

Observador de velocidad híbrido con convergencia en tiempo finito

Roque Martínez¹ y Joaquín Álvarez²

¹Programa de Ingeniería Mecánica, Unidad Académica de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, Zac., México.

²Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones,
División de Física Aplicada, CICESE, Ensenada, B. C., México.
rmartinez@uaz.edu.mx, jqalvar@cicese.mx

Resumen—Se propone un observador de velocidad híbrido para una clase de sistemas mecánicos. El observador converge en tiempo finito a la velocidad del sistema y el cálculo de sus parámetros es sencillo. Además, el observador propuesto es robusto frente a incertidumbres discontinuas acotadas en el sistema. Se muestra el desempeño del observador con dos ejemplos numéricos, en el primero se considera un sistema continuo y en el segundo un sistema discontinuo.

Palabras clave: Observador, sistemas híbridos, sistemas discontinuos, fricción.

I. INTRODUCCIÓN

En sistemas mecánicos es común que no sea posible conocer todas las variables de estado para calcular la señal de control del sistema en lazo cerrado. En muchos casos las variables de velocidad no se encuentran disponibles, mientras que las variables de posición sí lo están. Sin embargo, algunos fenómenos no lineales presentes en los sistemas mecánicos dificultan la observación de la velocidad.

En este contexto, los observadores lineales, los basados en el modelo dinámico y los de alta ganancia no son adecuados cuando en el sistema existen incertidumbres no modeladas (Davila et al., 2005).

Los observadores basados en modos deslizantes son ampliamente usados debido a su tiempo finito de convergencia, la robustez con respecto a las incertidumbres y la posibilidad de estimar las perturbaciones (Ferrara, 2009), (Fraguela Cuesta et al., 2011) y (Van et al., 2012), sin embargo, en la mayoría de los casos, cuando las incertidumbres son discontinuas no presentan un desempeño adecuado, o incluso no es posible aplicarlos (Davila et al., 2005), (Xian et al., 2004) y (Levant, 1998).

En este trabajo se propone un observador de velocidad híbrido para una clase de sistemas mecánicos con tiempo finito de convergencia. Se muestra que es robusto frente a incertidumbres discontinuas acotadas en el sistema y el cálculo de sus parámetros es sencillo. Además, el desempeño del observador se ilustra con dos ejemplos numéricos, en el primero se considera un sistema continuo en lazo cerrado, y en el segundo un sistema discontinuo con una ley de control discontinua que utiliza la velocidad observada.

II. OBSERVADOR

Considere

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1) + \xi(t, x_1, x_2, u) \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1)$ es suave y

$$|\xi(t, x_1, x_2, u)| < M < \infty, \quad (2)$$

con M constante.

El observador de x_2 propuesto es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_2(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(x_1) + k_1(x_1 - \hat{x}_1) + k_3\dot{x} + k_{r1}\varphi(\dot{x}) \\ \dot{x} &= -k_{r2}x - w + (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{w} &= k_{r3}\varphi(\dot{x})\end{aligned}\quad (3)$$

donde $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathbb{R}$, $k_1, k_2, k_3, k_{r1}, k_{r2}, k_{r3}$ son constantes positivas, $k_{r1} \geq M$ y

$$\varphi(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \dot{x} > 0, \\ 0, & \text{para } \dot{x} = 0, \\ -1, & \text{para } \dot{x} < 0. \end{cases}\quad (4)$$

es una función discontinua (híbrida (Martinez et al., 2008), (Orlov, 2009)).

Definiendo las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1, e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - k_2e_1 \\ \dot{e}_2 &= \xi(t, x_1, x_2, u) - k_1e_1 - k_3\dot{x} - k_{r1}\varphi(\dot{x})\end{aligned}\quad (5)$$

y haciendo el cambio de variable $v_1 = e_1$ y $v_2 = \dot{v}_1 = \dot{e}_1$ tenemos una ecuación diferencial con discontinuidades en el lado derecho como las abordadas en (Filippov, 1988)

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= \xi(t, x_1, x_2, u) - k_1v_1 - k_2v_2 - k_3\dot{x} - k_{r1}\varphi(\dot{x}) \\ \dot{x} &= -k_{r2}x - w + v_1 \\ \dot{w} &= k_{r3}\varphi(\dot{x})\end{aligned}\quad (6)$$

donde, de acuerdo a Filippov (Filippov, 1988), el intervalo de equilibrio es en $v_2 = \dot{x} = 0$, ya que

$$\begin{aligned} 0 &= v_2 \\ 0 &= \xi(t, x_1, x_2, u) - k_1 v_1 - k_2 v_2 - k_3 \dot{x} - k_{r1} \varphi(\dot{x}) \\ 0 &= -k_{r2} x - w + v_1 \\ 0 &= k_{r3} \varphi(\dot{x}). \end{aligned}$$

El siguiente Teorema proporciona un criterio para la seleccin adecuada de k_2, k_{r1}, k_{r3} que hagan $v_2 = 0$ en tiempo finito, lo que implica que $x_2 = \dot{x}_1$ en tiempo finito, ya que $v_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1$.

Teorema 1: Considere el sistema (6). Si

$$k_{r3} > \frac{6k_{r1}}{k_2} \quad (7)$$

entonces $v_2 = 0$ en tiempo finito.

Demostracin: Considere la funcin definida positiva

$$V_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}k_1 v_1^2 + \frac{1}{2}k_3 \dot{x}^2 \quad (8)$$

La derivada temporal de V_1 a lo largo de las trayectorias del sistema (6) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= v_2 \dot{v}_2 + k_1 v_1 \dot{v}_1 + k_3 \dot{x} \ddot{x} \\ \dot{V}_1 &= (\xi(t, x_1, x_2, u) - k_{r1} \varphi(\dot{x})) v_2 - k_2 v_2^2 \\ &\quad - k_3 k_{r2} \dot{x}^2 - k_3 k_{r3} |\dot{x}| \end{aligned} \quad (9)$$

con $\dot{x} \varphi(\dot{x}) = |\dot{x}|$, y determinamos que

$$|v_2| \leq \frac{M + k_{r1}}{k_2} \quad (10)$$

en tiempo finito.

Para determinar que $v_2 = 0$ en tiempo finito, considere la siguiente funcin definida positiva

$$V_2 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}k_1 v_1^2 + \frac{1}{2}k_3 \dot{x}^2 + k_{r1} |\dot{x}| \quad (11)$$

La derivada temporal de V_2 a lo largo de las trayectorias del sistema (6) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \xi(t, x_1, x_2, u) v_2 - k_2 v_2^2 - k_{r1} \varphi(\dot{x}) v_2 \\ &\quad - k_3 k_{r2} \dot{x}^2 - k_3 k_{r3} \varphi(\dot{x}) \dot{x} - k_{r1} \rho(\dot{x}) k_{r2} \dot{x} \\ &\quad - k_{r1} \rho(\dot{x}) k_{r3} \varphi(\dot{x}) + k_{r1} \rho(\dot{x}) v_2 \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$\rho(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \dot{x} > 0, \\ [-1, 1], & \text{para } \dot{x} = 0, \\ -1, & \text{para } \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (13)$$

es el gradiente generalizado (Clarke et al., 1998) de la funcin $|\dot{x}|$ para todo \dot{x} .

Si las trayectorias de (6) se encuentran fuera de la superficie de discontinuidad $\dot{x} = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \xi(t, x_1, x_2, u) v_2 - k_2 v_2^2 - k_3 k_{r2} \dot{x}^2 \\ &\quad - k_3 k_{r3} |\dot{x}| - k_{r1} k_{r2} |\dot{x}| - k_{r1} k_{r3} \end{aligned}$$

o

$$\dot{V}_2 \leq \xi(t, x_1, x_2, u) v_2 - k_{r1} k_{r3}. \quad (14)$$

Entonces, de acuerdo con (10), si

$$k_{r1} k_{r3} > M \frac{M + k_{r1}}{k_2} \quad (15)$$

las trayectorias del sistema llegan a $\dot{x} = \dot{x} = 0$ en tiempo finito.

Si las trayectorias permanecen en la superficie de discontinuidad $\dot{x} = 0$, tenemos que de acuerdo a Filippov (Filippov, 1988)

$$\ddot{x} = -k_{r2} \dot{x} - k_{r3} \varphi(\dot{x}) + v_2 = -k_{r3} \varphi(0) + v_2 = 0 \quad (16)$$

y, por (4), existir comutacin infinita s3lo cuando $v_2 \neq 0$. Puesto que para $v_2 \neq 0$ tenemos

$$\dot{V}_2 = \xi(t, x_1, x_2, u) v_2 - k_2 v_2^2 + k_{r1} \rho(\dot{x}) v_2 \quad (17)$$

o

$$\dot{V}_2 \leq (\xi(t, x_1, x_2, u) + k_{r1} \rho(\dot{x})) v_2, \quad (18)$$

esta comutacin infinita deber ser ("no hay de otra!") entre (18) y (14).

Note que los dos conjuntos de puntos del tiempo t correspondientes a (18) y (14), respectivamente, son no numerables. Adem3s, (18) y (14), con respecto t , son funciones medibles, acotadas y por lo tanto, integrables segun Lebesgue (Kolmogorov y Fomin, 1975).

Por lo tanto, si queremos que V_2 a lo largo de las trayectorias de (6) decaiga en tiempo finito hacia $v_2 = \dot{x} = 0$, basta, de acuerdo a la integral de Lebesgue (Kolmogorov y Fomin, 1975) de \dot{V}_2 , que (14) con (15) compense a (18), es decir, considerando nuevamente (10), que

$$k_{r1} k_{r3} > M \frac{M + k_{r1}}{k_2} + (M + k_{r1}) \frac{M + k_{r1}}{k_2}$$

$$k_{r1} k_{r3} > (2M + k_{r1}) \frac{M + k_{r1}}{k_2}$$

$$k_{r3} > \frac{6k_{r1}}{k_2}$$

puesto que $k_{r1} \geq M$. ■

II-A. Ejemplo 1

Sea el sistema mec3nico en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_p (x_1 - x_{1d}) - k_v (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (19)$$

donde k_p, k_v son constantes positivas y x_{1d} es una trayectoria deseada, tal que $|x_{1d}| < c_1 < \infty$, $|\dot{x}_{1d}| < c_2 < \infty$, $|\ddot{x}_{1d}| < c_3 < \infty$, con c_1, c_2, c_3 constantes. Para este sistema definimos $f(x_1) = -k_p x_1$ y $\xi(t, x_1, x_2, u) = k_p x_{1d} - k_v (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d}$.

Puesto que el punto de equilibrio $(x_1 - x_{1d}) = (x_2 - \dot{x}_{1d}) = 0$ de (19) es asint3ticamente estable (k_p y k_v son constantes positivas), el t3rmino $k_v (x_2 - \dot{x}_{1d})$ de $\xi(t, x_1, x_2, u)$ deber3 en algun tiempo finito estar acotado por alguna constante ϵ mayor que cero, es decir

$$\begin{aligned} |\xi(t, x_1, x_2, u)| &= |k_p x_{1d} - k_v (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d}| \\ &< k_p c_1 + \epsilon + c_3 = M, \end{aligned} \quad (20)$$

donde $\epsilon > 0$, para $t < \infty$.

Por lo tanto, si consideramos el sistema (19) y el observador (3) con (7) y

$$k_{r1} \geq M = k_p c_1 + \epsilon + c_3, \quad (21)$$

de acuerdo con el Teorema, obtendremos x_2 en \hat{x}_1 en tiempo finito.

La figura 1 muestra resultados numéricos con $k_p = 1, k_v = 0,5, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, x_{1d} = 1,5\sin(t), c_1 = c_2 = c_3 = 1,7, \epsilon = 0,6$, y $k_{r1} = 4, k_{r2} = 1, k_{r3} = 25$. Las condiciones iniciales fueron $x_1(0) = 2, x_2(0) = \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = x(0) = w(0) = 0$.

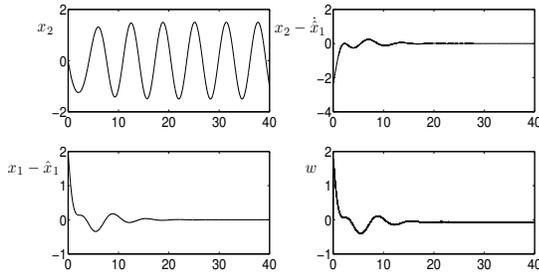


Figura 1.

II-B. Ejemplo 2

Considere el oscilador mecánico con fricción seca

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_p x_1 - k_c \operatorname{sgn}(x_2) + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (22)$$

donde k_p, k_c son constantes positivas, u es la entrada de control y

$$\operatorname{sgn}(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{para } x_2 > 0, \\ \gamma, & \text{para } x_2 = 0, \\ -1, & \text{para } x_2 < 0, \end{cases} \quad (23)$$

con $\gamma \in [-1, 1]$, describe el comportamiento de la fricción seca en el sistema.

El objetivo de control es que la posición x_1 siga una trayectoria x_{1d} , tal que $|x_{1d}| < c_1 < \infty, |\dot{x}_{1d}| < c_2 < \infty, |\ddot{x}_{1d}| < c_3 < \infty$, con c_1, c_2, c_3 constantes.

Una ley de control, que cumple este objetivo es

$$u = k_p x_{1d} - k_{s1} \varphi(x_1 - x_{1d}) - k_{s2} \varphi(x_2 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d}$$

con $k_{s2} > k_c$ y $k_{s1} > k_{s2} + k_c$. Sin embargo, puesto que en (22) solo tenemos acceso a la posición, proponemos

$$u = k_p x_{1d} - k_{s1} \varphi(x_1 - x_{1d}) - k_{s2} \varphi(\hat{x}_1 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d} \quad (24)$$

con (3).

Así, para (22),(24),(3), definimos $f(x_1) = -k_p x_1$ y

$$\begin{aligned} \xi(t, x_1, x_2, u) &= k_p x_{1d} - k_c \operatorname{sgn}(x_2) - k_{s1} \varphi(x_1 - x_{1d}) \\ &\quad - k_{s2} \varphi(\hat{x}_1 - \dot{x}_{1d}) + \ddot{x}_{1d}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que

$$|\xi(t, x_1, x_2, u)| < k_p c_1 + k_c + k_{s1} + k_{s2} + c_3 = M, \quad (25)$$

si consideramos el sistema (22),(24),(3) con (7) y

$$k_{r1} \geq M = k_p c_1 + k_c + k_{s1} + k_{s2} + c_3, \quad (26)$$

de acuerdo con el Teorema, obtendremos x_2 en \hat{x}_1 en tiempo finito y el objetivo de control de seguimiento de trayectoria se cumple.

La figura 2 muestra resultados numéricos con $k_p = 1, k_c = 0,5, k_{s2} = 0,7, k_{s1} = 1,5, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, x_{1d} = 1,5\sin(t), c_1 = c_2 = c_3 = 1,7$, y $k_{r1} = 7, k_{r2} = 1, k_{r3} = 45$. Las condiciones iniciales fueron $x_1(0) = 2, x_2(0) = \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = x(0) = w(0) = 0$.

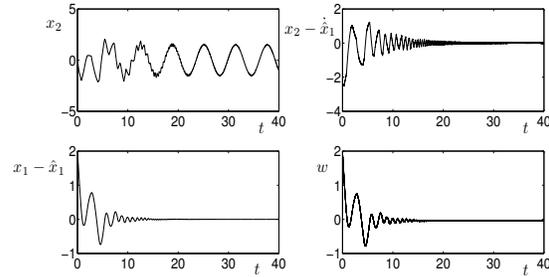


Figura 2.

III. CONCLUSIONES

Se propuso un observador de velocidad híbrido para una clase de sistemas mecánicos con convergencia en tiempo finito, evitando con esto un análisis completo de lazo cerrado si se utiliza en una ley de control. El observador utiliza la función discontinua (híbrida (Martinez et al., 2008), (Orlov, 2009)) φ que está definida para todo \dot{x} , a diferencia de las funciones $\rho(\dot{x})$ y $\operatorname{sgn}(x_2)$ que describen el gradiente generalizado (Clarke et al., 1998) y el comportamiento de la fricción seca en el sistema, respectivamente. Esta naturaleza híbrida hace posible la convergencia en tiempo finito y lo robusto frente a incertidumbres discontinuas acotadas en el sistema.

El análisis presentado, el cual utiliza la definición más general de la integral de Lebesgue (Kolmogorov y Fomin, 1975), hace posible obtener un método sencillo (desigualdad (7)) para calcular los parámetros del observador.

IV. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue parcialmente apoyado por el Conacyt, bajo el proyecto CB-2010/157784.

REFERENCIAS

- Clarke, F. H., Y. S. Ledyae, R. J. Stern y P. R. Wolenski (1998). *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Springer.
- Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1785-1789.
- Ferrara, A. y M. Rubagotti (2009). A Sub-Optimal Second Order Sliding Mode Controller for Systems with Saturating Actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**, 1082-1087.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- Fraguela Cuesta, L. Fridman y V. V. Alexandrov (2011). *Position Stabilization of a Stewart platform: High-order sliding mode observers-based approach*. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). 5971-5976.
- Kolmogorov, A. N. y S. V. Fomin (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial Mir. Moscú.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* **34**(3), 379-384.
- Martinez, R., J. Alvarez y Y. Orlov (2008). Hybrid Sliding-Mode-Based Control of Underactuated System with Dry Friction. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **55**, 3998-4003.
- Orlov, Y. V. (2009). *Discontinuous Systems*. Springer. London.
- Van, M., H-J. Kang y Y-S. Suh (2012). A robust fault diagnosis for robot manipulators using third order sliding mode observer. *Journal of Institute of control, robotics and systems* **18**, 665-669.
- Xian, B., M. S. de Queiroz, D. M. Dawson y M. L. McIntyre (2004). A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems. *Automatica* **40**, 695-700.