

Análisis de Consenso en Redes dinámicas

S. Avila–Becerril
Facultad de Ingeniería-UNAM
Coyoacan DF 04510, México
soavbec@gmail.com

G. Espinosa–Perez
Facultad de Ingeniería-UNAM
Coyoacan DF 04510, México
gerardoe@unam.mx

Resumen—En este trabajo se estudia el problema de sincronización en un circuito dinámico identificando su estructura Hamiltoniana. Se utiliza un enfoque modular, donde el sistema es visto como una red dinámica distribuida modelada por un grafo, donde los bordes tienen la dinámica correspondiente a elementos almacenadores. En particular, se hacen uso de herramientas básicas de modelado por redes para mostrar condiciones bajo las cuales se llega a una condición de consenso que depende sólo de la estructura de la red en relación con las restricciones de flujo.

Palabras clave: Sistemas Multiagentes, Consenso, Circuitos eléctricos.

I. INTRODUCCIÓN

En la literatura, una de las maneras más extensas en que se ha abordado el estudio de sistemas interconectados es considerando agentes con dinámicas simples como lo son cadenas de integradores o bien masas puntuales (Fax y Murray, 2002), (Fax y Murray, 2004), (Wei y Van der Schaft, 2013). Este estudio se ha hecho desde diferentes perspectivas y una de las técnicas que ha producido resultados bastante atractivos está relacionada con las nociones de pasividad (Arcak, 2007) donde se explotan las ventajas que la técnica brinda para estudiar sistemas interconectados.

Así, una forma clásica de abordar el modelado de sistemas dinámicos (mecánicos, hidráulicos, eléctricos, etc.) es por medio de relaciones dinámicas que se combinan con la topología del sistema por medio de grafos (Wellstead, 1979), lo que conlleva al concepto de *redes dinámicas*. Estas redes, como es esperable, exhiben restricciones que corresponden a algunas leyes de conservación de energía, por ejemplo las leyes de Kirchhoff, que muestran la relación de variables asociadas a los nodos con sus bordes correspondientes.

En el caso de sistemas dinámicos individuales, los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto ofrecen un enfoque que permite modelarlos como la interconexión de elementos ideales, pudiéndose obtener resultados de sincronización entre elementos del mismo sistema. En este contexto, en (Van der Schaft y Maschke, 2011) se propone un marco de referencia geométrico que unifica el modelado de sistemas dinámicos como sistemas Hamiltonianos en un grafo. Aquí la idea es asociar a la matriz de incidencia del grafo una estructura que relaciona las variables de flujo y esfuerzo de los bordes y que captura las leyes de conservación del sistema. Esta estructura es conocida como

estructura Dirac. De esta forma, desde un punto de vista geométrico, la estructura Hamiltoniana de una red dinámica está definida por la función Hamiltoniana, las relaciones de disipación de energía y por la estructura Dirac. En este artículo se muestra cómo la misma estructura Hamiltoniana es compartida por redes dinámicas de diferentes orígenes lo que permite establecer para ellas propiedades de consenso de una manera sistemática.

Los resultados presentados en este trabajo toman como base los presentados en (Wei y Van der Schaft, 2013), donde se presenta un modelo básico para un sistema dinámico visto como una red dinámica distribuida modelada como un grafo dirigido, donde las variables almacenadoras corresponden a los nodos y los flujos de entrada corresponden a los bordes. Se muestra que con una retroalimentación estática de la salida, que asocia cada borde del grafo con un estado de control, es posible regular las variables de los nodos llevándolos a un *balance de carga*, cumpliéndose lo anterior si y solo si el grafo está conectado. El objetivo de este artículo es entonces utilizar herramientas generales de modelado por métodos de redes (Wellstead, 1979) para modelar un sistema dinámico en un grafo, donde los bordes tienen dinámica y los nodos son puntos de interconexión, para proponer condiciones en la topología de la red que asegure que variables de estado asociadas a algunos bordes converjan al mismo valor. A diferencia de los resultados establecidos por (Wei y Van der Schaft, 2013) y que establece la contribución original, en este trabajo se centra la atención cuando no todos los bordes pueden ser manipulados, es decir, cuando se contempla un sistema *subactuado*.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección II se presenta para formular la estructura de un sistema dinámico algunos antecedentes de teoría de grafos necesarios y por último la formulación del problema. El análisis de sincronización se hace en la sección III, la cual se ha dividido en una parte donde se analiza un sistema como el reportado en (Wei y der Schaft, 2013) y en otra se estudia un sistema donde el número de disipadores está restringido. Al final de esta sección se expone un ejemplo para ilustrar el método analizado con el caso particular de un circuito eléctrico, mientras que en la Sección IV se encuentran las conclusiones.

II. SISTEMAS HAMILTONIANOS CONTROLADOS POR PUERTO

En la literatura general de modelado (Wellstead, 1979), una manera de ver las componentes de un sistema es como *manipuladores de energía* que interactúan con entradas y salidas por medio de puertos. El acoplamiento energético de estos sub-sistemas puede representarse por un par de variables cuyo producto es la potencia instantánea transmitida por el puerto, de esta forma, la entrega de energía está asociada a una variable intensiva de *flujo* energético y una variable extensiva de *esfuerzo*, de manera que un puerto puede representarse por un par de variables generalizadas: flujo f y esfuerzo e , que representan el mecanismo de transferencia de energía. El modelado se logra interconectando los sub-sistemas para formar uno completo, lo cual introduce un conjunto de restricciones que determinan la interacción de los componentes del sistema.

En esta sección se aborda el modelado de sistemas dinámicos como sistemas Hamiltonianos sobre un grafo; este enfoque modular considera que un sistema es la interconexión de elementos ideales: almacenadores de flujo y almacenadores de esfuerzo, disipadores y fuentes, donde cada elemento tiene asociado a su vez variables de flujo y de esfuerzo. Para el caso particular de circuitos eléctricos, el inductor es el elemento almacenador de esfuerzo y el capacitor es el elemento almacenador de flujo, con la corriente como la variable de flujo y el voltaje como la variable de esfuerzo. Así, un sistema Hamiltoniano se define agregando *relaciones constitutivas* y añadiendo las *restricciones* impuestas por la **interconexión**. En general (Van der Schaft y Maschke, 2011), una relación de almacenamiento de energía entre las variables de flujo f y su vector conjugado de esfuerzos e es de la forma

$$\dot{x} = -f \quad ; \quad e = \frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (1)$$

o dualmente

$$\dot{x} = e \quad ; \quad f = -\frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (2)$$

donde x es un vector de variables energéticas de la misma dimensión de f y e y $H(x)$ es una función que representa la energía almacenada en el sistema. Mientras que, una relación disipativa entre el vector de flujos y el de esfuerzos es cualquier relación estática de la forma

$$R(f, e) = 0$$

Tomando como base a estos elementos, el grafo asociado al sistema representa la interconexión de los elementos.

Teoría de Grafos.

Un grafo dirigido \mathcal{G} consiste de un conjunto finito de nodos \mathcal{V} y un conjunto finito de bordes \mathcal{E} , junto con un mapeo del conjunto \mathcal{E} al conjunto de parejas ordenadas de \mathcal{V} , tal que a cada borde $e \in \mathcal{E}$ le corresponde una pareja ordenada $(v, w) \in V \times V$. El borde (v, w) denota que el elemento w puede acceder a la información del elemento

v , pero no necesariamente viceversa. Se dice que un grafo dirigido está *conectado* si se tiene al menos un nodo con trayectorias dirigidas a todos los demás nodos. Se definen además el *Espacio Nodo* Λ_0 como el espacio vectorial de todas las funciones de \mathcal{V} a \mathbb{R} , identificado como $\Lambda_0 = \mathbb{R}^n$ y el *Espacio Borde* Λ_1 como el de todas las funciones de \mathcal{E} a \mathbb{R} , identificado como $\Lambda_1 = \mathbb{R}^m$. Mientras que los espacios duales de Λ_1 y Λ_0 se denotan como Λ^1 y Λ^0 , respectivamente. El mapeo del espacio de bordes al de nodos $\tilde{B} : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_0$ tiene como representación a la *matriz de incidencia* B , que es de $n \times m$, con $(i, j)^{th}$ elemento igual a 1 si el j^{th} borde entra al nodo i , -1 si sale del nodo i y 0 de otra forma. En este sentido también puede construirse la matriz B_0 de *loopset* completa cuyo $(i, j)^{th}$ elemento igual a 1 si el j^{th} borde está en el i^{th} lazo y ambos tienen la misma orientación, $(i, j)^{th}$ igual a -1 si el j^{th} borde está en el i^{th} lazo y tienen orientación opuesta y 0 de otra forma.

Por último, un **árbol** (Wellstead, 1979) es un subgrafo conectado con todos los nodos del grafo pero ninguna trayectoria cerrada, a sus bordes se les llaman ramas; al complemento del árbol se le llama **co-árbol** y sus bordes se llaman cuerdas. Así, pueden expresarse leyes de interconexión, o de conservación de energía, como la Ley de Corrientes y de Voltajes de Kirchhoff

$$Bf = 0 \quad (LCK)$$

$$B_0e = 0 \quad (LVK)$$

con $f, e \in \mathbb{R}^m$ un vector de flujos y de esfuerzos de borde, respectivamente. Sin embargo, es posible demostrar que sólo existen $n - 1$ restricciones de flujo en un grafo conectado con n nodos, por lo que la matriz de incidencia B de un grafo conectado tiene rango $n - 1$. De esta forma, puede obtenerse una *matriz de incidencia reducida* C_b eliminando un renglón de B , de manera que si f se ordena tal que el flujo de las ramas entra primero y el orden de los renglones de C_b corresponde con las ramas en f , entonces la *LCK* es

$$C_b f = [I \quad M] \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow f_t = -M f_c \quad (3)$$

donde f_t y f_c son los flujos en el árbol y en el co-árbol, respectivamente, I es la matriz identidad de orden $(n - 1)$ y $M \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (m-n+1)}$ es la submatriz de incidencia. De igual forma, la matriz de loopsets completa B_0 tiene información redundante, teniéndose para este caso $m - n + 1$ restricciones de esfuerzo linealmente independientes, por lo que también es posible reducirla y obtener una matriz de loopsets básica B_b , de tal forma que la *LVK* se puede reordenar como

$$B_b e = [F \quad I] \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

con $F \in \mathbb{R}^{(m-n+1) \times (n-1)}$, I la matriz identidad de orden $(m - n + 1)$ y los vectores de esfuerzo en los bordes del árbol e_t y en los bordes del co-árbol e_c . Por último, otra

propiedad que puede ser demostrada (Wellstead, 1979) es la que se refiere al hecho de que $F^T = -M$, por lo que (4) también puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} -M^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow e_c = M^T e_t \quad (5)$$

Las expresiones (3) y (5) equivalen a las restricciones impuestas por las *estructuras de Dirac* y que son analizadas en (Van der Schaft y Maschke, 2011) como relaciones que preservan potencia. Así, mientras las ecuaciones (3) y (4) definen la *topología* de la interconexión y con ello las restricciones impuestas por las leyes de conservación de energía, (1) y (2) establecen la dinámica. Con esto es posible hacer la formulación del problema como

Formulación del Problema: Considere un sistema dinámico definido sobre un grafo \mathcal{G}

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mu, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad u \in \mathbb{R}^{m-n+1} \\ y &= M^T \frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad y \in \mathbb{R}^{m-n+1} \end{aligned} \quad (6)$$

con $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y con el i -ésimo elemento x_i de x la variable de estado asociada a la i -ésima rama, mientras que u_j es el flujo asociado a la j -ésima cuerda, con relaciones entre flujos y esfuerzos dadas por (1) y (2) y con *topología* definida por (3) y (5). Asuma que:

- Cualquier sistema dinámico puede representarse por un grafo el cual puede dividirse en un árbol y un co-árbol.

Encuentre las condiciones bajo las cuales es posible alcanzar consenso en el sistema, en el sentido de que la variable de esfuerzo en las ramas llegue a un valor común diferente de cero, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x) = \alpha \mathbf{1}_{n-1}$, para alguna constante α y $\mathbf{1}_{n-1}$ un vector lleno de unos, garantizando estabilidad interna.

III. CONSENSO EN SISTEMAS DINÁMICOS

Red de elementos almacenadores

Inspirados por (Wei y Van der Schaft, 2013) considere que en el sistema sólo se tienen elementos almacenadores de flujo y de esfuerzo, a los que les corresponden relaciones como las de (1) y (2), así como restricciones de interconexión dadas por (3) y (5), tales que se cumple que $e_c = M^T e_t$ y $f_t = -M f_c$. Sustituyendo estas condiciones se tienen las dinámicas

$$\dot{x}_c = M^T e_t \Rightarrow \dot{x}_c = M^T \frac{\partial H(x)}{\partial x_t}$$

$$\dot{x}_t = M f_c \Rightarrow \dot{x}_t = -M \frac{\partial H(x)}{\partial x_c}$$

que también pueden reescribirse con una estructura matricial como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & M^T \\ -M & 0 \end{bmatrix} \nabla H \quad (7)$$

con el vector $x = \begin{bmatrix} x_c & x_t \end{bmatrix}^T$ y la función de energía total $H(x_c, x_t) = H_c(x_c) + H_t(x_t)$ la suma de energías de los elementos almacenadores en el árbol y co-árbol.

Claramente (7) es un sistema Hamiltoniano conservativo. Si además se supone que, en lugar de almacenadores de esfuerzo, *todos* los elementos del co-árbol son elementos resistivos, que corresponde a hacer $u = -Ry$ como la propuesta en (Wei y Van der Schaft, 2013), con una relación estática $f_c = -R e_c$, donde $R > 0 \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ es una matriz de disipadores y la función de energía H_t que sólo depende de los elementos en el árbol, la dinámica para el árbol puede reescribirse como

$$\dot{x}_t = M f_c;$$

con el flujo en las cuerdas dado por $f_c = -R e_c$ y usando la relación entre esfuerzos dada por (4), se tiene que $\dot{x}_t = -MRM^T e_t$, que también puede escribirse como

$$\dot{x}_t = -MRM^T \frac{\partial H(x_t)}{\partial x_t} \quad (8)$$

Para analizar las propiedades de sincronización¹ del sistema (8) se obtiene la derivada temporal de $H(x_t)$, dada por

$$\dot{H} = - \left(\frac{\partial H(x_t)}{\partial x_t} \right)^T MRM^T \frac{\partial H(x_t)}{\partial x_t} \leq 0. \quad (9)$$

Hay que notar que $H(x_t)$ es una función radialmente no acotada y que su derivada temporal a lo largo de (8) es menor o igual que cero y se hace cero cuando $M^T \frac{\partial H(x_t)}{\partial x_t} = 0$. Sustituyendo esta condición en (8) se tiene que \dot{x}_0 también es cero, por lo que usando el principio de invariancia de LaSalle se concluye que las trayectorias del sistema convergerán global y asintóticamente al conjunto

$$\varepsilon = \left\{ x_0 \mid M_R^T \frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 \right\}.$$

La condición anterior implica un **consenso** en $\frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0}$ si y sólo si el único vector en el kernel de M^T es el vector $\mathbf{1}_{n-1}$ o equivalentemente (Ren y Cao, 2011) si el grafo que representa a la matriz M está conectado².

Observación. Hay que enfatizar que para este caso, una de las interpretaciones es que se está suponiendo se tienen *fuentes en todos* los bordes asociados al co-árbol, pudiéndoseles asignar, por ejemplo, comportamientos disipativos, lo cual es algo muy restrictivo que comunmente no se tiene, por lo que el interés está en buscar condiciones de consenso cuando éste no es el caso.

Red con resistencias en algunos bordes

En esta subsección se aborda el caso donde las ramas del árbol tienen asociados elementos almacenadores de flujo, en *algunas* cuerdas del co-árbol se tienen almacenadores de esfuerzo y en las cuerdas restantes se tienen elementos

¹Las propiedades de sincronización del sistema (8) han sido ampliamente estudiadas (Olfati-Saber y Murray, 2004), con MRM^T la matriz Laplaciana ponderada.

²El operador M^T tiene como dominio un espacio de dimensión $n-1$, por lo que se cumple que: $n-1 = \dim(\text{kernel } M^T) + \text{rank}(M^T)$, de donde para que $\dim(\text{kernel } M^T) = 1$, implica tener $n-2$ renglones (bordes de resistencias) linealmente independientes.

disipadores. En este escenario el objetivo es determinar bajo qué condiciones es posible seguir concluyendo consenso. La cuestión es que algunas de las cuerdas del grafo corresponden a almacenadores de esfuerzo y las otras cuerdas a resistencias, es decir, M se puede dividir por columnas como

$$M = \begin{bmatrix} M_L & M_R \end{bmatrix}$$

donde M_L y M_R corresponden a las matrices con bordes de almacenadores de esfuerzo y disipadores, respectivamente. De manera que por un lado, la dinámica para las ramas se puede dividir como

$$\dot{x}_t = M_L f_{cL} + M_R f_{cR}$$

con $f_{cL} = -\frac{\partial H}{\partial x_c}$ y $f_{cR} = -Re_{cR}$ los flujos en el co-árbol debido a los almacenadores de esfuerzo (inductores para el caso eléctrico) y a las resistencias, respectivamente, así como la relación $e_{cR} = M_R^T e_t$ y el esfuerzo en las ramas.

Por otro lado, la dinámica del co-árbol es la que corresponde a las cuerdas con almacenadores de esfuerzo dada por

$$\dot{x}_c = M_L^T e_t = M_L^T \frac{\partial H}{\partial x_t},$$

de tal forma que la dinámica Hamiltoniana completa puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_L^T \\ -M_L & -M_R R M_R^T \end{bmatrix} \nabla H \quad (10)$$

esta vez con $H(x_c, x_t)$ la suma de energías debidas a los almacenadores de flujo del árbol y a los almacenadores de esfuerzo del co-árbol. Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección anterior, para estudiar la sincronización, hay que observar que la derivada temporal de $H(x_c, x_t)$ a lo largo de (10) es

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_c} \right)^T M_L^T \left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \right) - \\ &\left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \right)^T M_L \left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_c} \right) - \\ &\left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \right)^T M_R R M_R^T \left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \right), \end{aligned}$$

lo cual se reduce a

$$\dot{H} = - \left(\frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \right)^T M_R R M_R^T \frac{\partial H(x_c, x_t)}{\partial x_t} \leq 0 \quad (11)$$

Primero, para mostrar que los estados están acotados, en el sentido de que pertenecen al espacio L_∞ , hay que notar que $H(x_c, x_t)$ es la suma de términos no negativos, esto significa que está acotada por abajo y como $\dot{H} \leq 0$, $H(x_c, x_t)$ es no creciente y su valor no puede ser mayor que su valor en $t = 0$, por lo que $H(x_c, x_t)$ también está acotada por arriba, lo cual conlleva a la concluir que los argumentos de $H(x_c, x_t)$, es decir los estados, están acotados.

Luego, para analizar la convergencia, dado que $\dot{H} \leq 0$ se usan argumentos de LaSalle, de donde (11) es cero en el conjunto $\mathcal{R} = \left\{ M_R^T \frac{\partial H}{\partial x_t} = 0 \right\}$; sustituyendo esta condición

en (10) se tiene que $\dot{x}_c = \alpha M_L^T \mathbf{1}_{n-1}$. Aquí, la matriz M_L^T también tiene sólo un 1 y un -1 en cada renglón, esto implica que el vector $\mathbf{1}_{n-1}$ está en el kernel de M_L^T y por lo tanto $M_L^T \mathbf{1}_{n-1} = 0$, consecuentemente $\dot{x}_c = 0$. Mientras que $\dot{x}_t = -M_L \left(\frac{\partial H}{\partial x_c} \right)$, de donde puede concluirse que el conjunto invariante más grande en \mathcal{R} y, por lo tanto al que convergen las trayectorias, está dado por

$$\varepsilon = \left\{ x_t \mid M_R^T \frac{\partial H}{\partial x_t} = 0 \right\}$$

lo que implica que hay un espacio de consenso si y solo si el único vector en el $\ker(M_R^T)$ es el $\mathbf{1}_{n-1}$, lo que nuevamente conlleva a pedir que el grafo que representa a la matriz M_R esté conectado, o bien que tenga $n - 2$ renglones (bordes de resistencias) linealmente independientes.

Ejemplo: Circuito eléctrico

En esta sección se ejemplifica el análisis anterior con un circuito eléctrico. Aquí se tienen capacitores e inductores como almacenadores de flujo y esfuerzo respectivamente y resistencias como elementos disipativos, es decir, el vector de estados, $x \in \mathbb{R}^m$ está dado por el flujo magnético de los inductores y las cargas en los capacitores $x = \begin{bmatrix} \phi & q \end{bmatrix}^T$. Así, considerando el circuito eléctrico mostrado en la Figura 1, cuyo grafo es el de la Figura 2, con la construcción usual, es decir, los nodos (identificados con letras) se toman como puntos de interconexión y los bordes (identificados con números) como elementos. En este grafo pueden identificarse dos subgrafos, el correspondiente al árbol, en cuyos bordes están los capacitores como elementos almacenadores de flujo, y el co-árbol, que tiene a los bordes con inductores como elementos almacenadores de esfuerzo; de manera que se han numerando primero las ramas y después las cuerdas.

Así mismo, la topología del grafo está caracterizada por la matriz de incidencia $B \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de la cual si se elimina el último renglón se tiene la matriz de incidencia reducida $C_b = \begin{bmatrix} I_5 & M \end{bmatrix}$, con I_5 la matriz identidad de orden cinco y M la submatriz que relaciona los nodos con las cuerdas.

Con el circuito eléctrico que se tiene hasta el momento es sencillo mostrar que exhibe un modelo como el de la ecuación (7) con función de energía

$$H = \frac{1}{2} q^T C q + \frac{1}{2} \phi^T L \phi, \quad (12)$$

y matrices diagonales de capacitancias e inductancias C y L , respectivamente, teniéndose así un sistema Hamiltoniano conservativo. Más aún, si en todas las cuerdas se supone

tener resistencias en lugar de inductores, entonces el modelo se transforma en

$$\dot{q} = -MRM^T \frac{\partial H}{\partial q}$$

con función de energía $H = \frac{1}{2}q^T Cq$ y con la ayuda de la derivada temporal de esta función puede concluirse consenso en los voltajes en los capacitores V_c , es decir, un *equilibrio de carga*.

Sin embargo, con la idea de ilustrar el análisis presentado en la sección anterior, se debe suponer ahora que se tienen resistencias sólo en algunas cuerdas, de manera que si las cuerdas: $\{7, 10, 12\}$ son de inductores y las $\{6, 8, 9, 11\}$ son de resistencias, el modelo dinámico es tal que la derivada del vector de cargas en las ramas es

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Mf_1 = M_L i_L + M_R i_R = -M_L \frac{\partial H}{\partial \phi} - M_R R v_R = \\ &= -M_L \frac{\partial H}{\partial \phi} - M_R R M_R^T v_c \\ &= -M_L \frac{\partial H}{\partial \phi} - M_R R M_R^T \frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

con i_L , i_R , v_c y v_R los vectores de corrientes y voltajes en los inductores, las resistencias y los capacitores, respectivamente; así como las matrices

$$M_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mientras que la derivada del vector de flujos magnéticos en las cuerdas con inductores es

$$\dot{\phi} = M_L^T v_c = M_L^T \frac{\partial H}{\partial q}$$

Con lo que el modelo Hamiltoniano completo es de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_L^T \\ -M_L & -M_R R M_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \phi} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{bmatrix}$$

con función de energía como (12) y derivada temporal como (11), de tal forma que el conjunto al que convergen las trayectorias es

$$\varepsilon = \left\{ x | M_R^T \frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 \right\} = \{x | M_R^T v_c = 0\}.$$

Caracterizado por el kernel de M_R^T , para el cual se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ -a + c \\ a - d \\ a - e \end{bmatrix} = 0$$

de donde $\ker(M_R^T) = \{(b, b, b, b, b)\}$. Es decir, hay un espacio de consenso en los voltajes de los capacitores $v_c = \text{span}\{\mathbf{1}\}$.

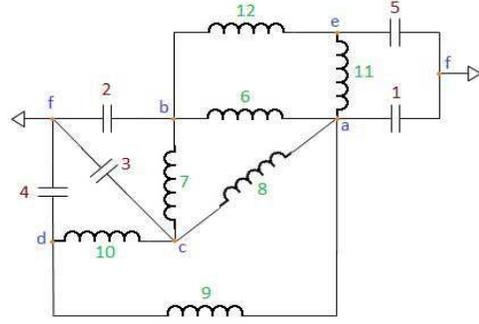


Figura 1. Ejemplo: Circuito eléctrico

Observación. Es importante mencionar que otro conjunto de cuerdas con resistencias que también hubieran funcionado para hacer consenso en los voltajes de los capacitores del circuito es el $\{7, 10, 11, 12\}$, pues este conjunto, linealmente independiente, cumple la condición de formar un subgrafo de cuerdas conectado.

Resultados de simulación

En la Figura 3 y en la Figura 4 se presentan los resultados de simulación, realizadas con el SIMULINK de MATLAB, para el último caso donde algunos inductores son reemplazados por resistencias. Los valores de capacitancias e inductancias tomadas son: $C1 = 0,08$, $C2 = 0,07$, $C3 = 0,05$, $C4 = 0,02$ y $C5 = 0,01$ y $L1 = 1/0,06$, $L2 = 1/0,05$ y $L3 = 1/0,07$, respectivamente. Así mismo, las condiciones iniciales para las cargas son: $q_{1o} = 0,1$, $q_{2o} = 0,2$, $q_{3o} = 0,3$, $q_{4o} = 0,15$ y $q_{5o} = 0,01$, mientras que para los flujos magnéticos se tiene: $\phi_{1o} = 0,02$, $\phi_{2o} = 0,01$ y $\phi_{3o} = 0,05$ y $R = 0,5I_4$. Así, la Figura 3 está para mostrar que $\frac{\partial H}{\partial q}$, es decir, el voltaje en los capacitores, llega a un consenso en el sentido de que independientemente de la condición inicial de las cargas, el voltaje converge a un mismo valor diferente de cero, donde el tiempo de convergencia es más pequeño si se tiene un valor grande de resistencias.

De la Figura 4 puede verse que la corriente en los inductores tiende a cero, esto es físicamente esperable puesto que, por la estructura del grafo, cada inductor conecta dos capacitores, de manera que si el voltaje en los capacitores se hace igual, los nodos de interconexión pueden tomarse como uno sólo de manera que no hay diferencia de potencial y por lo tanto la corriente en los inductores se hace cero. Por último, la Figura 5 muestra los valores que toma el vector \dot{x} , esto es, se observa que tanto los voltajes en los inductores como las corrientes en los capacitores se hacen cero.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha iniciado el estudio de un nuevo enfoque que trata el problema de consenso dentro de una clase de sistemas dinámicos que son los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto. El planteamiento modular

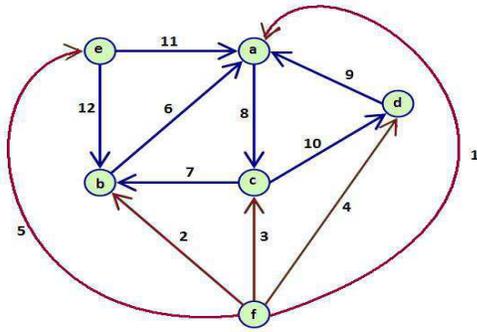


Figura 2. Grafo

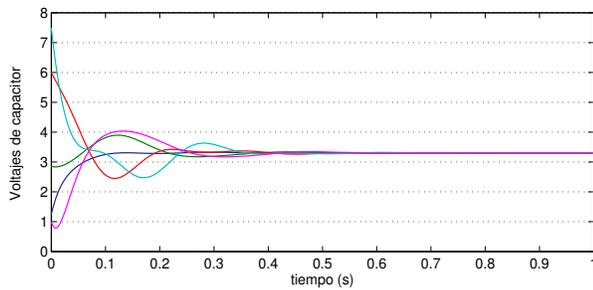


Figura 3. Ejemplo: Voltaje en los capacitores

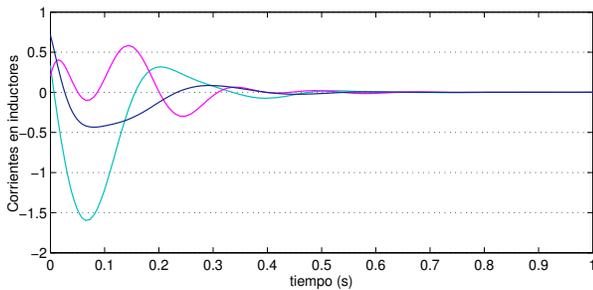


Figura 4. Ejemplo: Corriente en los inductores

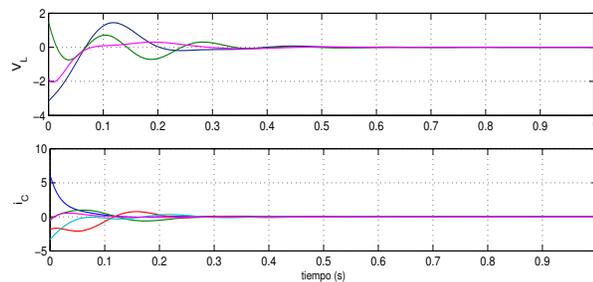


Figura 5. Ejemplo: Voltajes en inductores y corrientes en capacitores

de este método permite la extensión directa hacia una clase más amplia de sistemas como lo son los sistemas multiagente, en ellos el intercambio de información, es decir, la interconexión entre los elementos, es un grado de libertad. Así mismo, parte de las extensiones inmediatas, es la incorporación de fuentes en *algunas* cuerdas, lo que intuitivamente arrojará un sistema *subactuado* como los que se han estudiado ampliamente en la literatura.

Sin embargo, una de las restricciones del método es que supone que el grafo que se obtiene del sistema dinámico tiene un árbol con elementos almacenadores de flujo y en el co-árbol elementos almacenadores de esfuerzo; actualmente se está trabajando en el caso donde tanto en el árbol como en el co-árbol se tienen elementos mezclados. Por otro lado, para que M , obtenida de la eliminación de un renglón de B , sea también una matriz de incidencia, en el sentido de que en sus columnas se tengan sólo un 1 y un -1, es necesario que en el circuito eléctrico los capacitores (almacenadores de flujo) estén referenciados a un nodo (tierra), lo anterior aunque es usual en sistemas mecánicos e hidráulicos, no se tiene comunmente en circuitos eléctricos. La extensión se plantea como parte del trabajo futuro.

V. AGRADECIMIENTOS

Parte de este trabajo se ha realizado con el apoyo de DGAPA-UNAM (IN114513) y el apoyo entregado mediante la beca nacional de estudios de posgrado de CONACYT.

REFERENCIAS

- Arcak, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Trans on Automatic Control* **52**(8), 1380–1389.
- Fax, J. y R. Murray (2002). Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. En: *15th IFAC Conference, 2002. Proceedings of the.* p. 283.
- Fax, J. y R. Murray (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans on Automatic Control* **49**(9), 1465–1476.
- Olfati-Saber, R. y R. Murray (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans on Automatic Control* **49**(9), 1520–1533.
- Ren, W. y Y. Cao (2011). *Distributed Coordination of Multi-agent Networks, Communications and Control Engineering.* Springer.
- Van der Schaft, AJ y BM Maschke (2011). Discrete conservation laws and port-hamiltonian systems on graphs and complexes. *Computer Research Repository.*
- Wei, J. y Van der Schaft (2013). Load balancing of dynamical distribution networks with flow constraints and unknown in/outflows. *Systems and Control Letters (to appear).*
- Wellstead, Peter E (1979). *Introduction to physical system modelling.* Academic Press London.