tilde{D}(t))\zeta(t)$$

La prueba se presenta en el apéndice B.

**Proposición 4.4.** Si la ganancia  $L$  del observador satisface

$$L = [O_{n \times n} \quad -\gamma I_{n \times n}]^T, \quad \gamma > 0 \quad (42)$$

y cada  $\Psi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  cumple la condición de EP en (40), entonces  $\tilde{\zeta} \rightarrow O_{n \times 1}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prueba** Sustituyendo  $L = [O_{n \times n} \quad -\gamma I_{n \times n}]^T$  en (41) produce

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \hat{A}_*(t)\tilde{\zeta}(t) + \Upsilon(t) \quad (43)$$

donde

$$\hat{A}_*(t) = \begin{bmatrix} \widehat{O_{n \times n}} & \widehat{I_{n \times n}} \\ -(1+\gamma)\widehat{M^{-1}K}(t) & -(1+\gamma)\widehat{M^{-1}C}(t) \end{bmatrix} \quad (44)$$

Sea la parte homogénea de (43), es decir,

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \hat{A}_*(t)\tilde{\zeta}(t) \quad (45)$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = [A_* - \tilde{A}_*(t)]\tilde{\zeta}(t) \quad (46)$$

donde

$$A_*(t) = \begin{bmatrix} \widehat{O_{n \times n}} & \widehat{I_{n \times n}} \\ -(1+\gamma)\widehat{M^{-1}K} & -(1+\gamma)\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} \quad (47)$$

y  $\tilde{A}_*(t) = A_* - \hat{A}_*(t)$ .

La matriz  $A_*$  es Hurwitz puesto que las matrices  $\frac{1}{(1+\gamma)}M$ ,  $K$  y  $C$  son definidas positivas (Shieh et al., 1987). Supóngase que cada vector  $\Psi_j$  cumple la condición de EP dada en (40) y entonces  $\tilde{A}_* \rightarrow O_{2n \times 2n}$ . Como  $A_*$  es Hurwitz,  $\|\tilde{A}_*\| \rightarrow 0$  y  $\Upsilon$  es acotada, entonces la norma  $\|\tilde{\zeta}\|$  del sistema no homogéneo (43) es acotada (Narendra y Annaswamy, 1989). Finalmente, como  $\Upsilon \rightarrow O_{n \times 1}$  y  $\tilde{A}_* \rightarrow O_{2n \times 2n}$  exponencialmente, entonces la dinámica del error de estimación de estado se reduce a

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = A_*\tilde{\zeta}(t) \quad (48)$$

lo cual implica que el error  $\tilde{\zeta} = \zeta - \hat{\zeta}$  tiende a cero conforme  $t$  aumenta.  $\square$

**Comentario** Comparando la matriz  $A$  en (6) con la matriz  $A_*$  en (47) se deduce que el incremento del parámetro  $\gamma$  en  $L$  es equivalente a disminuir la masa  $M$  o de aumentar el amortiguamiento  $C$  y rigidez  $K$  del sistema original.

**Proposición 4.5.** Sean  $\omega_1, \dots, \omega_n$  las frecuencias naturales del sistema

$$\dot{\zeta} = A\zeta \quad (49)$$

con  $A$  dada en (6), entonces las frecuencias naturales  $\omega_{1*}, \dots, \omega_{n*}$  del sistema  $\dot{\zeta} = A_* \zeta$  en (48) están dadas por

$$\omega_{i*} = \omega_i \sqrt{1 + \gamma}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

**Prueba** Las frecuencias naturales  $\omega_1, \dots, \omega_n$  del sistema (49) satisfacen

$$\det[\omega_i^2 I_{n \times n} - M^{-1}K] = 0 \quad (51)$$

Multiplicando (51) por  $\det[(1 + \gamma)I_{n \times n}]$  resulta

$$\det[(1 + \gamma)I_{n \times n}] \det[\omega_i^2 I_{n \times n} - M^{-1}K] = 0 \quad (52)$$

La ecuación (52) es equivalente a

$$\det[(1 + \gamma)\omega_i^2 I_{n \times n} - (1 + \gamma)M^{-1}K] = 0 \quad (53)$$

Definiendo  $\omega_{i*}^2 = (1 + \gamma)\omega_i^2$  en (53) se sigue que las frecuencias naturales  $\omega_{1*}, \dots, \omega_{n*}$  del sistema (48) son las que se muestran en (50).  $\square$

**Comentario** El incremento de  $\gamma$  provoca que las frecuencias naturales  $\omega_{1*}, \dots, \omega_{n*}$  del sistema (48) sean cada vez mayores que las frecuencias naturales  $\omega_1, \dots, \omega_n$  del sistema (49). Por lo tanto, el aumento del parámetro  $\gamma$  resulta en una respuesta más rápida en el observador de estado. Sin embargo, el valor de  $\gamma$  no debe ser muy grande, pues entre mayor sea  $\gamma$  mayor es el efecto adverso del ruido de medición sobre el estimador de estado.

**Comentario** La estimación de los parámetros también se puede llevar a cabo usando la versión discreta del gradiente con proyección, pues éste satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) del Teorema 4.1 (Ioannou y Fidan, 2006). Con este algoritmo discreto se asegura la convergencia paramétrica si los vectores  $\Phi_j$   $j = 1, \dots, n$  satisfacen una versión discreta de la condición de EP (40).

**Comentario** Como es sabido el algoritmo gradiente es más sensible al ruido de medición que el algoritmo de Mínimos Cuadrados (MC). Por lo tanto, si el ruido en las mediciones de aceleración es significativo, se podría emplear el método de MC con proyección en su versión continua o discreta en lugar del algoritmo gradiente.

## 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

A continuación se presenta una simulación numérica para examinar el desempeño del algoritmo propuesto. Se utilizan las siguientes matrices de un edificio de tres pisos

$$M = \text{diag}(100, 50, 200) \quad (\text{kg})$$

$$C = \begin{bmatrix} 580 & -290 & 0 \\ -290 & 580 & -290 \\ 0 & -290 & 290 \end{bmatrix} \quad (\text{N}\cdot\text{s}/\text{m})$$

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 1.28 & -0.64 & 0 \\ -0.64 & 1.28 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (\text{N}/\text{m})$$

Los vectores  $\Theta_c$  y  $\Theta_k$  obtenidos con estas matrices son:

$$\Theta_c = [2.9, 2.9, 5.8, 5.8, 1.45]^T, \quad (54)$$

$$\Theta_k = 10^3 [6.4, 6.4, 12.8, 12.8, 3.2]^T$$

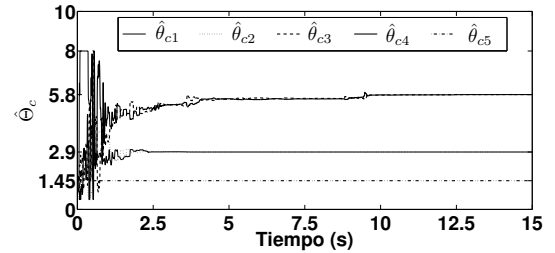
La matriz  $L$  que emplea el estimador del estado es:

$$L = [O_{3 \times 3} \quad -10I_{3 \times 3}]^T$$

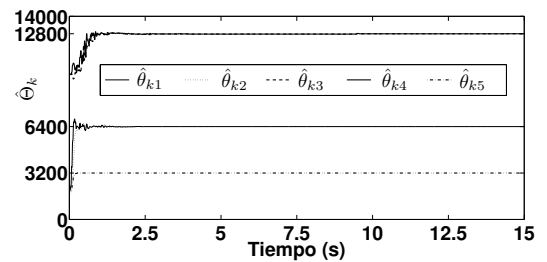
El método numérico de integración trapezoidal permite evaluar las integrales de la señal  $\chi$  y de los regresores  $\Phi_c$  y  $\Phi_k$  mostrados en (19), (20) y (21), respectivamente. Las integrales de estas variables se evalúan sobre una ventana

de longitud  $\delta = \hbar T_s = 0.02\text{s}$ , donde  $\hbar = 10$  y  $T_s = 0.002$ . Las cotas inferiores y superiores que se consideraron para los parámetros estimados por el algoritmo gradiente con proyección son  $\theta_{ci} = 0.5$ ,  $\theta_{ci} = 8$ ,  $\theta_{ki} = 2000$ ,  $\theta_{ki} = 20 \times 10^3$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Además, las ganancias de adaptación de dicho algoritmo son  $\gamma_{ci} = 0.05$  y  $\gamma_{ki} = 1000$   $i = 1, 2, \dots, 5$ . Estas ganancias se seleccionaron acorde a la magnitud de los parámetros a estimar. Por ejemplo, las relaciones rigidez/masa a estimar tienen un valor muy elevado, y por lo tanto, las ganancias  $\gamma_{ki}$   $i = 1, 2, 3, 4, 5$  se seleccionaron con un valor relativamente grande.

Como fuente de excitación sísmica se usó el registro de la componente N-S del sismo El Centro (California, 1940). La amplitud de la excitación se modificó para adecuar los datos a la escala de la estructura. Las Figuras 1 (a) y 1 (b) muestran la evolución en el tiempo de los vectores estimados  $\hat{\Theta}_c$  y  $\hat{\Theta}_k$ , respectivamente. Los valores iniciales son  $\hat{\Theta}_c(0) = [1, 1, 1, 1, 1]^T$  y  $\hat{\Theta}_k(0) = 10^3 [2, 2, 10, 10, 2]^T$ . En las Figuras 1 (a) y 1 (b) se observa que los parámetros estimados  $\hat{\Theta}_c$  y  $\hat{\Theta}_k$  convergen a los parámetros verdaderos en aproximadamente 3s. Por otro lado, las Figuras 2 y 3 muestran, respectivamente, la evolución del desplazamiento  $\hat{x}_1$  y de la velocidad  $\hat{\dot{x}}_1$ . Además, la Figura 4 presenta el error de estimación  $\tilde{x}_1$ . Con base en estas figuras se concluye que  $\hat{x}_1$  y  $\hat{\dot{x}}_1$  tienen un transitorio muy rápido y suave y convergen rápidamente a los desplazamientos y velocidades reales.



(a) Vector  $\hat{\Theta}_c$  estimado.



(b) Vector  $\hat{\Theta}_k$  estimado.

Fig. 1. Parámetros estimados de la estructura.

## 6. CONCLUSIONES

Se propuso un observador adaptable que identifica los parámetros y el estado del modelo de un edificio utilizando mediciones de aceleración de los pisos y del terreno. El observador combina el método gradiente con proyección y un estimador de estado de tipo Luenberger. Además, el observador emplea una parametrización formada mediante integrales que permite usar sólo mediciones de aceleración.

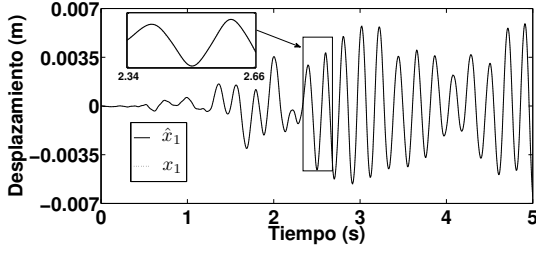


Fig. 2. Desplazamiento  $x_1$  y su estimado  $\hat{x}_1$ .

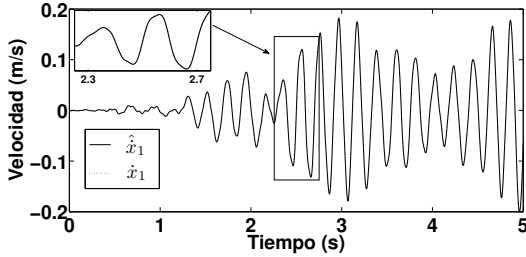


Fig. 3. Velocidad del primer piso  $\dot{x}_1$  y su estimado  $\hat{\dot{x}}_1$ .

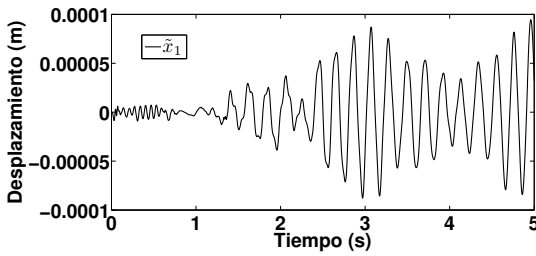


Fig. 4. Error de estimación de estado  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$ .

Simulaciones numéricas mostraron que tanto los estados como los parámetros convergen rápidamente a su valor real, además el transitorio de los estados estimados es suave. El desempeño observado mediante las simulaciones motiva la realización de futuras pruebas experimentales.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Conacyt y a UNAM-DGAPA-PAPIIT-IN109414 por el apoyo otorgado para el desarrollo de esta investigación.

#### REFERENCIAS

Angeles-Cervantes, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013). Observador adaptable aplicado a un modelo de un edificio a escala. En *Congreso Nacional de Control Automático*.  
 Chopra, A. (2001). *Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall.  
 Garnier, H., Mensler, M., y Richard, A. (2003). Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13), 1337–1357.  
 Garrido, R. y Concha, A. (2012). Estimation of the Parameters of Structures Using Acceleration Measurements. En *The 16th IFAC Symposium on System Identification*.

Ioannou, P. y Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).  
 Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2008). Estimación adaptable de estados en un edificio de marco plano equipado con un amortiguador magneto-reológico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 5(1), 135–143.  
 Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2010). An adaptive observer for a shear building with an energy-dissipation device. *Control Engineering Practice*, 18(4), 331–338.  
 Luders, G. y Narendra, K. (1973). An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5), 496–499.  
 Narendra, K.S. y Annaswamy, A.M. (1989). *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall.  
 Shieh, L.S., Mehio, M.M., y Dib, H.M. (1987). Stability of the second-order matrix polynomial. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(3), 231–233.  
 Yang, J., Lin, S., Huang, H., y Zhou, L. (2006). An adaptive extended Kalman filter for structural damage identification. *Structural Control and Health Monitoring*, 13(4), 849–867.  
 Zhang, Q. (2005). Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. En *44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 3067–3072.

#### Apéndice A. PRUEBA DEL COROLARIO 4.2

Los estimados  $\hat{\theta}_{ci}$  y  $\hat{\theta}_{ki}$   $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$  del algoritmo gradiente con proyección paramétrica están acotados puesto que sólo toman valores dentro de un cierto rango. Por lo tanto, las matrices  $\widetilde{M}^{-1}K$  y  $\widetilde{M}^{-1}C$  formadas con dichos estimados están acotadas; esto implica que  $\hat{A}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{\tilde{A}}$  y  $\hat{\tilde{D}}$  están acotadas, y por lo tanto  $\|\hat{A}\|$ ,  $\|\hat{\tilde{A}}\|$ ,  $\|\hat{D}\|$  y  $\|\hat{\tilde{D}}\|$  pertenecen a  $\mathcal{L}_\infty$ . Por otro lado, si cada  $\Psi_j$  cumple la condición de EP dada en (40) y  $\hat{\vartheta}_j(0), \vartheta_j \in S_j$   $j = 1, 2, \dots, n$ , entonces el estimado  $\hat{\vartheta}_j$  converge a  $\vartheta_j$  exponencialmente. Esto implica que  $\widetilde{M}^{-1}K \rightarrow M^{-1}K$  y  $\widetilde{M}^{-1}C \rightarrow M^{-1}C$  y finalmente se concluye que  $\hat{A} \rightarrow A$  y que  $\hat{D} = D$  exponencialmente.  $\square$

#### Apéndice B. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 4.3

Se tiene la siguiente dinámica de  $\tilde{\zeta}$

$$\dot{\tilde{\zeta}} = \dot{\zeta} - \dot{\hat{\zeta}} = A\zeta - \hat{A}\hat{\zeta} - L\tilde{y} \quad (\text{B.1})$$

donde se usaron (4) y (32). El error de  $\tilde{y}$  está dado por:

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = D\zeta - \hat{D}\hat{\zeta} \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo (B.2) en (B.1) resulta

$$\dot{\tilde{\zeta}} = (A - LD)\zeta - (\hat{A} - L\hat{D})\hat{\zeta} \quad (\text{B.3})$$

Nótese que la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}} &= (A - LD)\zeta - (\hat{A} - L\hat{D})(\zeta - \tilde{\zeta}) \\ &= (\hat{A} - L\hat{D})\tilde{\zeta} + (\tilde{A} - L\tilde{D})\zeta = (\hat{A} - L\hat{D})\tilde{\zeta} + \Upsilon \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde  $\Upsilon$  está dada por  $\Upsilon = (\tilde{A} - L\tilde{D})\zeta$  y  $\|\Upsilon\|$  es acotada pues  $\|\tilde{A}\|$ ,  $\|\tilde{D}\|$ ,  $\|L\|$  y  $\|\zeta\|$  son acotados.  $\square$