

Esquema de control y observación para el problema de consenso líder-seguidor

Omar J. Amaya-Molina, Rubén Hernández-Alemán,
Oscar S. Salas-Peña, Jesús De León-Morales

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León
Cd. Universitaria, 66450 San Nicolás de los Garza N.L., México.
e-mail: xhomay.am@gmail.com, rhernandez@gmail.com
salvador.sp@gmail.com, drjleon@gmail.com.

Resumen: El presente trabajo trata el problema de consenso líder-seguidor con retardo de tiempo, utilizando un algoritmo de control distribuido proporcional más inyección de amortiguamiento, en el espacio dinámico cartesiano. Con el fin de emplear el control previamente mencionado y tomando en cuenta que sólo es posible conocer la posición articular de cada robot, se hace uso de un observador no lineal basado en el algoritmo super twisting para estimar la velocidad de cada robot que compone la red. Para evitar singularidades se utiliza una representación mediante cuaterniones unitarios, que son utilizados para describir la orientación del robot. La red de robots se representa mediante un grafo no dirigido y conexo. Resultados de simulación muestran la efectividad del esquema de control y observación.

Palabras clave: Consenso, Observador, Super Twisting, robots heterogéneos .

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente en la robótica, se produce un gran desarrollo en tareas que involucran robots móviles o manipuladores en acciones cooperativas, dadas las ventajas ante problemas difíciles de resolver para un sólo robot especializado, como el transporte de objetos, exploración, manejo de material peligroso, rescate, entre otros, Tsay et al. (2003).

El presente trabajo considera el algoritmo de *consenso líder-seguidor*, ampliamente estudiado por la teoría de control, abordando los casos de sistemas multi-agentes idénticos de primer y segundo orden, lineales e invariantes en el tiempo refiérase por ejemplo (Olfati-Saber and Murray (2004)), (Rodrigues De Campos et al. (2012)). Así pues el problema de consenso, involucra algoritmos tales que los agentes alcancen un acuerdo en sus estados, o en un objetivo en común, nuestro interés particular se centra en sistemas multi-agentes cinemáticamente distintos (heterogéneos), cuyas representaciones dinámicas difieren, debido al número de grados de libertad, o a los modelos o generaciones de robots.

Este trabajo esta organizado como sigue. En la sección 2 se presenta el modelo dinámico en el espacio operacional asociado a cada robot, así como su interconexión mediante la teoría de grafos, y el cuaternión unitario que describe la orientación de los agentes. En la sección 3 se define el problema de consenso líder-seguidor, se presenta un control proporcional más inyección de amortiguamiento distribuido, el cual permite el seguimiento asintótico en tiempo finito de la posición constante dada

por el líder, ante retardo de tiempo constante en el canal de comunicación que enlaza a los agentes. En la sección 4 se describe el observador por modos deslizantes Super Twisting, utilizado para estimar la velocidad articular de cada robot. En la sección 5 se presentan los resultados de simulación para evaluar el desempeño del esquema de control y observación propuesto. Finalmente en la sección 6 se muestran las conclusiones del trabajo.

A lo largo del documento se usará la siguiente notación: $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$, $|\mathbf{x}|$ representa la norma Euclidiana del vector \mathbf{x} . \mathbf{I}_k y \mathbf{O}_k representan las matrices identidad y de ceros de dimensión $k \times k$, respectivamente. $\mathbf{1}_k$ y $\mathbf{0}_k$ representan los vectores de dimensión k cuyos elementos son iguales a uno y a cero, respectivamente. La norma espectral de la matriz cuadrada \mathbf{A} es denotada por $\sigma(\mathbf{A})$ donde el máximo y el mínimo de su espectro es denotado por $\sigma_{max}(\mathbf{A})$ y $\sigma_{min}(\mathbf{A})$, respectivamente. Para cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ es su matriz pseudo-inversa (Moore-Penrose) denotada por \mathbf{A}^\dagger . Para cualquier función $\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la norma \mathcal{L}_∞ y \mathcal{L}_2 se definen como: $\|\mathbf{f}\|_\infty := \sup_{t \geq 0} |\mathbf{f}(t)|$, $\|\mathbf{f}\|_2 := (\int_0^\infty |\mathbf{f}(t)|^2 dt)^{1/2}$, respectivamente, \mathcal{L}_∞ y \mathcal{L}_2 son espacios definidos como los conjuntos $\{\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n : \|\mathbf{f}\|_\infty < \infty\}$ y $\{\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n : \|\mathbf{f}\|_2 < \infty\}$ respectivamente. Se omite el argumento de todas las señales dependientes del tiempo, i.e., $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$, excepto para las que presentan retardo de tiempo, i.e., $\mathbf{x}(t - T(t))$. El subíndice $i \in N := \{1, \dots, N\}$, donde N es el número de nodos de la red.

2. MODELO DEL SISTEMA EN ESPACIO OPERACIONAL SE(3)

Ubicar el extremo final de un robot en el espacio tridimensional generalmente requiere de seis coordenadas, tres para la posición y tres para la orientación. Por lo que el espacio operacional resulta útil cuando se realizan tareas cooperativas entre robots. La descripción dinámica completa del sistema contiene los siguientes elementos básicos (Aldana et al. (2013)):

- i) La dinámica de los nodos.
- ii) La interconexión de los nodos

Se asume, que cada nodo seguidor contiene un robot manipulador de articulaciones rotacionales completamente actuadas y, la interconexión de la red puede ser representada utilizando la teoría de grafos, Fig.1.

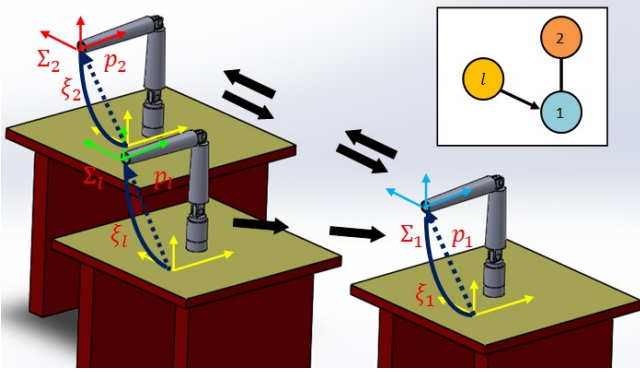


Fig. 1. Red de robots y grafo de interconexión.

2.1 Dinámica de los nodos

Cada i -ésimo nodo contiene un robot de n_i -GDL con $i \in \bar{N}$. Sus ecuaciones de movimiento en el espacio articular en ausencia de fricción y otras perturbaciones, están dadas por método de *Euler-Lagrange* (EL):

$$\bar{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \bar{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i \quad (1)$$

donde $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, son las posiciones, velocidades y aceleraciones, respectivamente, $\bar{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es la matriz de inercias, $\bar{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, es la matriz centrífuga o de Coriolis, $\bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i}$ es el vector gravitacional y $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ son los pares ejercidos por los actuadores (motores). Cabe destacar que los robots pueden tener diferente número de GDL, es decir, $n_i \neq n_j$, para $j \neq i$, y $j \in \bar{N}$. La posición del i -ésimo efector final, relativo a un marco de referencia común, es denotado por el vector $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^7$ compuesto por la posición $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, y la orientación mediante el cuaternión unitario $\boldsymbol{\xi} \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$, tal que $\mathbf{x}_i := [\mathbf{p}_i^T, \boldsymbol{\xi}_i^T]^T$, Fig. 1.

Modelo dinámico cartesiano. La relación entre las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}_i$, las lineales $\dot{\mathbf{p}}_i$ y angulares $\boldsymbol{\omega}_i$ del i -ésimo efector final, expresado también a un marco de referencia común, esta dada por

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \quad (2)$$

donde $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^6$ y $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{6 \times n_i}$ es el *Jacobiano geométrico*. Usando el principio del trabajo virtual, se obtiene la siguiente relación entre los pares articulares $\boldsymbol{\tau}_i$ y las fuerzas cartesianas \mathbf{f}_i

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i)\mathbf{f}_i \quad (3)$$

donde $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^6$, $\mathbf{f}_i := [\mathbf{h}_i^T, \mathbf{m}_i^T]^T$ y $\mathbf{h}_i, \mathbf{m}_i \in \mathbb{R}^3$ representan las fuerzas y momentos cartesianos, respectivamente. Premultiplicando (2) por la pseudo inversa del Jacobiano $\mathbf{J}_i^\dagger(\mathbf{q}_i)$ y diferenciando, se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_i^\dagger(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\mathbf{J}}_i^\dagger(\mathbf{q}_i)\mathbf{v}_i \quad (4)$$

Las expresiones (2), (3) y (4), permiten transformar (1) en su correspondiente modelo en espacio operacional, dado por

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{v}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{f}_i \quad (5)$$

donde

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) := (\mathbf{J}_i^\dagger)^T \bar{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_i^\dagger$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) := (\mathbf{J}_i^\dagger)^T \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i)$$

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) := (\mathbf{J}_i^\dagger)^T (\bar{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{J}}_i^\dagger + \bar{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{J}_i^\dagger)$$

El modelo en espacio operacional (5) tiene las siguientes propiedades (M.W. Spong (2005)):

- **P1.** $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$ es simétrica y existe $\lambda_{m_i}, \lambda_{M_i} > 0$ tal que $0 < \lambda_{m_i} \mathbf{I}_6 \leq \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \leq \lambda_{M_i} \mathbf{I}_6$.
- **P2.** La matriz $\dot{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ es antisimétrica.
- **P3.** Para todo $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{v}_i$, existe $\eta_i \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{v}_i| \leq \eta_i |\mathbf{v}_i|^2$.
- **P4.** Si $\mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\frac{d}{dt} \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ es un operador acotado.

Utilizando la función de energía total (hamiltoniano) $\mathcal{E}(\mathbf{v}_i, \mathbf{q}_i) = \mathcal{K}_i(\mathbf{v}_i) + \mathcal{U}_i(\mathbf{q}_i)$, donde \mathcal{K}_i es la energía cinética dada por

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{v}_i, \quad (6)$$

y \mathcal{U}_i es la energía potencial gravitacional tal que $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) := \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial \mathbf{q}_i}$, se puede demostrar que (5) representa un mapeo pasivo de la fuerza \mathbf{f}_i a velocidad \mathbf{v}_i .

Orientación en SE(3). Un cuaternión unitario $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbf{S}^3$ se compone de dos elementos: uno escalar y uno vectorial, $\eta_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^3$, respectivamente. Entonces $\boldsymbol{\xi}_i := [\eta_i, \boldsymbol{\beta}_i^T]^T$ tiene norma unitaria,

$$\eta_i^2 + \boldsymbol{\beta}_i^T \boldsymbol{\beta}_i = 1. \quad (7)$$

Para cada robot manipulador, el cuaternión unitario $\boldsymbol{\xi}_i$ puede ser extraído mediante la función cinemática directa, por medio de la matriz de rotación $\mathbf{R}_i \in SO(3) := \{\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}_i) = 1\}$ (M.W. Spong (2005)).

El error de orientación, relativo al marco de referencia global, entre dos diferentes marcos, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ y $\boldsymbol{\Sigma}_j$, puede ser descrito por la matriz de rotación $\mathbf{R}_{ij} := \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j^T \in SO(3)$. El cuaternión unitario que describe tal error de orientación esta dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{ij} = \xi_i \odot \xi_j^* &= \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{ij} \\ \tilde{\beta}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i^T \xi_j \\ \eta_j \beta_i - \eta_i \beta_j - \mathbf{S}(\beta_i) \beta_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_i \eta_j + \beta_i^T \beta_j \\ -\mathbf{U}(\xi_i) \eta_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

donde \odot denota el producto de cuaterniones, $\xi_{(\cdot)}^* = [\eta_{(\cdot)}, -\beta_{(\cdot)}^T]^T$ es el cuaternión conjugado, $\mathbf{S}(\cdot)$ es el operador matriz antisimétrica, tal que para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}(\xi_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ esta definida como

$$\mathbf{U}(\xi_i) := \begin{bmatrix} -\beta_i^T \\ \eta_i \mathbf{I}_3 - \mathbf{S}(\beta_i) \end{bmatrix} \quad (9)$$

La relación entre la derivada temporal del cuaternión unitario y la velocidad angular, relativa al marco de referencia, esta dado por

$$\dot{\xi}_i = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_i \\ \dot{\beta}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{U}(\xi) \omega_i \quad (10)$$

Por tanto, definiendo $\Phi(\xi_i) := \text{diag}(\mathbf{I}_3, \frac{1}{2} \mathbf{U}^T(\xi_i))$, se cumple que

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \Phi^T(\xi_i) \mathbf{v}_i \quad (11)$$

Utilizando la condición de normalidad (7), algunos cálculos directos muestran que $\dot{\beta}_{ij} = 0$ si y sólo si $\xi_i = \pm \xi_j$. Esto, a su vez, implica que $\mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_j = \mathbf{0}_3$ (Yuan (1988)). Una observación clave es que $\xi_i = \xi_j$ y $\xi_i = -\xi_j$ representa la misma orientación física. Las siguientes propiedades han sido tomadas de (Fjellstad (1994)), y serán utilizadas a través del resto del documento.

- **P5.** Para todo $\xi_i \in \mathbf{S}^3$, $\mathbf{U}^T(\xi_i) \mathbf{U}(\xi_i) = \mathbf{I}_3$. Por tanto, $\text{rango}(\mathbf{U}(\xi_i)) = 3$ y $\ker(\mathbf{U}^T(\xi_i)) = \text{span}(\xi_i)$.
- **P6.** Para todo $\xi_i \in \mathbf{S}^3$ y $\dot{\xi}_i \in \mathbb{R}^4$, $\dot{\mathbf{U}}(\xi_i) = \mathbf{U}(\dot{\xi}_i)$.
- **P7.** Ya que, para todo $\xi_i \in \mathbf{S}^3$, $|\xi_i| = 1$ entonces $\mathbf{U}(\xi_i)$ es un operador acotado.

2.2 Modelo de interconexión

La interconexión de los N agentes es modelada utilizando la matriz Laplaciana $\mathbf{L} := [\ell_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, cuyos elementos están definidos como

$$\ell_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

donde \mathcal{N}_i es el conjunto de agentes transmitiendo información al i -ésimo robot, $a_{ij} > 0$ si $j \in \mathcal{N}_i$ y $a_{ij} = 0$ de otra manera.

Similar a la sincronización basada en pasividad (energía de conformación (Sarlette et al. (2009))) y con el fin de asegurar que las fuerzas de interconexión son generadas por el gradiente de la función potencial, a lo largo del documento se asume lo siguiente Aldana et al. (2013):

- **A1.** El grafo de interconexión es no dirigido y conexo.

Con respecto a los retardos de tiempo de interconexión se asume que

- **A2.** El intercambio de información, del j -ésimo robot al i -ésimo robot, esta sujeto a retardos de tiempo variable $T_{ij}(t)$, con una cota superior conocida $*T_{ji}$. Por tanto, se cumple que $0 \leq T_{ji}(t) \leq *T_{ji} < \infty$. Adicionalmente, las derivadas temporales $\dot{T}_{ji}(t)$ están acotadas.

Si **A1** y **A2** se cumple, entonces el grafo de interconexión exhibe las siguientes propiedades (Olfati-Saber and Murray (2004)): **a)** \mathbf{L} es simétrica y por tanto $\mathbf{L}^T \mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$, **b)** El espectro de \mathbf{L} satisface $\sigma(\mathbf{L}) \geq 0$, y $\sigma_m(\mathbf{L}) = 0$ tiene multiplicidad uno. Además, $\text{rango}(\mathbf{L}) = N - 1$, y **c)** Para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (z_i - z_j)^2 \geq 0$.

La matriz Laplaciana modela la interconexión de los seguidores, y la matriz diagonal $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es utilizada para modelar las interconexiones líder-seguidor. Para estas interconexiones se asume:

- **A3.** Al menos uno de los N robots seguidores tiene acceso directo a la posición constante del líder \mathbf{x}_ℓ , es decir, en el grafo de $N + 1$ nodos, existe al menos un arco directo (dirigido) del líder a cualquiera de los N seguidores.

A1 y **A3** aseguran que la posición del líder es *globalmente alcanzable* desde cualquiera de los N nodos seguidores, es decir, existe una trayectoria desde el líder a cualquiera de los i -ésimos robots seguidores. El siguiente lema proporciona una interesante propiedad de la matriz Laplaciana compuesta $\mathbf{L}_\ell := \mathbf{L} + \mathbf{B}$ que será utilizada en la sección posterior y ha sido tomado del capítulo 1, Lema 1.6 de (Cao and Ren, 2011).

Lemma 1. (Cao and Ren (2011)) Considere una matriz diagonal no negativa $\mathbf{B} := \text{diag}(b_{i\ell}, \dots, b_{N\ell}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y suponga que, al menos, un $b_{i\ell}$ es estrictamente positivo, es decir, existe algún $b_{i\ell} > 0$. Asumiendo que **A1** se cumple, entonces la matriz $\mathbf{L}_\ell = \mathbf{L} + \mathbf{B}$ es simétrica, definida positiva y de rango completo.

Nota 1. El Lema 1 provee una herramienta poderosa para el diseño del controlador, ya que, comparado con otros esquemas (Nuno et al. (2011); Liu and Chopra (2012)), el problema del consenso líder seguidor (definido en la siguiente sección) puede ser resuelto, sin asumir que la posición del líder esta disponible para *todos* los seguidores.

3. CONSENSO LÍDER-SEGUIDOR

3.1 Definición del problema

Asumiendo que el grafo de interconexión cumple con **A1** y **A2**, y considerando una red de N robots modelados mediante las ecuaciones de EL en el espacio operacional (5). El objetivo es, *implementar* las leyes de control distribuidas \mathbf{f}_i , de tal forma que la red de N seguidores tiene que ser regulada a una posición constante dada por el líder $\mathbf{x}_\ell := [\mathbf{p}_\ell^T, \xi_\ell^T]^T \subset \mathbb{R}^7$, siempre y cuando dicha posición esté disponible sólo en un cierto conjunto de seguidores (**A3**). Por tanto, para todo $i \in \bar{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{v}_i(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_\ell \quad (13)$$

3.2 Control proporcional más inyección de amortiguamiento (P+D)

El siguiente controlador proporcional más inyección de amortiguamiento, definido en el espacio operacional, establece una solución para el problema de consenso líder-seguidor

$$\dot{\mathbf{f}}_i = -k_i b_{i\ell} \Phi(\xi_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\ell) - k_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \Phi(\xi_i) \mathbf{e}_{ij} - d_i \mathbf{v}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \quad (14)$$

donde $k_i, d_i \in \mathbb{R}_{>0}$ son las ganancias del controlador, $b_{i\ell} > 0$ si la posición del líder \mathbf{x}_ℓ esta disponible para el i -ésimo robot manipulador, de lo contrario $b_{i\ell} = 0$. El error de interconexión \mathbf{e}_{ij} , para cualquier par de robots (i, j) , esta dado por

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j(t - T_{ji}(t)). \quad (15)$$

El sistema en lazo cerrado (5) y (14) es

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\mathbf{M}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)[\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{v}_i + d_i \mathbf{v}_i + k_i b_{i\ell} \Phi(\xi_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\ell) + k_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \Phi(\xi_i) \mathbf{e}_{ij}]. \quad (16)$$

A pesar de que $\xi_i = \xi_\ell$ y $\xi_i = -\xi_\ell$ representan la misma orientación física, el sistema en lazo cerrado (16) tiene dos posibles puntos de equilibrio. La proposición 1 formalmente define este hecho y la proposición 2 demuestra que $\xi_i = -\xi_\ell$ corresponde a un punto de equilibrio inestable.

Proposición 1. Si **A1** y **A2** se cumplen, entonces el sistema en lazo cerrado (16), tiene dos puntos de equilibrio para $i \in \bar{N}$ dados por

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i, \xi_i) = (\mathbf{0}_6, \mathbf{p}_\ell, \xi_\ell) \quad (17)$$

y

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i, \xi_i) = (\mathbf{0}_6, \mathbf{p}_\ell, -\xi_\ell) \quad (18)$$

Prueba. Los posibles equilibrios de (16), satisfacen $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}_6$ y $b_{i\ell} \mathbf{e}_{i\ell} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \mathbf{e}_{ij} = \mathbf{0}_6$, que a su vez implica que

$$b_{i\ell}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_\ell) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j(t - T_{ji}(t))) = \mathbf{0}_3, \quad (19)$$

$$-b_{i\ell} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_\ell - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_j(t - T_{ji}(t)) = \mathbf{0}_3. \quad (20)$$

Ahora, $\mathbf{p}_j(t - T_{ji}(t)) = \mathbf{p}_j - \int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\mathbf{p}}_j(\sigma) d\sigma$ y, en el equilibrio $\int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\mathbf{p}}_j(\sigma) d\sigma = \mathbf{0}_3$. Esto último, junto con $\mathbf{p} := [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_N^T]^T$, permite escribir (19) como

$$(\mathbf{B}_\ell \otimes \mathbf{I}_3)(\mathbf{p} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{p}_\ell)) + (\mathbf{L}_\ell \otimes \mathbf{I}_3)\mathbf{p} = \mathbf{0}_{3N}$$

y por lo tanto, ya que $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$, $(\mathbf{L}_\ell \otimes \mathbf{I}_3)(\mathbf{p} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{p}_\ell)) = \mathbf{0}_{3N}$, donde \mathbf{B}_ℓ y \mathbf{L}_ℓ están definidos en el Lema 1 y \otimes es el producto Kronecker estándar. Además, Lema 1 y las propiedades del producto Kronecker aseguran que el rango de $(\mathbf{L}_\ell \otimes \mathbf{I}_3) = 3N$; para todo $i \in \bar{N}$, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_\ell$ es la única solución para (19).

Similarmente, $\xi_j(t - T_{ji}(t)) = \xi_j - \int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\xi}_j(\sigma) d\sigma$ y, en el equilibrio, $\int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\xi}_j(\sigma) d\sigma = \mathbf{0}_4$. Entonces, (20) puede ser escrita como

$$-b_{i\ell} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_\ell - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_j = \mathbf{0}_3.$$

Agregando el término $b_{i\ell} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_i$, a la ecuación anterior, con el hecho de que $\mathbf{U}^T(\xi_i) \xi_i = \mathbf{0}_3$ se obtiene

$$b_{i\ell} \mathbf{U}^T(\xi_i)(\xi_i - \xi_\ell) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \mathbf{U}^T(\xi_i)(\xi_i - \xi_j) = \mathbf{0}_3. \quad (21)$$

Definiendo $\xi := [\xi_1^T, \dots, \xi_N^T]^T$ y $\bar{\mathbf{U}} := \text{diag}(\mathbf{U}(\xi_1), \dots, \mathbf{U}(\xi_N)) \in \mathbb{R}^{4N \times 3N}$, (21) puede ser escrita como

$$\bar{\mathbf{U}}^T[(\mathbf{B}_\ell \otimes \mathbf{I}_4)(\xi - (\mathbf{1}_N \otimes \xi_\ell)) + (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_4)\xi] = \mathbf{0}_{3N}$$

Utilizando $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$, esta última ecuación equivale a

$$\bar{\mathbf{U}}^T(\mathbf{L}_\ell \otimes \mathbf{I}_4)(\xi - (\mathbf{1} \otimes \xi_\ell)) = \mathbf{0}_{3N}$$

Finalmente, ya que $(\mathbf{L}_\ell \otimes \mathbf{I}_4)$ es de rango completo entonces la solución trivial $\xi = \mathbf{1}_N \otimes \xi_\ell$ satisface esta ecuación. Sin embargo, el hecho de que el rango de $(\bar{\mathbf{U}}) = 3N$ y **P5** asegure que $\xi_i = \pm \xi_\ell$, para todo $i \in \bar{N}$ (Aldana et al. (2014)).

Proposición 2. Bajo las asunciones **A1**, **A2** y **A3**, el control (14) resuelve el problema de consenso líder seguidor siempre que, para cualquier $\alpha_i, \alpha_j > 0$, el amortiguamiento d_i satisfice

$$2d_i > k_i \ell_i \alpha_i + k_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ji} \frac{*T_{ji}^2}{\alpha_j}, \quad \forall i \in \bar{N} \quad (22)$$

Además el equilibrio (18) es inestable y el equilibrio (17) asintóticamente estable excepto en $(\mathbf{0}_6, \mathbf{p}_\ell, -\xi_\ell)$. Para la prueba de la Proposición 2 el lector deberá referirse a Aldana et al. (2014).

4. OBSERVADOR SUPER TWISTING

En este trabajo, se hace uso de un observador basado en modos deslizantes (Super Twisting) para estimar en tiempo finito las velocidades articulares, y posteriormente utilizarla en el algoritmo de control de consenso, asumiendo que sólo se conoce la posición de cada robot que pertenece a la red. Considere un sistema no lineal en forma triangular

$$S_i : \begin{cases} \dot{\zeta}_k = \zeta_{k+1}, \text{ para } k = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\zeta}_n = \Upsilon_i(\zeta_i) + \Gamma_i(\zeta_i) \mathbf{u}_i \end{cases} \quad (23)$$

donde $\zeta_i = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{y}_i = \zeta_i \in \mathbb{R}$ es el vector de salida, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}$ es el vector de entradas, y $\Upsilon_i(\zeta_i)$ y $\Gamma_i(\zeta_i)$ son funciones escalares suaves y acotadas. Ahora asumiendo que los estados del sistema son uniformemente acotados, es decir, $\forall t > 0, |\zeta_i(t)| < \mu_i$, y $\forall t > 0$. Entonces, el siguiente sistema \mathcal{O}_i es un observador para (23).

$$\mathcal{O}_i : \begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}}_1 = \tilde{\zeta}_2 + \gamma_1 |\epsilon_1|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_1) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2 = \rho_1 \text{sign}(\epsilon_1) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2 = E_1 [\tilde{\zeta}_3 + \gamma_2 |\epsilon_2|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_2)] \\ \dot{\tilde{\zeta}}_3 = E_1 \rho_2 \text{sign}(\epsilon_2) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_3 = E_2 [\tilde{\theta} + \gamma_3 |\epsilon_3|^{1/2} \text{sign}(\epsilon_3)] \\ \dot{\tilde{\theta}} = E_2 \rho_3 \text{sign}(\epsilon_3) \end{cases} \quad (24)$$

donde $\epsilon_r = \tilde{\zeta}_r - \hat{\zeta}_r$ para $r = 1, \dots, n-1$; con $\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1$ y $[\tilde{\zeta}, \tilde{\theta}]^T = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \theta]^T$ es la salida del observador. Para $r = 1, \dots, n-1$; la función escalar E_r son definidas como

$$E_r = \begin{cases} 1 & \text{si } |\epsilon_k| = |\tilde{\zeta}_k - \hat{\zeta}_k| \leq \varepsilon, \forall k \leq r \\ 0 & \text{De lo contrario} \end{cases} \quad (25)$$

donde ε es una pequeña constante positiva, $\rho_r > 0$ y $\gamma_r > 0$ son las ganancias del observador. La convergencia del estado de error de observación se obtiene en $(n-1)$ pasos en tiempo finito (Floquet and Barbot (2007)), mediante el esquema recursivo (24) usado para reconstruir las variables no medibles como diferenciación exacta con convergencia en tiempo finito.

El observador $\tilde{\mathcal{O}}_i$ estima velocidad $\dot{\mathbf{q}}_i$ y aceleración $\ddot{\mathbf{q}}_i$ del i -ésimo agente, que pueden ser difíciles de medir debido al ruido presente en la señal, utilizando sólo medidas de la posición \mathbf{q}_i . Las señales con retardo de tiempo aparecen en el sistema de tal forma que pueden ser concentrados en un término que puede ser acotado por una constante. Por lo que ahora se puede establecer el siguiente resultado sobre la convergencia del observador.

Proposición 3. Considere el sistema (5) en lazo cerrado con el control (15). Utilizando el estimado de los estados dados por el observador por modos deslizantes (24), entonces, el sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable. Además, los agentes convergen a la trayectoria, pese al retardo de tiempo.

Prueba Tomando en cuenta que los retardos de tiempo entre los agentes de la red, la convergencia en tiempo finito puede ser probada de forma directa siguiendo el mismo procedimiento descrito en (Floquet and Barbot (2007)).

Nota 2. Debido a la propiedad de convergencia en tiempo finito del observador, esto permite diseñar el observador y la ley de control por separado. Entonces, se satisface el principio de separación.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se muestra el resultado de la eficiencia del enfoque descrito en las secciones anteriores. Nuestro interés particular es el control de movimiento de una red de robots manipuladores. Por tanto se considera un conjunto de $N = 2$ robots planares de 2 GDL, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 1.

La simulación se llevo a cabo en Matlab-Simulink, y se considera que la posición constante del líder es enviada al nodo 1 ($b_{1\ell} = 1$ y $b_{2\ell} = 0$). Los pesos de interconexión

son: $a_{12} = a_{21} = 1$. Se considero un retardo desconocido y acotado: $*T_{21} = 0.19s$ y $*T_{12} = 0.25s$, las ganancias del control y del observador para cada robot se muestran en las Tablas 2, 3, respectivamente.

En la Fig.2 se observa que a pesar de las condiciones iniciales de cada robot, ambos alcanzan la posición constante de líder en tiempo finito.

La Fig. 3 se muestra la convergencia a la orientación dada por el cuaternin unitario. En la Figura 4 se observa la convergencia asintótica del error a cero.

Tabla 1. Parámetros del robot

Parámetro	Notación	Valor	Unidad
Longitud 1	L_1	0.45	m
Longitud 2	L_2	0.4	m
Masa 1	m_1	23.9	kg
Masa 2	m_2	3.88	kg
Centro de masa 1	L_{c1}	0.091	m
Centro de masa 2	L_{c2}	0.048	m
Inercia 1	I_1	1.266	$kg.m^2$
Inercia 2	I_2	0.093	$kg.m^2$

Tabla 2. Ganancias del control

i	k_i	d_i
1	60	45
2	13.5	3.5

Tabla 3. Ganancias del observador

i	α_i	λ_i	ϵ_i
1	4	5	0.01
2	7	30	0.01
3	20	40	0

Las coordenadas (x, y, z) del efector final, están expresadas respecto al marco de referencia como

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{i1} \cos(q_{i1}) + L_{i2} \cos(q_{i1} + q_{i2}) \\ L_{i1} \sin(q_{i1}) + L_{i2} \sin(q_{i1} + q_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

La matriz de rotación que define la orientación del efector final esta dada por

$$\mathbf{R}_{z_i} = \begin{bmatrix} \cos(q_{i1} + q_{i2}) & -\sin(q_{i1} + q_{i2}) & 0 \\ \sin(q_{i1} + q_{i2}) & \cos(q_{i1} + q_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

El Jacobiano esta dado por

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \\ \omega_{i1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 S_1 - L_2 S_{12} & -L_2 S_{12} \\ L_1 C_1 + L_2 C_{12} & L_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un esquema de control y observación para una red de N robots, basado en la

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el CONACYT (Ciencia Básica) bajo la Conseción No. 105799, y el Proyecto PAICYT-UANL.

REFERENCIAS

Aldana, C.I., Nuno, E., and Basanez, L. (2014). Leader-follower pose consensus for heterogeneous robot networks with variable time-delays.

Aldana, C., Nuno, E., and Basanez, L. (2013). Control of bilateral teleoperators in the operational space without velocity measurements. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*, 5445–5450.

Cao, Y. and Ren, W. (2011). *Distributed Coordination of Multiagent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*. Springer-Verlag.

Fjellstad, O. (1994). *Control of unmanned underwater vehicles in six degrees of freedom: quaternion feedback approach*. Phd thesis, Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim.

Floquet, T. and Barbot, J.P. (2007). Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *Intern. J. Syst. Sci.*, 38(10), 803–815.

Liu, Y.C. and Chopra, N. (2012). Controlled synchronization of heterogeneous robotic manipulators in the task space. *Robotics, IEEE Transactions on*, 28(1), 268–275.

M.W. Spong, S. Hutchinson, M.V. (2005). *Robot Modeling and Control*. Wiley.

Nuno, E., Ortega, R., Basanez, L., and Hill, D. (2011). Synchronization of networks of nonidentical euler-lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(4), 935–941.

Olfati-Saber, R. and Murray, R. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(9), 1520–1533.

Rodrigues De Campos, G., Brinon arranz, L., Seuret, A., and Niculescu, S.I. (2012). On the consensus of heterogeneous multi-agent systems: a decoupling approach. In *Proceedings of NecSys'12*, 1–6. Santa-Barbara, États-Unis.

Sarlette, A., Sepulchre, R., and Leonard, N.E. (2009). Autonomous rigid body attitude synchronization. *Automatica*, 45(2), 572 – 577.

Tsay, T., Hsu, M.S., and Lin, R.X. (2003). Development of a mobile robot for visually guided handling of material. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, volume 3, 1397–3402.

Yuan, J. (1988). Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 4(4), 434–440.

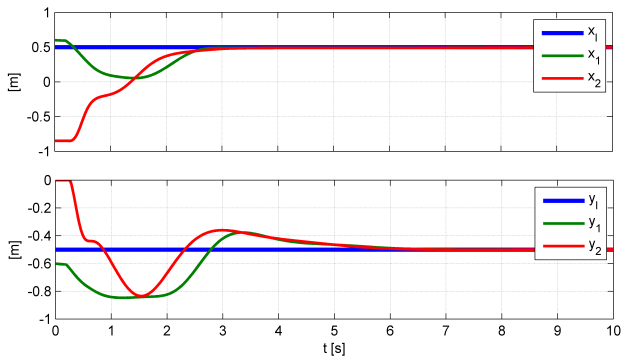


Fig. 2. Posición de los robots.

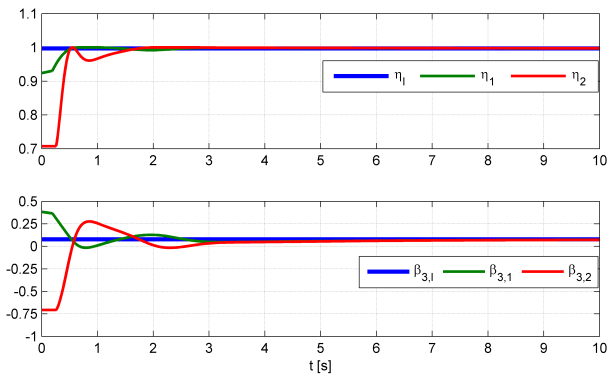


Fig. 3. Oientación de los robots.

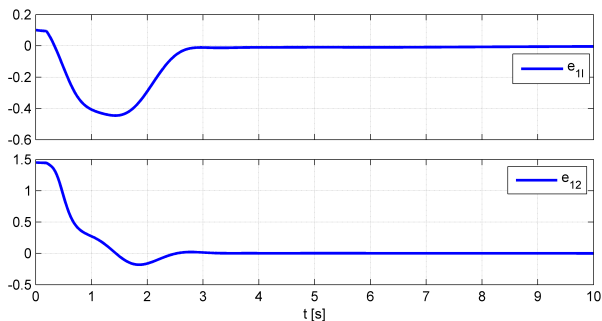


Fig. 4. Error de posición.

técnica de control distribuido proporcional más inyección de amortiguamiento, en presencia de retardo de tiempo desconocido y acotado, los resultados de simulación muestran el desempeño del esquema propuesto, el observador provee una estimación exacta de la velocidad de cada articulación, además gracias a la convergencia en tiempo finito de la ley de control y del observador se asegura un seguimiento asintótico de la posición constante del líder. Como trabajo a futuro se pretende cambiar el control proporcional más inyección de amortiguamiento, por el algoritmo de control por modos deslizantes adaptable e implementarlo en una red de robots de 4 GDL.