

Control adaptable basado en Inmersión e Invarianza (I&I) de una clase de sistemas lineales de segundo orden con parámetros desconocidos

Carlos Aguilar-Ibáñez^a, Eloísa García-Canseco^b, y Miguel S. Suárez-Castañón^c

^aCentro de Investigación en Computación – IPN, Av. Juan de Dios Bátiz s/n, U.P.A.L.M., Col. San Pedro Zacatenco, A.P. 75476, México, D.F. 07738, Tel.: +(52-5) 57296000 ext. 56568, e-mail: caaguilar@cic.ipn.mx

^bUniversidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias, Km. 103 Carretera Tijuana-Ensenada, 22860 Ensenada, México, Tel.: +52 (646) 1744560 ext. 125 e-mail: eloisa.garcia@uabc.edu.mx

^cEscuela Superior de Cómputo – IPN, Av. Miguel Othón de Mendizábal s/n. Col. La Escalera. Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738. México, D. F. , Tel.: +(52-5) 5729-6000 ext. 52043 email: sasuares@prodigy.net.mx

Resumen—En este trabajo se presenta una solución al problema de estabilización con retroalimentación de salida de un sistema lineal de segundo orden con parámetros desconocidos y en donde además, solamente se conocen la variable de estado que corresponde a la posición y el signo del coeficiente de la señal de control. El esquema de control está basado en un observador de orden reducido, utilizado en conjunto con el enfoque de Inmersión e Invarianza. El observador es utilizado para estimar el estado no disponible para retroalimentación (la velocidad) y para construir un sistema virtual incierto de segundo orden, cuyos estados se asume están disponibles para realizar la retroalimentación de estado completa. El sistema virtual se estabiliza utilizando la metodología de Inmersión e Invarianza.

Palabras clave: control adaptable, inmersión e invarianza, sistema incierto, sistema lineal.

I. INTRODUCCIÓN

El control adaptable para una clase de sistemas lineales con parámetros desconocidos en donde todas las variables de estado están disponibles para la retroalimentación, puede resolverse utilizando diferentes métodos de control estándar (Krstic *et al.*, 1995) tales como los que están basados en funciones de Lyapunov. También los métodos basados en el concepto de platitud (H. Sira-Ramirez y S. K. Agrawal, 2004; Sira-Ramirez, 1993; Moctezuma y Sánchez, 2011; Moctezuma y Sánchez, 2011) y redes neuronales (Yu y Poznyak, 1999; Yu y de Jesús Rubio, 2009; de Jesús Rubio y Yu, 2007a; de Jesús Rubio y Yu, 2007b) han sido ampliamente utilizados. Sin embargo, resolver el problema de control cuando solamente uno de los estados del sistema está disponible para retroalimentación, es una tarea complicada.

En este trabajo presentamos una solución al problema de estabilización con retroalimentación de salida para una

clase de sistemas lineales de segundo orden con parámetros desconocidos, en donde solamente se conoce el signo del coeficiente de la señal de control y la única variable de estado disponible para retroalimentación es la posición. A pesar de que este problema se presenta frecuentemente en sistemas de segundo orden, en donde la fuerza de amortiguamiento (la cual depende de la velocidad, usualmente no disponible) está presente pero es desconocida; hasta donde tenemos conocimiento, este problema solamente había sido resuelto por (Sane *et al.*, 2000).

La metodología empleada en este trabajo está basada en el diseño de un observador de orden reducido utilizado en conjunción con el enfoque de Inmersión e Invarianza (Astolfi y Ortega, 2003; Ortega *et al.*, 2003) (I&I). En primer lugar se utiliza un observador de orden reducido para estimar el estado no disponible para retroalimentación y para construir un sistema virtual que replique la estructura del sistema original. En segundo lugar, utilizando las herramientas de I&I se construye una variedad atractiva e invariante de tal forma que el sistema original en lazo cerrado se comporta como un sistema asintóticamente estable.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En la Sección II se define el problema de control. La estrategia de control se presenta en la Sección III. Los resultados de simulación se presentan en la Sección IV. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección V.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos el siguiente sistema lineal de segundo orden con parámetros desconocidos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3 + bu;\end{aligned}\tag{1}$$

donde x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$ son las variables de estado del sistema, u es la señal de entrada (control); a_i , con $i = \{1, 2, 3\}$ y $b > 0$ son constantes desconocidas. Supongamos ahora que únicamente $z = x_1$ está disponible para retroalimentación de estado, y que además

A1 La salida $z(t) = x_1(t)$ se puede medir para todo $t > 0$, con $b > 0$,

entonces, el problema de control consiste en encontrar una señal $u(x_1, \hat{x}_2, \hat{a}, \hat{b})$ capaz de llevar las trayectorias del sistema x a un punto de equilibrio deseado. Las variables \hat{x}_2 , \hat{a} y \hat{b} son estimaciones de x_2 , $a = (a_1, a_2, a_3)$ y b , respectivamente.

Resumiendo, el problema de control se describe de la siguiente forma:

Descripción del problema: Considere el sistema lineal con parámetros desconocidos (1), bajo la suposición A1. Entonces, el objetivo de control consiste en llevar los estados del sistema a la posición deseada $\bar{x} = (x_1 = \bar{x}_1, x_2 = 0)$.

Comentario 1: Aún cuando este problema de control puede parecer a primera vista sencillo y fácil de resolver, diseñar la ley de control $u(x_1, \hat{x}_2, \hat{a}, \hat{b})$ es un problema complejo. Hasta donde los autores tienen conocimiento, este problema solamente ha sido resuelto por (Sane *et al.*, 2000), combinando un observador de primer orden con otro de segundo orden, y aplicando después una versión modificada del control adaptable basado en Lyapunov. En este trabajo se utiliza la metodología de Inmersión e Invarianza (I&I) (Astolfi y Ortega, 2003; Astolfi *et al.*, 2008) junto con un observador de orden reducido.

Finalizamos esta sección haciendo notar que el sistema (1) puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a^T H(x, t) + bu; \end{aligned} \quad (2)$$

donde $a^T = (a_1, a_2, a_3)$ y $H(x) = [x_1, x_2, 1]^T$.

III. ESTRATEGIA DE CONTROL

En esta sección proponemos un filtro de orden reducido con el fin de estimar asintóticamente el estado no disponible x_2 , y poder así modificar utilizando retroalimentación de estado, las trayectorias de un sistema virtual. Es importante mencionar que la estructura del sistema virtual tiene que replicar la del sistema original, aunque en el sistema virtual todas las variables de estado están disponibles para retroalimentación, facilitando así el diseño del controlador I&I (Astolfi y Ortega, 2003; Astolfi *et al.*, 2008).

A. Observador de orden reducido:

Consideremos el siguiente filtro:

$$\dot{y}_1 = -\lambda y_1 + x_2 = y_2, \quad (3)$$

donde $\lambda > 0$. Tomando la variable auxiliar s como:

$$s = \dot{y}_2 + a^T H(y) - bv; \quad (4)$$

donde v es un controlador virtual que actúa sobre el sistema (4) y $y = (y_1, y_2)^T$. Nótese que s replica la ecuación (2). De (3) y (4) tenemos que la derivada con respecto al tiempo de s está dada por:

$$\dot{s} = -\lambda(\dot{y}_2 + a^T H(y)) + (\dot{x}_2 + a^T H(x)) - b\dot{v}. \quad (5)$$

Asignando ahora la siguiente dinámica al controlador v tenemos:

$$\dot{v} = -\lambda v + u, \quad (6)$$

resultando en que la ecuación (5) es transformada en:

$$\dot{s} = -\lambda(\dot{y}_2 + a^T H(y) - bv) + (\dot{x}_2 + a^T H(x) - bu) = -\lambda s.$$

La ecuación anterior implica $s = s(0)e^{-\lambda t}$. Por lo tanto, de la definición de s , la dinámica de y puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= -a^T H(y) + bv + s; \end{aligned} \quad (7)$$

en donde $y \in \mathbb{R}^2$ es la variable de estado, disponible para retroalimentación completa. En lo sucesivo nos referiremos al sistema (7) como el sistema virtual de parámetros desconocidos.

Terminamos esta sección con el siguiente lema, el cual servirá para analizar la estabilidad del sistema original (2).

Lema 1: Considere el sistema lineal de parámetros inciertos (2) junto con (7). Si $y = (y_1, y_2)^T$ convergen asintóticamente a $\bar{y} = (\bar{x}_1, 0)^T$, entonces, x converge a \bar{x} .

Demostración: Para simplificar la demostración fijamos $\bar{x}_1 = 0$. Si $y = (y_1, y_2)^T \rightarrow (0, 0)^T$ y $v \rightarrow 0$, entonces, de (3), tenemos que x_1 , \dot{x}_1 y \ddot{x}_1 convergen a cero y, de la ecuación (6), concluimos que $u \rightarrow 0$. ■

Comentario 2: Del resultado anterior podemos mencionar que resolver el problema de control adaptable del sistema (7) es más sencillo que resolver el problema de control del sistema original (2), debido a que en el sistema virtual se puede realizar una retroalimentación completa del estado y .

B. Control con inmersión e invarianza (I&I)

Aplicando la metodología de control adaptable I&I para el sistema virtual (7) (Astolfi y Ortega, 2003; Astolfi *et al.*, 2008), tenemos que cuando a y $k = 1/b \neq 0$ son conocidos, el sistema (7) se estabiliza en la posición deseada \bar{y} utilizando la siguiente ley de control:

$$v(y, p) = -k(-a^T H(y) + r(y)); \quad (8)$$

con $r(y) = k_p(y - \bar{y}) + k_d \dot{y}$, en donde $k_p > 0$ y $k_d > 0$. Es decir, puede demostrarse que el sistema en lazo cerrado (7) y (8), esto es:

$$\dot{y} = Ay = \begin{bmatrix} y_2 \\ -r(y) \end{bmatrix},$$

es globalmente y exponencialmente estable en $y = \bar{y}$. Consideremos la siguiente suposición:

A2 Existe $P > 0$ tal que $PA + A^T P = -I$.

Definición 1: Suponemos que A2 se cumple, decimos entonces que el sistema (7) puede ser estabilizado a través de I&I, si existe $\alpha(y, \hat{p}) \in \mathbb{R}^3$, $\kappa(y, \hat{p}) \in \mathbb{R}$, y $w_a(y, \hat{p}) \in \mathbb{R}^3$ y $w_k(y, \hat{p}) \in \mathbb{R}$ en donde $\hat{p} = (\hat{a}^T, \hat{k}) \in \mathbb{R}^4$, tal que todas las trayectorias del siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= -a^T H(y) - \frac{1}{k} v(y, \hat{k} + \kappa(y, \hat{p}), \hat{a} + \alpha(y, \hat{p})); \\ \dot{\hat{a}} &= w_a(y, \hat{p}); \\ \dot{\hat{k}} &= w_k(y, \hat{p}); \end{aligned} \quad (9)$$

están acotadas y satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(v(y, \hat{k} + \kappa(y, \hat{p}), \hat{a} + \alpha(y, \hat{p})) - v(y, p) \right) = 0. \quad (10)$$

Comentario 3: Nótese que la condición (10) se debe satisfacer para todas las trayectorias del sistema que pertenecen a la variedad:

$$M = \{ \hat{a} \in \mathbb{R}^3 : \hat{a} - a + \alpha(y, \hat{p}) = 0 \} \cup \{ \hat{k} \in \mathbb{R} : \hat{k} - k + \kappa(y, \hat{p}) = 0 \}. \quad (11)$$

Además, de la Definición 1 y la suposición A1, podemos asegurar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_*.$$

Comentario 4: Se puede demostrar que el controlador adaptable tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v &= v(y, \hat{k} + \kappa(y, \hat{p}), \hat{a} + \alpha(y, \hat{p})); \\ \dot{\hat{a}} &= w_a(y, \hat{p}); \\ \dot{\hat{k}} &= w_k(y, \hat{p}). \end{aligned} \quad (12)$$

La dificultad mayor del enfoque I&I consiste en moldear las funciones $\alpha(\cdot)$, $\kappa(\cdot)$, $w_a(\cdot)$ y $w_k(\cdot)$, de tal forma que la variedad M sea invariante y asintóticamente atractiva. En otras palabras, el sistema extendido (9) debe converger asintóticamente a la variedad invariante M . Una consecuencia de este hecho es que el sistema extendido replica correctamente el sistema deseado.

En las secciones siguen a continuación utilizaremos la siguiente simbología:

$$\begin{aligned} p^T &= [a^T, k]; & \hat{p}^T &= [\hat{a}^T, \hat{k}]; \\ \rho^T(y, \hat{p}) &= [\alpha^T(y, \hat{p}), \kappa(y, \hat{p})], \end{aligned}$$

con $p, \hat{p}, \rho \in \mathbb{R}^4$, y para la función $\rho(y, \hat{p}) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definimos:

$$\begin{aligned} \nabla_i \rho(y, \hat{p}) &= \begin{bmatrix} \nabla_i \alpha(y, \hat{p}) \\ \nabla_i \kappa(y, \hat{p}) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \\ \nabla_{\hat{p}} \rho(y, \hat{p}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \alpha(y, \hat{p}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \kappa(y, \hat{p}) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}, \end{aligned}$$

con $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$; para $i = \{1, 2\}$.

C. Control adaptable

Para obtener una v que satisfaga las condiciones (10) y (11), proponemos

$$v = (\hat{k} + \kappa(y, \hat{p})) \left(-r(y) + (\hat{a} + \alpha(y, \hat{p}))^T H(y) \right); \quad (13)$$

en donde el conjunto de variables $S = \{\hat{k}, \kappa(\cdot), \hat{a}, \alpha(\cdot)\}$, se selecciona de tal forma que la variedad M sea invariante y atractiva para cualquier condición inicial. Este objetivo se logra utilizando lo que se conoce como coordenada exterior de la variedad, definida por

$$z = \begin{bmatrix} z_a \\ z_k \end{bmatrix} = \hat{p} - p + \rho(y, \hat{p}); \quad (14)$$

Antes de proceder al cálculo de la dinámica de z es importante expresar los valores de \dot{y}_2 en términos de z . Con este fin sustituimos los valores de v , definidos en (13), en la segunda ecuación de (9), lo cual da como resultado

$$\dot{y}_2 = -a^T H(y) + \frac{(\hat{k} + \kappa(y, \hat{p}))}{k} \Delta(y, \hat{p}), \quad (15)$$

donde

$$\Delta(y, \hat{p}) = -r(y) + (\hat{a} + \alpha(y, \hat{p}))^T H(y) \quad (16)$$

Utilizando la definición de las variables z_a y z_k (14), podemos transformar el sistema (15) en

$$\dot{y}_2 = -r(y) + \Phi^T(y, \hat{p})z; \quad (17)$$

donde:

$$\Phi^T(y, \hat{p}) = \begin{bmatrix} H^T(y) & \frac{1}{k} \Delta(y, \hat{p}) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Procedemos ahora a obtener la dinámica de z . De la ecuación (14) tenemos que

$$\dot{z} = \dot{\hat{p}} + \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \rho(y, \hat{p}) \dot{\hat{p}} + y_2 \nabla_1 \rho(y, \hat{p}) + \dot{y}_2 \nabla_2 \rho(y, \hat{p}). \quad (19)$$

Sustituyendo (17) en (19) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I + \nabla_{\hat{p}} \rho(\cdot)) \dot{\hat{p}} + y_2 \nabla_1 \rho(y, \hat{p}) \\ &\quad + \nabla_2 \rho(y, \hat{p}) (-r(y) + \Phi^T(y, \hat{p})z). \end{aligned} \quad (20)$$

Luego entonces, seleccionando la dinámica de $\dot{\hat{p}}$ como

$$\dot{\hat{p}} = (I + \nabla_{\hat{p}} \rho(\cdot))^{-1} (-y_2 \nabla_1 \rho(y, \hat{p}) + r(y) \nabla_2 \rho(y, \hat{p})), \quad (21)$$

la ecuación (20) puede escribirse como:

$$\dot{z} = \nabla_2 \rho(y, \hat{p}) \Phi^T(y, \hat{p})z; \quad (22)$$

en donde z describe la dinámica del sistema extendido afuera de la variedad M . Para asegurar la convergencia de z , consideremos la función $V = z^T D z$; en donde $D = \text{diag}\{1, 1, 1, 1/k\} > 0$, ya que $k > 0$. Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de V a lo largo de las trayectorias del sistema (22), está dada por:

$$\dot{V} = z^T D \dot{z} = z^T \begin{bmatrix} \nabla_2 \alpha(y, \hat{p}) \\ \frac{1}{k} \nabla_2 \kappa(y, \hat{p}) \end{bmatrix} \Phi^T(y, \hat{p})z = z^T M(y, \hat{p})z. \quad (23)$$

Es importante resaltar que $\dot{V} \leq 0$ si $\kappa(y, \hat{p})$ y $\alpha(y, \hat{p})$ se seleccionan de tal forma que:

$$M_s(\cdot) = M(y, \hat{p}) + M^T(y, \hat{p}) \leq 0. \quad (24)$$

El siguiente lema da las condiciones suficientes para asegurar que $M_s(\cdot) \leq 0$.

Lema 2: La matriz (24) es semidefinida negativa si α y κ se seleccionan como

$$\begin{aligned} \alpha(y) &= -\gamma_a \int_0^{y_2} H(y_1, s) ds; \\ \kappa(y, \hat{a}) &= \gamma_k \int_0^{y_2} (-H^T(y_1, s)(\hat{a} + \alpha(y_1, s)) + r(y_1, s)) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

donde γ_a y γ_k son estrictamente positivas.

Una consecuencia del Lema 2 es que la matriz $\nabla_{\hat{p}}\rho(\cdot) = \{\delta_{ij}\}$; donde $\delta_{ij} = 0$, excepto para:

$$\delta_{41} = -y_1 y_2; \quad \delta_{42} = -y_2^2/2; \quad \delta_{43} = -y_2,$$

lo cual garantiza que la matriz $I + \nabla_{\hat{p}}\rho(\cdot)$ es no singular.

D. Análisis de convergencia

Nótese que cuando $\alpha(y)$ y $\kappa(y, \hat{a})$ se eligen de acuerdo al Lema 2, obtenemos

$$\dot{V}_z = z^T D \dot{z} = -z^T \Phi(y, \hat{p}) \Phi^T(y, \hat{p}) z = -\varpi^2(\cdot),$$

garantizando que $z \in L_\infty$ y $\varpi(\cdot)^2 \in L_2$. De la ecuación (17) obtenemos que el siguiente sistema

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -r(y) + \varpi(\cdot) \end{bmatrix} = Ay + B\varpi(\cdot), \quad (26)$$

es asintóticamente estable, con la perturbación $\varpi(\cdot) \in$

\mathcal{L}_2 . Para demostrar la convergencia de y construimos la siguiente función de Lyapunov

$$V_T = \frac{1}{2} y^T P y + \frac{\varepsilon}{2} z^T z,$$

donde $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de V_T alrededor de (26), da como resultado:

$$\dot{V}_T = -\frac{1}{2} \|y\|^2 + y^T P B \varpi - \varepsilon \varpi^2;$$

la cual es acotada por arriba por

$$\dot{V}_T \leq -\frac{1}{2} \|y\|^2 \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{1}{2} \varpi^2 (1 - \varepsilon \alpha);$$

con $\beta = \|PB\|$ y $\alpha > 0$. Es claro que si seleccionamos $\alpha > \beta$ y $\varepsilon < 1/\alpha$, siempre podemos garantizar que $\dot{V}_T \leq 0$. Esto implica que $y \rightarrow 0$ y $\varpi \rightarrow 0$, siempre que $t \rightarrow \infty$; lo cual puede ser demostrado utilizando el Teorema de LaSalle. Hemos demostrado entonces que el sistema formado por las ecuaciones (17) y (19) tiene un punto de equilibrio globalmente estable en $(\bar{y}, z = 0)$.

Resumiendo los resultados de esta sección, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1: Considere el sistema con parámetros inciertos (7) en lazo cerrado con el controlador adaptable (13) y (21), bajo la suposición A2. Entonces, (\bar{y}, p) es un

punto de equilibrio globalmente estable del sistema en lazo cerrado.

Comentario 5: En el análisis de estabilidad, la señal s del sistema (7) es descartada debido a que $s(t)$ converge asintóticamente a cero. Además, es posible demostrar que \dot{y}_2 puede ser recuperada a partir de la ecuación (26), esto es, utilizando

$$\dot{\hat{y}}_2 = -r(y)$$

tenemos que $\dot{y}_2 - \dot{\hat{y}}_2 \rightarrow 0$, siempre que $t \rightarrow \infty$.

La Proposición 1 indica cómo calcular el controlador virtual para el sistema (7), el cual a su vez replica el comportamiento del sistema original (2). Sin embargo, el controlador que actúa sobre el sistema (2) está dado en realidad por la ecuación (6). De hecho, la diferencia entre el sistema original y el sistema virtual no es más que la señal que converge exponencialmente a cero.

Terminamos esta sección resumiendo el resultado principal de este trabajo con la siguiente proposición:

Proposición 2: Si las condiciones del Lema 1 se cumplen, el problema de estabilización con retroalimentación de salida del sistema (1) se resuelve con la siguiente ley de control:

$$u = v(y, \hat{p}) + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial \hat{p}} \dot{\hat{p}} \right); \quad (27)$$

donde v y \hat{p} están definidas en (13) y (21), respectivamente y $\dot{y} = [\lambda y_1 + x, -r(y)]^T$.

De hecho $v(y, \hat{p})$ y \hat{p} se obtienen respectivamente de las ecuaciones (13) y (21).

Comentario 6: La ecuación (27) es equivalente a:

$$u = v(y, \hat{p}) + \lambda \dot{v}(y, \hat{p}). \quad (28)$$

Para simplificar los cálculos del segundo término de la ecuación (28), se puede utilizar un filtro de orden reducido de la forma

$$\dot{\hat{v}} = \frac{1}{\varepsilon} (v - \hat{v}),$$

con ε suficientemente pequeño, o un observador basado en modos deslizantes.

IV. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Con el fin de validar la efectividad del controlador propuesto, se simuló el siguiente sistema inestable de segundo orden,

$$\ddot{x} = 0.5\dot{x} + x + u,$$

con el objetivo de llevar el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado al punto de equilibrio deseado $\bar{x} = 0$. Los parámetros del controlador adaptable se seleccionaron como $\gamma_a = 1$, $\gamma_k = 1$ y $\lambda = 50$; mientras que las condiciones iniciales fueron escogidas como $(x(0) = -0.5, \dot{x}(0) = 1.5)$. La parte de I&I del algoritmo fue inicializado en el origen. La respuesta en lazo cerrado del sistema completo se muestra en la Figura 1. En la Figura 2, se muestra cómo los parámetros estimados convergen a un valor constante y que

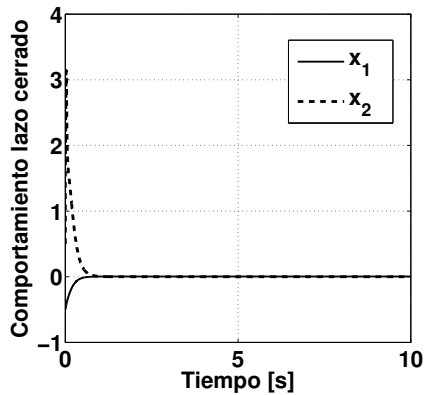


Figura 1. Respuesta en lazo cerrado del primer sistema

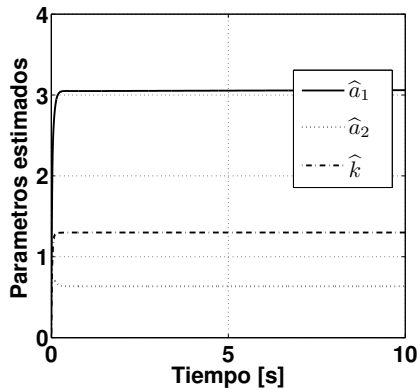


Figura 2. Parámetros estimados para el primer sistema

no corresponde al verdadero valor de los parámetros a_1 , a_2 y k . Se observa efectivamente que el controlador adaptable propuesto estabiliza el sistema incierto en los primeros dos segundos.

En las siguientes simulaciones numéricas, se hizo que la salida $y = x$ del sistema $\dot{x} = 0.5 + \hat{x} + x + 2u$, siguiera la señal discontinua por tramos $x_r = \text{sign}[\sin(t/10)]$. El sistema completo fue inicializado en el origen. El comportamiento de las variables de estado se muestran en las figures 3 y 4, respectivamente. Los parámetros estimados en esta simulación muestran variaciones abruptas debido principalmente a los cambios de signo presentes en la señal discontinua. Por esta razón dichos parámetros fueron omitidos.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo propusimos una solución nueva al problema de estabilización con retroalimentación de salida de una clase de sistemas lineales de segundo orden con parámetros desconocidos, en donde solamente se conocen la posición y el signo del coeficiente de la señal de entrada. El esquema de control propuesta utiliza un observador de

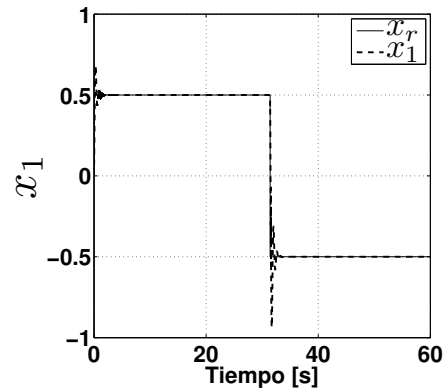


Figura 3. Estado x_1 , cuando la señal de referencia es una señal discontinua.

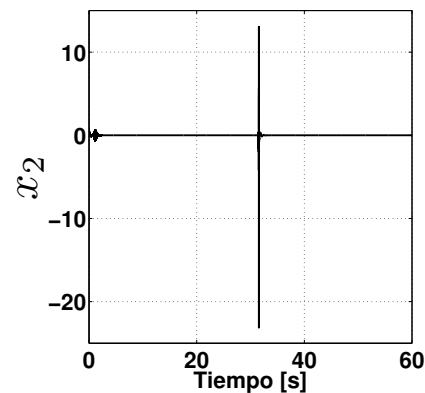


Figura 4. Estado x_2 , cuando la señal de referencia es una señal discontinua.

orden reducido en conjunción con la metodología I&I. El observador se utilizó para estimar la velocidad y simultáneamente construir un sistema virtual incierto, en el cual todas las variables de estado están disponibles para retroalimentación, y que además replica el comportamiento del sistema original. Es importante mencionar que controlar el sistema virtual es equivalente a controlar el sistema original. Para demostrar la efectividad del esquema de control se efectuaron simulaciones numéricas.

REFERENCIAS

- Astolfi, Alessandro, Dimitrios Karagiannis y Romeo Ortega (2008). *Non-linear and adaptive control with applications*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd.. London.
- Astolfi, Alessandro y Romeo Ortega (2003). Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **48**(4), 590–606.
- de Jesus Rubio, Jos y Wen Yu (2007a). Stability analysis of nonlinear system identification via delayed neural networks. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on* **54**(2), 161–165.
- de Jesús Rubio, José y Wen Yu (2007b). Nonlinear system identification with recurrent neural networks and dead-zone kalman filter algorithm. *Neurocomputing* **70**(13), 2460–2466.

- H. Sira-Ramirez y S. K. Agrawal (2004). *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker. New York.
- Krstic, Miroslav, Ioannis Kanellakopoulos, Petar V Kokotovic et al. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. Vol. 8. John Wiley & Sons New York.
- Moctezuma, Rubén Alejandro Garrido y Antonio Concha Sánchez (2011). Algebraic identification of a dc servomechanism using a least squares algorithm. En: *American Control Conference (ACC), 2011*. IEEE. pp. 102–106.
- Ortega, Romeo, Liu Hsu y Alessandro Astolfi (2003). Immersion and invariance adaptive control of linear multivariable systems. *Systems & control letters* **49**(1), 37–47.
- Sane, H. S., H. J. Sussmann y D. S. Bernstein (2000). Output feedback adaptive stabilization of second-order systems. En: *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*. pp. 3138–3142.
- Sira-Ramirez, Hebertt (1993). A dynamical variable structure control strategy in asymptotic output tracking problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **38**(4), 615–620.
- Yu, Wen y Alexander S Poznyak (1999). Indirect adaptive control via parallel dynamic neural networks. En: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*. Vol. 146. IET. pp. 25–30.
- Yu, Wen y José de Jesús Rubio (2009). Recurrent neural networks training with stable bounding ellipsoid algorithm. *Neural Networks, IEEE Transactions on* **20**(6), 983–991.

VI. APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2

Demostración: Con el fin de simplificar los cálculos se selecciona $\gamma_a = 1$ y $\gamma_k = 1$. De la definición de Φ , $H_s(\cdot)$ y $\Delta(\cdot)$, dada en (18), (24) y (16), tenemos que:

$$M_s(\cdot) = \begin{bmatrix} 2\nabla_2\alpha(y, \hat{p})H^T(y) & J(\cdot) \\ J^T(\cdot) & \frac{2}{k^2}\nabla_2\kappa(y, \hat{k})\Delta(y, \hat{p}) \end{bmatrix}; \quad (29)$$

donde:

$$J(\cdot) = \frac{1}{k}\nabla_2\alpha(y)\Delta(y, \hat{p}) + \frac{1}{k}\nabla_2\kappa(y, \hat{k})H(y).$$

Nótese que $\alpha \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $\kappa(y, \hat{k}) \in \mathbb{R}$ y $J \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Para garantizar que $M_s(\cdot) \leq 0$, es suficiente con probar que

$$\nabla_2\alpha(y, \hat{p})H^T(y) \leq 0; \quad \nabla_2\kappa(y, \hat{p})\Delta(y, \hat{p}) \leq 0. \quad (30)$$

La desigualdad en el lado izquierdo de (30) se garantiza si $\nabla_2\alpha(y, \hat{p}) = -H(y)$; lo cual implica que el parámetro $\alpha(y)$ no depende en el vector, \hat{p} ; *i.e.* $\alpha(y, \hat{p}) = [y_1 y_2, y_2^2/2, y_2]^T$. Similarmente podemos probar que κ depende directamente del parámetro \hat{a} debido a que κ se selecciona de acuerdo a $\nabla_2\kappa(y, \hat{a}) = \Delta(y, \hat{p})$, lo cual garantiza la desigualdad en el lado derecho de (30). Por lo tanto, después de sustituir los valores de $\nabla_2\alpha$ y $\nabla_2\kappa$, en la matriz (29), es sencillo verificar que $M_s(\cdot) \leq 0$. ■