

Seguimiento de trayectorias para sistemas mecánicos subactuados vía IDA-PBC

Pablo Borja, Gerardo Espinosa
Posgrado Ingeniería-UNAM
Coyoacan DF 04510, México
luispborja@gmail.com
Teléfono: (52)-55-23039996

Resumen—Este trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectorias para sistemas mecánicos subactuados. Para dar solución a dicho problema, se definen nuevas coordenadas, las cuales deberán describir el error existente entre el estado y la trayectoria deseada. Posteriormente, se realiza un cambio de coordenadas con el fin de conocer la dinámica del error, convirtiendo el problema de seguimiento en uno de regulación. Lo anterior se justifica, ya que, regular el error en su origen es equivalente a resolver el problema de seguimiento de trayectorias. El problema de regulación del error, se resuelve a través de la técnica de control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento, IDA-PBC por sus siglas en inglés.

La principal aportación del presente artículo, es una metodología bien definida, mediante la cual es posible resolver el ya mencionado problema de seguimiento de trayectorias para sistemas subactuados, utilizando la técnica IDA-PBC.

Palabras clave: Ecuación de emparejamiento, función de almacenamiento de energía, sistemas subactuados, interconexión y amortiguamiento.

I. INTRODUCCIÓN

La técnica IDA-PBC es una técnica de control para sistemas no lineales, la cual suele tener gran interpretación física, además de presentar interesantes propiedades de robustez ante incertidumbres y perturbaciones. Dicha técnica utiliza la representación Hamiltoniana de un sistema, la cual es muy popular para sistemas mecánicos. En numerosos trabajos tales como (Ortega, Romeo y Spong, Mark W. y Gómez-Estern, Fabio y Blankenstein, Guido 2002), (Ortega, Romeo y Liu, Zhitao y Su, Hongye 2012), (Velazquez, José Guadalupe Romero y Donaire, Alejandro y Ortega, Romeo 2012), el problema de regulación es resuelto de forma clara y metódica, ofreciendo un valioso antecedente para este trabajo. Sin embargo, en lo que se refiere al seguimiento de trayectorias mediante IDA-PBC, no parece haber una metodología tan clara.

El objetivo principal de este trabajo es proporcionar un marco teórico, el cual sirva para resolver el problema de seguimiento para sistemas mecánicos subactuados utilizando la técnica IDA-PBC. Asimismo, pretende ser capaz de dar solución al problema, tanto para sistemas cuyas derivadas parciales de la función de energía potencial son lineales, como para sistemas cuyas derivadas parciales de la función de energía potencial son no lineales. Debido a lo

anterior, es fundamental presentar la definición de sistema subactuado:

Definición 1: Un sistema es subactuado si posee un mayor número de grados de libertad que entradas de control (actuadores).

La metodología presentada, tiene por filosofía convertir el problema de seguimiento en uno de regulación, al igual que en (Fujimoto, Kenji y Sakurama, Kazunori y Sugie, Toshiharu 2003), esto se logra expresando la dinámica del error como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto. Una vez hecho lo anterior, se resuelve el problema de regulación del nuevo sistema, para lo cual es posible valerse de las herramientas y algoritmos de solución presentados en los trabajos antes mencionados. Conseguir el objetivo de regular el error en cero equivale a resolver el problema de seguimiento de trayectorias. En la definición de la dinámica del error deseada, así como en la solución misma del problema, juegan un rol determinante las trayectorias deseadas, razón por la cual se presta especial atención al método de obtención de las mismas.

Finalmente se presenta el ejemplo de una grúa, mediante el cual se pretende ejemplificar la aplicación de la metodología expuesta a lo largo del presente trabajo.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Suponga un sistema mecánico subactuado y sin fricción, descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (1)$$

en donde, el estado $(q, p) \in \mathbb{R}^n$ se forma con las posiciones y los momentos generalizados respectivamente. La matriz $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ representa la forma en la que incide la acción de control en el sistema, esta matriz tiene rango m . Cuando $m < n$, el Sistema (1) es subactuado.

Por otra parte, la función de almacenamiento de energía del Sistema (1) tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (2)$$

siendo $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz de inercias del sistema y $V(q)$ la función de energía potencial. Para mayor información

acerca de la obtención de las ecuaciones (1) y (2), ver (Van der Schaft 1999).

Considere la definición clásica de error, la cual está dada por $\bar{x} = x - x_d$, si x_d es constante se trata de un problema de regulación, mientras que $x_d(t)$ implica un problema de seguimiento de trayectorias. De acuerdo con esta definición de error, $\bar{x} = 0$ implica $x = x_d$. Aplicando dicha definición al sistema mecánico se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\bar{q} = q - q_d \Rightarrow \dot{\bar{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d \quad (3)$$

$$\bar{p} = p - p_d \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \dot{p} - \dot{p}_d \quad (4)$$

entonces, es posible definir a la dinámica del error de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, los sistemas mecánicos, como cualquier sistema físico, presentan limitaciones en el comportamiento que se les puede imponer. Razón por la cual, las trayectorias deseadas necesariamente deben restringirse a comportamientos que el sistema es capaz de realizar. Esto queda manifiesto en la siguiente definición:

Definición 2: Una trayectoria x_d es realizable, si y sólo si, existe una u^* tal que los estados del sistema en lazo cerrado satisfacen $x = x_d$. En caso de no existir alguna u^* que cumpla lo anterior, entonces la trayectoria x_d es no realizable.

Considere la siguiente definición

$$p_d = M(q)\dot{q}_d \quad (5)$$

la cual no viola ninguna ley física ni impone algún problema formal, por el contrario, resulta sumamente útil para encontrar una estructura Hamiltoniana deseada de la dinámica del error, tal como se verá más adelante.

A partir de la Definición (5), la dinámica de las trayectorias deseadas es

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_d} H_a \\ \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u^* \\ H_a = \frac{1}{2} p_d^T M^{-1}(q) p_d + V(q_d)$$

Una manera de encontrar las trayectorias realizables por la planta, es invertir el sistema anterior y proponer trayectorias que respeten las restricciones que tienen lugar al efectuar dicha inversión. En lo sucesivo esta será la manera de calcular las trayectorias realizables en este trabajo, con lo cual la dinámica del error en lazo abierto está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H - \nabla_{q_d} H_a \\ \nabla_p H - \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} (u - u^*) \quad (6)$$

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q)$$

$$H_a = \frac{1}{2} p_d^T M^{-1}(q) p_d + V(q_d)$$

Por otro lado, la estructura de la dinámica deseada del error en lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 - G K_{di} G^T \end{bmatrix} \nabla_{\bar{q}, \bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \quad (7)$$

$$H_d(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + V_d(\bar{q}) \quad (8)$$

con $J_2(\bar{q}, \bar{p}) = -J_2^T(\bar{q}, \bar{p})$, $K_{di} > 0$ y $M_d(q) = M_d^T(q) > 0$. La dinámica descrita por las ecuaciones (7) y (8) se deduce paso a paso en (Ortega, Romeo y Liu, Zhitao y Su, Hongye 2012), y los trabajos (Gómez-Estern, F y Ortega, Romeo y Rubio, Francisco R y Aracil, Javier 2001) y (Ortega, Romeo y Spong, Mark W. y Gómez-Estern, Fabio y Blankenstein, Guido 2002) ilustran su aplicación.

Para asegurar la estabilidad del punto $[\bar{q} \ \bar{p}]^T = [0 \ 0]^T$ primero se debe comprobar que éste es un equilibrio asiguable del sistema, es decir

$$G_{\perp} \left[\begin{array}{c} M^{-1}(q) \bar{p} \\ -\nabla_q H(q, p) + \nabla_{q_d} H_a(q, q_d, p_d) \end{array} \right] \Big|_{\bar{q}, \bar{p}=0}$$

en caso de cumplir con lo anterior, es necesario que el argumento mínimo de la función de energía potencial deseada $V_d(\bar{q})$ sea $\bar{q} = 0$. Ver (Ortega, Romeo y Liu, Zhitao y Su, Hongye 2012).

El siguiente paso, para encontrar una acción de control que regule el error en cero, consiste en igualar las ecuaciones (6) y (7). Entonces

$$M^{-1} p - M^{-1} p_d = M^{-1} M_d M_d^{-1} \bar{p} = M^{-1} \bar{p} \\ G u - \nabla_q H - \dot{p}_d = -M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} H_d + \\ (J_2 - G K_{di} G^T) \nabla_{\bar{p}} H_d$$

siendo posible dividir la acción de control en dos partes, esto es $u = u_{es} + u_{di}$. La primera parte corresponde al moldeo de energía y la segunda a la inyección de amortiguamiento. Lo anterior se hace para facilitar el cálculo de la acción de control, ver (Ortega, Romeo y Spong, Mark W. y Gómez-Estern, Fabio y Blankenstein, Guido 2002).

La parte de la acción de control que corresponde al moldeo energético debe satisfacer la llamada ecuación de emparejamiento, la cual aparece en sistemas subactuados. Dicha ecuación plasma de forma matemática las restricciones que se tienen en el espacio en el cual no incide el control, y está dada por la siguiente expresión

$$G_{\perp} \{ \nabla_q H + \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) + J_2 M_d^{-1} \bar{p} \} = 0 \quad (9)$$

en donde, $G_{\perp} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es el aniquilador izquierdo de G , es decir, $G_{\perp} G = 0$.

La Ecuación (9), es una ecuación en derivadas parciales y además es no lineal, lo anterior hace que encontrar su solución directa resulte un cálculo extraordinariamente complejo, razón por la cual, se sugiere separarla en una parte correspondiente a la co-energía cinética y otra parte correspondiente a la energía potencial. Al realizar la separación se tienen las siguientes expresiones

$$G_{\perp} \{ \nabla_{\bar{q}} [p^T M^{-1} (\bar{q} + q_d) p] - \nabla_{q_d} [p_d^T M^{-1} (\bar{q} + q_d) p_d] - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} [p^T M_d^{-1} \bar{p}] + 2J_2 M_d^{-1} \bar{p} \} = 0 \quad (10)$$

$$G_{\perp} \{ \nabla_q V(q) - \nabla_{q_d} V(q_d) - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q}) \} = 0 \quad (11)$$

Posteriormente, se define la estructura de la matriz de inercias deseada, la cual debe cumplir con

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix};$$

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_3 > a_2^2, \quad a_3 > 0$$

es decir

$$M_d = M_d^T > 0. \quad (12)$$

Cuando el sistema presenta una matriz de inercias $M(q) = M$, resulta conveniente elegir M_d también constante, con lo cual el término que resuelve trivialmente la ecuación (10) es $J_2 = 0$. Este caso puede referirse a sistemas que, de manera natural poseen matriz de inercias constante, o bien, a sistemas que aceptan un cambio de coordenadas $(q, p) \mapsto (q, \Psi(q)^T p)$, tal que el sistema en las nuevas coordenadas presenta una función de almacenamiento de energía de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi^T(q) \\ \Psi(q) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T(q)G \end{bmatrix} u$$

$$H = \frac{1}{2} |\Pi|^2 + V(q)$$

en donde, el factor $\Psi(q) = \Psi(q)^T$ se calcula de la siguiente manera

$$M^{-1}(q) = \Psi(q) \Psi^T(q)$$

Dichos sistemas deben cumplir con alguna de las siguientes características:

- Tener matriz de inercias constante.
- Tener símbolos de Christoffel del primer tipo iguales a cero.
- Tener símbolos de Riemann iguales a cero.

- Poseer un factor Ψ el cual admita la siguiente propiedad de antisimetría

$$\sum_{j=1}^n [\Psi_i(q), \Psi_j(q)] \Psi_j^T(q) = - \left(\sum_{j=1}^n [\Psi_i(q), \Psi_j(q)] \Psi_j^T(q) \right)^T, \quad i \in \bar{n}$$

para más detalles ver (Venkatraman, Aneesh y Ortega, Romeo y Sarras, Ioannis y Van der Schaft, Arjan 2010).

Una vez obtenida la estructura de M_d y J_2 se soluciona la ecuación en derivadas parciales descrita en (11), con lo cual se obtiene $V_d(\bar{q})$, buscando a través de los grados de libertad en M_d , que V_d cumpla con las condiciones de estabilidad impuestas.

La función de energía potencial deseada V_d que resuelve la Ecuación (11), puede ser dependiente del error y las trayectorias deseadas. De hecho, para lograr que V_d dependa exclusivamente del error, es necesario que las derivadas parciales de la función de energía potencial (términos gravitacionales) de la planta sean lineales, y que la matrices de inercias M y M_d sean constantes. Esto se queda manifiesto en la siguiente condición.

Condición 1: Sea V_d solución de la Ecuación (11), q_d una trayectoria realizable para el Sistema (1), y

$$B(q) = \nabla_q V(q), \quad B_{q_d} = \nabla_{q_d} V(q_d), \quad B_d(\bar{q}) = \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q})$$

entonces

$$V_d(\bar{q}) \Rightarrow B(q) - B(q_d) = B(\bar{q})$$

Para comprobar la condición considere la Ecuación (11), con M y M_d constantes. Si los términos gravitacionales son lineales, la ecuación anterior puede expresarse de la siguiente manera

$$G_{\perp} \{ B(\bar{q}) - M_d M^{-1} B_d(\bar{q}) \} = 0$$

en donde, se sabe que M y M_d son matrices simétricas y positivas definidas, por lo tanto, el término $M_d M^{-1}$ es una matriz simétrica y positiva definida. Observe que cuando los términos gravitacionales son no lineales, es imposible formar el término $B(\bar{q})$, lo que origina que B_d sea dependiente del error y las trayectorias deseadas, es decir $B_d(\bar{q} + q_d, q_d)$.

Una consecuencia de lidiar con términos gravitacionales no lineales es una función de almacenamiento de energía en lazo cerrado dependiente de las trayectorias deseadas, esto es

$$H_d = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} (\bar{q} + q_d) \bar{p} + V_d(\bar{q}, q_d).$$

Hecho lo anterior, se debe comprobar la naturaleza del punto $\bar{q} = 0$, el cual necesariamente debe ser un mínimo de la función V_d . A continuación se presenta una forma de conocer la naturaleza de dicho punto.

Caso 1: Suponga que la función de energía potencial deseada únicamente depende del error, entonces, el punto $\bar{q} = 0$ es un punto crítico si

$$\nabla_{\bar{q}} V_d|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

más aún, se trata de un mínimo si

$$\nabla_{\bar{q}}^2 V_d|_{\bar{q}=0} > 0$$

Caso 2: Suponga que la función de energía potencial deseada depende del error y de las trayectorias deseadas, las cuales son funciones explícitas del tiempo. Entonces, el punto $\bar{q} = 0$ es un punto crítico si

$$\nabla_{\bar{q}} V_d|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall t$$

más aún, se trata de un mínimo si

$$\nabla_{\bar{q}}^2 V_d|_{\bar{q}=0} > 0, \forall t$$

En ambos casos, $\nabla_{\bar{q}}^2 V_d$ es la llamada matriz Hessiana.

Si es posible cumplir con las condiciones de estabilidad impuestas para V_d , entonces el control por moldeo de energía se obtiene de la siguiente manera

$$u_{es} = [G^T G]^{-1} G^T \{ \nabla_q H + \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \}.$$

Finalmente, para calcular la parte del control correspondiente a la inyección de amortiguamiento se utiliza la siguiente expresión

$$u_{di} = -K_{di} G^T M_d^{-1} \bar{p}. \quad (13)$$

Para hacer el análisis de estabilidad del punto de equilibrio $[\bar{q} \ \bar{p}]^T = [0 \ 0]^T$, se propone a la función de almacenamiento de energía H_d como función de Lyapunov. Cuando dicha función depende exclusivamente del error, el punto de equilibrio mencionado es estable como se muestra a continuación

$$H_d(\bar{q}, \bar{p}) > 0 \quad \forall (\bar{q}, \bar{p}) \neq 0$$

$$H_d(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(\bar{q}, \bar{p}) &= \left[\nabla_{\bar{q}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) \quad \nabla_{\bar{p}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) \right] \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} \\ &= -\nabla_{\bar{p}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) G^T K_{di} G \nabla_{\bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \leq 0 \end{aligned}$$

Para demostrar estabilidad asintótica del punto de equilibrio, es suficiente con demostrar que el sistema es cero estado detectable desde la salida pasiva, esto es

$$G^T M_d^{-1}(q) \bar{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte, cuando la función de almacenamiento de energía deseada depende del error y de las trayectorias deseadas, la dinámica del error en lazo cerrado es un sistema no autónomo, ya que las trayectorias deseadas son funciones explícitas del tiempo. Debido a lo anterior, las siguientes condiciones son necesarias para que el punto de equilibrio sea estable

$$H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) > 0 \quad \forall t, (\bar{q}, \bar{p}) \neq 0$$

$$H_d(q_d, 0, 0) = 0 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) &= -\nabla_{\bar{p}}^T H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) G^T K_{di} G \nabla_{\bar{p}} H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) \\ &\quad + \frac{\partial V_d(q_d, \bar{q}, \bar{p})}{\partial q_d} \dot{q}_d \leq 0 \end{aligned}$$

en estos casos, se requiere de otro tipo de herramientas para asegurar estabilidad asintótica, una de ellas puede ser el teorema de Barabalat.

III. GRÚA

En esta sección se pretende, a través de un ejemplo, mostrar la aplicación de la metodología propuesta previamente.

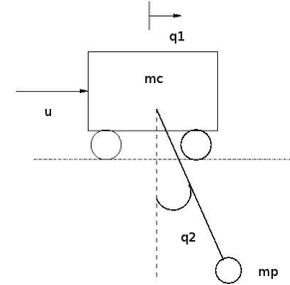


Figura 1: Grúa

Suponga el sistema de la Figura (1), el cual puede ser representado por el Sistema (1) con

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + m_p g l [1 - \cos(q_1)] \\ M &= \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l \cos(q_2) \\ m_p l \cos(q_2) & m_p l^2 \end{bmatrix} \\ \nabla_q H &= \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l \sin(q_2) \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los símbolos de Riemann de este sistema se calculan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(q) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 M_{ik}}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 M_{jl}}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 M_{il}}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 M_{jk}}{\partial q_i \partial q_l} \right] + \\ &\quad \sum_{a,b=1}^n (M^{-1})_{ab} [C_{jla} C_{ikb} - C_{ila} C_{jkb}] \end{aligned}$$

en donde, C son los símbolos de Christoffel del primer tipo. A efectuar el cálculo resulta que todos los símbolos son cero, por lo tanto, el sistema puede ser parcialmente linealizado mediante el factor

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{-\cos(q_2)}{l\gamma} \\ 0 & \frac{1}{l\sqrt{m_p}} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \sqrt{m_c + m_p \sin^2(q_2)}$$

siendo $\Pi = \Psi(q)^T p$.

Hecho lo anterior, la nueva dinámica del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ -\Psi^T & 0 \end{bmatrix} \nabla_{q,\Pi} H + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T G \end{bmatrix} u \quad (14)$$

$$H = \frac{1}{2} |\Pi|^2 + m_p g l [1 - \cos(q_2)]$$

Para obtener las trayectorias realizables se encuentra la dinámica de Π_d , la cual está dada por

$$\dot{\Pi}_d = -\Psi^T (\nabla_q H)|_{q=q_d} + \Psi^T G u^* = \begin{bmatrix} \frac{m_p g \sin(q_{2d}) \cos(q_2)}{-\sqrt{m_p} g \sin(q_{2d})} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} u^* \quad (15)$$

Por otro lado, partiendo de la Definición (5), se tiene

$$\dot{\Pi}_d = \frac{d}{dt} (\Psi^T M) \dot{q}_d + (\Psi^T M) \ddot{q}_d = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \sqrt{m} \cos(q_2) & l\sqrt{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{m \sin(2q_2)}{2\gamma^3} & 0 \\ -\sqrt{m} \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Al igualar las ecuaciones (15) con (16), se obtiene la restricción física del sistema, la cual es

$$-g \sin(q_2) = \cos(q_2) \ddot{q}_{1d} + l \ddot{q}_{2d} - \sin(q_2) \dot{q}_{1d} \quad (17)$$

dicha restricción no debe ser violada para que las trayectorias q_d sean realizables.

Por su parte, la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{\Pi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ -\Psi^T & 0 \end{bmatrix} \nabla_{q,\Pi} H + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{\Pi}_d \end{bmatrix} \quad (18)$$

Debido a que la matriz de inercias de la planta es constante, conviene elegir una matriz de inercias deseada constante. Por simplicidad se elige $M_d = I$, esta elección cumple con las condiciones impuestas a M_d , no obstante, al calcular el mínimo de V_d se comprobará si esta elección es válida o no.

Se iguala la dinámica del error en Π con su respectiva dinámica deseada, de lo cual se tiene

$$\Psi^T G u - \Psi^T \nabla_q V - \dot{\Pi}_d = -\Psi^T \nabla_{\bar{q}} V_d$$

Al premultiplicar por $(\Psi^T G)_\perp = [0 \ 1]$, se conoce la ecuación de emparejamiento de este sistema, la cual es

$$m_p g l [\sin(\bar{q}_2 + q_{2d}) - \sin(q_{2d})] = \frac{\partial V_d}{\partial \bar{q}_2}$$

La solución de esta ecuación se calcula utilizando Maple®, obteniendo la siguiente expresión

$$V_d = m_p g l [-\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) - \bar{q}_2 \sin(q_{2d})] + \phi(\bar{q}_1, q_{2d})$$

en donde, $\phi(\bar{q}_1, q_{2d})$ debe tener un mínimo en $\bar{q}_1 = 0$. En este caso, se elige una función cuadrática en \bar{q}_1 por simplicidad, además de agregar un término $m_p g l \cos(q_{2d})$ para cumplir con la condición $V_d(0, 0, q_{2d}) = 0$. De esta forma, se obtiene la función de energía potencial deseada, la cual es

$$V_d = -m_p g l [\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) + \bar{q}_2 \sin(q_{2d}) - \cos(q_{2d})] + \frac{K_c}{2} (\bar{q}_1)^2$$

con $K_c > 0$.

Posteriormente, se comprueba que el origen del error es un punto crítico

$$\left. \frac{\partial V_d}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l [\sin(q_{2d}) - \sin(q_{2d})] \end{bmatrix}$$

lo cual es cero para toda q_{2d} , y por lo tanto, para todo t .

Mediante el signo de la matriz Hessiana evaluada en el punto crítico se obtiene la naturaleza del mismo

$$\left. \frac{\partial^2 V_d}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & m_p g l \cos(q_{2d}) \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz Hessiana es positiva definida siempre y cuando $q_{2d} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Debido a lo anterior, la suposición $M_d = I$ es válida para dichos valores de q_{2d} .

De lo anterior, la función de almacenamiento de energía para el sistema en lazo cerrado es

$$H_d = -m_p g l [\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) + \sin(q_{2d}) - \cos(q_{2d})] + \frac{K_c}{2} (\bar{q}_1)^2 + \frac{1}{2} |\Pi|^2$$

Hecho lo anterior, $(u - u^*)_{es}$ se calcula de acuerdo con

$$u_{es} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \Psi \nabla_q V(q) + \dot{\Pi}_d - M^{-1} \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q}) \right\}$$

Por otra parte, para la inyección de amortiguamiento se realiza el siguiente cálculo

$$u_{di} = -K_{di} (\Psi^T G)^T \bar{\Pi}$$

con $K_{di} > 0$.

Para probar que los resultados son correctos, se realizó una simulación con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 K_c &= 20 & K_{di} &= 10 & g &= 9.78 \\
 m_p &= 1 & m_c &= 1 & l &= 0.3 \\
 q_{1d} &= \sin(0.1t) & \Pi_1(0) &= 0 & \Pi_2(0) &= 0 \\
 q_1(0) &= 0.6 & q_2(0) &= 0.2
 \end{aligned}$$

Para calcular el resto de las trayectorias deseadas, se resolvió en línea la Restricción (17), la cual es una ecuación

diferencial. En la Figura (2) se observan los estados reales del sistema y los deseados, siendo posible apreciar que los estados reales del sistema siguen las trayectorias deseadas. Por su parte, en la Figura (3) se muestran los errores de seguimiento. Finalmente para realizar el análisis de estabilidad, ha sido imposible para el autor demostrar de forma analítica la condición $\dot{H}_d \leq 0$, por esta razón se muestra el comportamiento de dicha función en la Figura (4), junto con la señal de control u . Dicha figura pretende demostrar la condición de estabilidad antes mencionada.

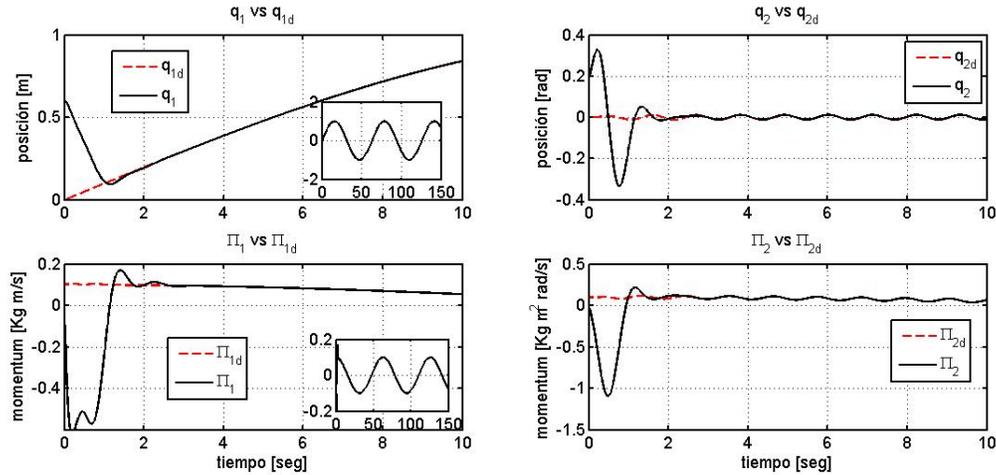


Figura 2: Estados deseados contra reales

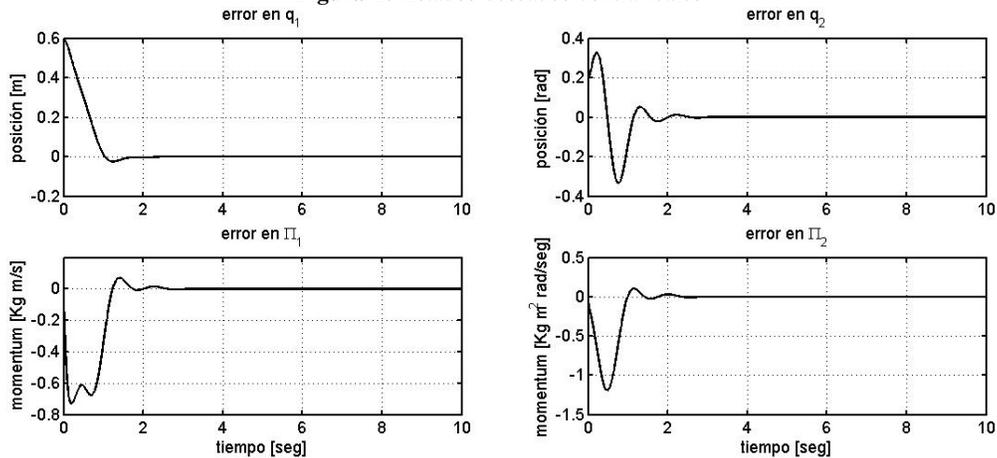


Figura 3: Errores

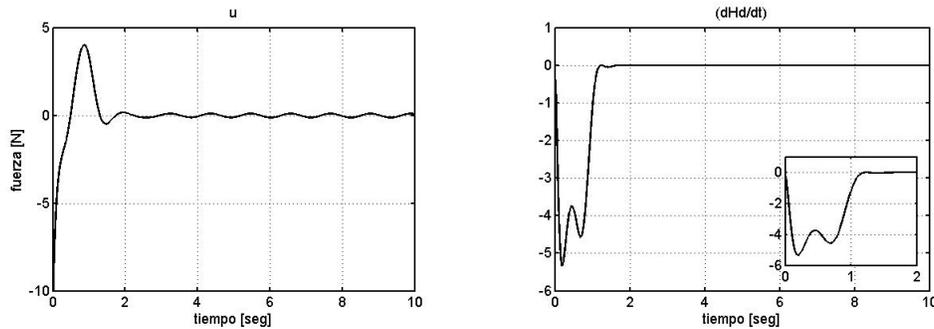


Figura 4: Señal de control y \dot{H}_d

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una metodología que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias para sistemas mecánicos subactuados utilizando la técnica IDA-PBC. Dicha metodología se explica paso a paso y posteriormente se ilustra su funcionamiento, a través del ejemplo de una grúa.

Siguiendo los pasos descritos en este trabajo, es posible dar solución al problema de seguimiento de trayectorias para sistemas cuyos términos gravitacionales son no lineales, este hecho debe resaltarse debido a la escasa teoría existente en la que se resuelven ejemplos de este tipo.

La metodología propuesta requiere de las trayectorias realizables por el sistema, si bien se presenta un método de obtenerlas a través de la inversión de la planta, este problema puede resultar extraordinariamente complejo para algunos sistemas, siendo una de las limitaciones de la estrategia de solución.

Como trabajo futuro, se propone desarrollar un método para encontrar las trayectorias realizables por un sistema. Adicionalmente, resulta conveniente buscar un método analítico que demuestre la estabilidad de la dinámica del error en lazo cerrado.

REFERENCIAS

- Ortega, Romeo y Liu, Zhitao y Su, Hongye (2012). Control via interconnection and damping assignment of linear time-invariant systems: a tutorial. *International Journal of Control* **85**, 603–611.
- Velazquez, José Guadalupe Romero y Donaire, Alejandro y Ortega, Romeo (2012). Simplifying robust energy shaping controllers for mechanical systems via coordinate changes. *Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control* **4**, 60–65.
- Fujimoto, Kenji y Sakurama, Kazunori y Sugie, Toshiharu (2003). Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations. *Automatica* **39**, 2059–2069.
- Ortega, Romeo y Spong, Mark W. y Gómez-Estern, Fabio y Blankenstein, Guido (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **47**, 1218–1233.
- Venkatraman, Aneesh y Ortega, Romeo y Sarras, Ioannis y van der Schaft, Arjan (2010). Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **55**, 1059–1074.

- Gómez-Estern, F y Ortega, Romeo y Rubio, Francisco R y Aracil, Javier (2001). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping. *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on* **2**, 1137–1143.
- Van der Schaft, A. (1999). *L2-Gain and Passivity in Nonlinear Control*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Singhal, Rakesh y Patayane, Rupesh y Banavar, Ravi (2006). Tracking a Trajectory for a Gantry Crane: Comparison Between IDA-PBC and Direct Lyapunov Approach. *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on* **p1788–1793**.