

Control predictivo conmutado robusto de frenado en vehículos de 4 ruedas

Martín R. Licea, I. Cervantes

Laboratorio de Sistemas Híbridos, División de Matemáticas Aplicadas, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), Camino a la Presa San José 2055, Col. Lomas 4ta Sección C.P. 78216 San Luis Potosí, S.L.P., México
<http://www.ipicyt.edu.mx>

Resumen—Este artículo tiene como objetivo proponer una estrategia de detección y control predictiva de volcadura en vehículos de pasajeros. La estrategia hace uso de una descripción lineal por pedazos del vehículo incluyendo la dinámica de traslación y de rotación, así como incertidumbre paramétrica y los efectos dinámicos de la suspensión. Se propone una estrategia de control híbrida para mitigar la volcadura, basada en el modelo del vehículo, en un horizonte temporal de predicción y una estimación de predicción de la dirección. Además se dan condiciones bajo las cuáles no habrá riesgo de volcadura para todo tiempo. Una característica de la estrategia propuesta es su simplicidad. Las simulaciones numéricas nos permiten corroborar los resultados del análisis teórico de la estrategia de control propuesta.

Palabras clave—Detección de volcadura, control híbrido, predicción de volcadura.

I. INTRODUCCION

La volcadura de vehículos comerciales, (rollover) ya sean automóviles, camionetas de carga, camionetas utilitarias, camiones o tráileres, es un problema muy serio en el área de transporte, ya que la volcadura de vehículos causa un número considerablemente mayor de heridas serias e incluso fatales en comparación con otros tipos de accidentes [1]. Hoy en día, a pesar de repetidos esfuerzos por regular las especificaciones vehiculares, existen en el mercado vehículos nuevos con una alta probabilidad de volcadura. Por ejemplo en [1] se presentan resultados de valoración de riesgo de volcadura a vehículos utilitarios modelo 2013 de únicamente 3 de 5 estrellas. Dicha valoración se obtiene de pruebas experimentales en una pista bajo condiciones controladas, ver [1] para mayor información. Numerosos estudios se han desarrollado en la última década para afrontar el problema (vea [2], [3], [4] entre otros). Entre esos esfuerzos, se puede destacar los dedicados a la predicción de volcadura, y a la mitigación de volcadura por medio de control activo.

La NAFTA (North American Free Trade Agreement) define el radio de transferencia de carga (Load Transfer Ratio LTR) o índice de volcadura (Rollover Index RI) como un índice que caracteriza que tan cerca se encuentra un vehículo de volcarse. El RI o LTR puede ser interpretado como una medida del desequilibrio entre las fuerzas verticales de contacto de las llantas con el suelo como se puede ver en su definición matemática [5]:

$$RI = LTR = \frac{\sum F_{ZL} - \sum F_{ZR}}{\sum F_{ZL} + \sum F_{ZR}} \quad (1)$$

Donde F_{ZL} es la suma de las fuerzas verticales en los puntos de contacto suelo-llanta izquierdos y F_{ZR} es la suma de

las fuerzas verticales en los puntos de contacto suelo-llanta derechos.

Valores de $|RI|$ por debajo de $RI_{ref} = 0.6$ son considerados como seguros. Sin embargo la estimación de este valor depende de manera crucial de las fuerzas verticales en los puntos de contacto, que a su vez dependen del tipo de terreno, de características de las llantas, entre otros factores, por lo que su estimación es relativamente compleja de obtener.

Debido a limitaciones humanas y técnicas, una alarma de tiempo para volcadura como en [8] no es suficiente para mitigar la volcadura por lo tanto es necesario establecer políticas de control activo, donde usualmente se involucra frenado diferencial, dirección eléctrica, suspensión activa entre otros. En [2] se propone un algoritmo de control que está constituido por i) un control supervisor, ii) un controlador de tracción de nivel inferior y iii) un controlador de nivel superior que determina el par de dos motores eléctricos que proveen la fuerza de tracción del vehículo. Se utiliza una estrategia de asignación de control basada en optimización para mapear el control de nivel superior e inferior a los comandos de los actuadores. Aunque muestra en simulaciones que el controlador es efectivo, tal estrategia hace uso de suspensión activa la cual no siempre está disponible. En [3], se propone un controlador predictivo el cuál asume que la dirección de las llantas puede preverse de un sistema de posicionamiento global (Global Positioning System, GPS) y que existe un sistema de direccionamiento automático anti colisión de las ruedas. Los autores proponen un controlador lineal cuadrático dependiente de la salida (Linear Quadratic Regulator, LQR) para obtener un comportamiento deseado del conductor. En [4], se establece una analogía con el problema de estabilización del péndulo móvil, y es usada para derivar un control de linealización parcial bajo una técnica llamada "energy shaping". Los autores utilizan simulaciones numéricas para mostrar el efecto de la fricción y propiedades de la suspensión en el efecto de levantamiento de las ruedas, sin embargo la distribución de las fuerzas de frenado no queda clara. En [15] se presenta una estrategia de control robusta ante incertidumbre paramétrica calculada para un modelo lineal, sin embargo no describe como permitir una conducción normal del vehículo sin acción de control a todo instante.

En este trabajo se utiliza una estrategia de predicción de la dirección de las ruedas a lo largo de la predicción de la respuesta del vehículo, para luego proponer un controlador híbrido basado en evento para mitigar el riesgo de volcadura.

Tabla I
NOMENCLATURA

α_v	Ángulos de deriva lateral de la llantas delanteras
α_h	Ángulos de deriva lateral de la llantas traseras
β	Ángulo de deriva lateral del vehículo
δ	Ángulo de las ruedas delanteras
$\delta_{critico}$	Umbral de riesgo en el ángulo de las ruedas a lazo cerrado con controlador conmutado robusto
δ_f	Fin de carrera del ángulo de las ruedas
δ_r	Umbral de riesgo en el ángulo de las ruedas a lazo abierto
δ_s	Umbral de riesgo en el ángulo de las ruedas a lazo cerrado con controlador robusto
ψ	Ángulo de giro del vehículo
φ	Ángulo de alabeo
a_x, a_y	Aceleración longitudinal, lateral del vehículo
b	Ancho del chasis
c	Coefficiente de amortiguación
c_v, c_h	Coefficiente de rigidez llanta delantera, trasera
CoG	Centro de gravedad
F_{ZL}, F_{ZR}	Fuerzas verticales izquierdas, derechas
g	valor de la gravedad
h	Altura del centro de gravedad respecto al suelo
J_z	Momento de inercia respecto al eje vertical
J_x	Momento de inercia respecto al eje longitudinal
k	Coefficiente de rigidez del resorte de la suspensión
L_v, L_h	Distancia del CoG al eje frontal, trasero
L	Distancia entre ejes $L = L_v + L_h$
m	Masa del vehículo
RI	Índice de volcadura
S_v, S_h	Fuerza lateral en las ruedas delanteras, traseras
t_T	Instante en la predicción
t_c	Tiempo característico a lazo cerrado
t_{co}	Tiempo característico a lazo abierto
t_r	Tiempo mínimo de residencia en modo 2
T	Horizonte de predicción
u	Fuerza de frenado diferencial
u_{max}	Máxima fuerza de frenado diferencial
v_x	Velocidad longitudinal del vehículo
v_y	Velocidad lateral del vehículo
o_{In}	Desplazamiento del vehículo en la coordenada O_{In}
p_{In}	Desplazamiento del vehículo en la coordenada P_{In}
q_{In}	Desplazamiento del vehículo en la coordenada Q_{In}

El controlador está conformado por una retroalimentación de estado cuyo diseño considera incertidumbre paramétrica, y de un criterio de conmutación dependiente del estado futuro que determina si el control es aplicado o no. Para realizar la predicción de la respuesta dinámica del vehículo, se define un horizonte de predicción y una dinámica de bajo orden para emular el comportamiento del chofer acerca de la dirección de las ruedas. La estrategia propuesta tiene la característica de ser simple y fácil de implementar lo cual lo convierte en candidato para una aplicación en tiempo real. Además no hace uso de suspensión activa, sistemas de posicionamiento global o sistemas de dirección totalmente eléctrica.

Este documento está organizado de la siguiente manera, en la sección II se presenta el modelo del vehículo, en la sección III algunos preliminares, en la sección IV el diseño del controlador y el estudio de estabilidad, en el capítulo V simulaciones numéricas y en el capítulo VI conclusiones.

II. MODELO DEL VEHÍCULO

A. Dinámica traslacional

Para aproximar la dinámica de un vehículo de 4 ruedas con un grado de libertad adicional conocido en la literatura como alabeo (φ), se utiliza un modelo lineal de segundo orden tipo bicicleta pero considerando que el ángulo φ del CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

chasis (Figura 1) está sujeto a una suspensión idealizada como un solo resorte y un solo amortiguador (Figura 2). Se Utiliza una aproximación lineal de la fuerza lateral en el centro de la rueda como función del ángulo de deriva (deformación) en la llanta. Esta aproximación lineal es válida solo para ángulos pequeños de las ruedas delanteras $\delta(t)$ respecto a un eje longitudinal fijo en el chasis, en general el comportamiento de esta aproximación es no lineal e involucra diversas variables y parámetros [6]. Además se asume una dependencia débil entre la dinámica lateral y φ lo cual también es válido solo para ángulos $\delta(t)$ pequeños. Se utilizan estas aproximaciones porque nuestro interés radica en obtener información de la dinámica en condiciones normales de operación (en el sentido de que $\delta(t)$ sea pequeño) para poder predecir una condición de riesgo de volcadura y tomar una acción correctiva antes de que se presente.

Para la deducción de este modelo se asume que el movimiento del vehículo está siempre restringido al plano horizontal (suelo) a cierta velocidad, tal que efectos de levantamiento del centro de gravedad del vehículo CoG , así como el ángulo de cabeceo se consideran constantes. De manera análoga, los ángulos de deriva de las llantas y del vehículo se consideran pequeños. Además, las fuerzas aerodinámicas y disturbios en el camino se consideran despreciables (ver [12]). En la Figura 1 se puede ver la representación del modelo tipo bicicleta para la dinámica traslacional, así como una ilustración de la notación a utilizar. Las fuerzas laterales en la llanta delantera y trasera S_v, S_h son aproximadas como funciones lineales de los ángulos de deriva lateral [12], i.e. $S_v = c_v \alpha_v, S_h = c_h \alpha_h$, donde para ángulos pequeños:

$$\alpha_v = \delta - \beta - \frac{L_v \dot{\psi}}{v_x} \quad (2)$$

$$\alpha_h = -\beta + \frac{L_h \dot{\psi}}{v_x} \quad (3)$$

Note que como se asumen ángulos pequeños y velocidad longitudinal constante, se satisface:

$$\beta \approx \frac{v_y}{v_x}, \dot{\beta} \approx \frac{\dot{v}_y}{v_x} \quad (4)$$

Usando las relaciones anteriores y la segunda Ley de Newton, se obtiene la representación en espacio de estados siguiente para la dinámica traslacional [12]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{mv_x} & \frac{\rho}{mv_x^2} - 1 \\ \frac{\rho}{J_z} & -\frac{\kappa}{J_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_v}{mv_x} \\ \frac{c_v L_v}{J_z} \end{bmatrix} \delta \quad (5)$$

donde los parámetros auxiliares ρ, σ, κ se definen como:

$$\begin{aligned} \sigma &= c_v + c_h \\ \rho &= c_h L_h - c_v L_v \\ \kappa &= c_h L_h^2 + c_v L_v^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Note que se considera que h, L_v, L_h, J_z son constantes, esto se justifica porque variaciones de estos parámetros en vehículos pequeños y medianos de 4 ruedas son pequeñas por la limitada capacidad de carga.

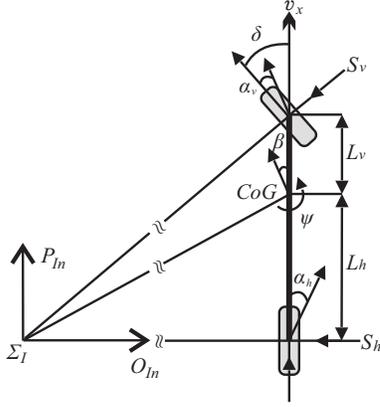


Fig. 1. Modelo tipo bicicleta.

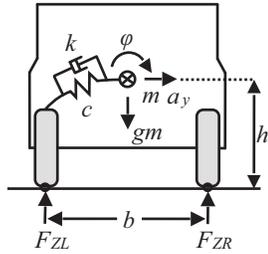


Fig. 2. Suspensión idealizada.

B. Dinámica rotacional

El modelo presentado a continuación, es una de las representaciones más simples que capturan la dinámica de alabeo y que incluyen el efecto de la suspensión. Se considera que la masa no amortiguada es despreciable, y realizando un balance de torques uno obtiene la siguiente relación (ver Figura 2):

$$J_{x_{eq}}\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = mh(a_y \cos(\varphi) + g \sin(\varphi)) \quad (7)$$

Donde por simplicidad se asume que la masa amortiguada gira alrededor de un eje fijo horizontal a lo largo del chasis y a nivel del suelo. En la ecuación (7) $J_{x_{eq}}$ denota el momento de alabeo equivalente derivado del teorema de Huygens-Steiner, tomando en cuenta a h como se describe a continuación:

$$J_{x_{eq}} = J_x + mh^2 \quad (8)$$

Considerando que el ángulo de alabeo es pequeño, $\cos(\varphi) \approx 1$, $\sin(\varphi) \approx \varphi$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k-mgh}{J_{x_{eq}}} & -\frac{c}{J_{x_{eq}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{mh}{J_{x_{eq}}} \end{bmatrix} a_y \quad (9)$$

C. Modelo completo

Suponga un sistema coordenado inercial $\Sigma_I = (O_{In}, P_{In}, Q_{In})$ con origen a nivel del suelo (ver Figura 1), fijo y lo suficientemente lejano para considerar el desplazamiento vertical del vehículo $q_{In} \approx 0$, i.e. el vehículo se traslada solo en las coordenadas (o_{In}, p_{In}) el modelo traslacional del vehículo se puede aproximar como:

$$\begin{bmatrix} \dot{o}_{In} \\ \dot{p}_{In} \end{bmatrix} = v_x \begin{bmatrix} \cos(\beta + \psi) \\ \sin(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Derivando y transformando a un sistema coordenado con origen en el CoG , y considerando que β es pequeño se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \approx v_x \begin{pmatrix} \dot{\beta} + \dot{\psi} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (9), y a su vez en (5), y escribiendo el vector de estados como $x' = [\beta \ \dot{\psi} \ \dot{\varphi} \ \varphi]$, donde x' representa el vector transpuesto de x , se puede escribir el modelo completo como:

$$\dot{x} = A(v_x)x + B_\delta \delta(t) + B_u u \quad (12)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma J_{x_{eq}}}{m v_x J_x} & \frac{\rho J_{x_{eq}}}{m v_x^2 J_x} - 1 & -\frac{hc}{J_x v_x} & \frac{h(mgh-k)}{J_x v_x} \\ \frac{\rho}{J_z} & -\frac{\kappa}{J_z v_x} & 0 & 0 \\ -\frac{h\sigma}{J_x} & \frac{h\rho}{v_x J_x} & -\frac{c}{J_x} & \frac{mgh-k}{J_x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_\delta = \begin{bmatrix} \frac{c_v J_{x_{eq}}}{m J_x v} & \frac{c_v L_v}{J_z} & \frac{h c_v}{J_x} & 0 \end{bmatrix}' \quad (14)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{2J_z} & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad (15)$$

Donde u representa la fuerza de frenado diferencial y $v_x \neq 0$. Si u es positiva, entonces es la suma del valor absoluto de las fuerzas de frenado frontal y trasera derechas, y si u es negativa es la suma del valor absoluto de las fuerzas de frenado frontal y trasera izquierdas, todo multiplicado por -1 .

Aunque este modelo y sus variantes son utilizados en múltiples estudios, note que es necesaria la determinación de los valores de los parámetros que incluso pueden ser variantes en tiempo. En [12], se propone una estrategia adaptativa para la estimación de dichos parámetros.

En este documento se utiliza la aproximación:

$$\dot{v}_x = -\frac{|u|}{m} \quad (16)$$

donde se considera que la resistencia de rodamiento y resistencia aerodinámica son despreciables.

D. Cálculo del RI

En [12] se determina una expresión para el RI que toma en consideración la velocidad angular de alabeo así como el ángulo de alabeo mismo, y que puede detectar la fase transitoria de la volcadura. Su derivación es simple y difiere de la definición de la NAFTA en signo por lo cuál se adopta:

$$RI = -\frac{2}{bmg}(c\dot{\varphi} + k\varphi) \quad (17)$$

Por el momento asuma que la matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es constante, luego entonces la velocidad del vehículo es constante. El sistema completo incluyendo la salida $y = RI$ con $C = [0 \ 0 \ -\frac{2c}{bmg} \ -\frac{2k}{bmg}]$ queda denotado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\delta \delta(t) + B_u u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (18)$$

III. PRELIMINARES

Se denota la norma euclidiana de la matriz A como $\|A\|$. Se denota la solución o trayectoria del sistema (18) en un instante t con condición inicial x_0 a un tiempo inicial t_0 como $x(t_0, t, x_0)$. Un conjunto M es positivamente invariante respecto a (18) si $x_0 \in M \Rightarrow x(t_0, t, x_0) \in M, \forall t \geq 0$. Sin pérdida de generalidad se asume que $t \geq 0$. Se asume que la función $\delta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (tal vez por pedazos) y además $|\delta| \leq \delta_f$ por características propias de los vehículos automotores convencionales. Cuando sea claro del contexto se omite la dependencia del tiempo y/o las condiciones iniciales en las expresiones. Sea:

$$Ax + B_u u + B_\delta \delta \triangleq f(x, u, \delta, t) \quad (19)$$

entonces se satisface:

$$\begin{aligned} \|f(x, u, \delta, t) - f(y, u, \delta, t)\| &= \|A(x - y)\| \\ \|A(x - y)\| &\leq \|A\| \|x - y\| \\ \|A\| \|x - y\| &\leq a \|x - y\| \end{aligned} \quad (20)$$

$\forall t \in [t_0, t_1], \forall x, y$ con $a > 0$. Por el Teorema 3.2 de [11], el sistema tiene una única solución en el intervalo $[t_0, t_1], \forall t \geq t_0$ (a es la constante de Lipschitz). Por lo tanto la trayectoria del sistema (19) no puede tener un escape en tiempo finito.

IV. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y DISEÑO DEL CONTROLADOR CONMUTADO

A. Planteamiento del problema

Este documento se enfoca en el diseño de un controlador basado en la predicción de volcadura a un horizonte de predicción y su mitigación por medio de frenado diferencial. El diseño de una ley de control basada en parámetros constantes no asegura que la ley de control funcionará con la misma efectividad si los parámetros reales no coinciden idénticamente con los del diseño, entonces es importante que dicha ley de control sea robusta ante incertidumbre paramétrica. Además no es deseable que la ley de control sea aplicada de manera continua si no que se debe aplicar solo cuando sea necesario. Pero sobre todo es de vital importancia establecer condiciones bajo las cuales $|RI| \leq RI_{ref}$. Nuestro punto de partida es el resultado obtenido en [15] y [16], para proponer una estrategia predictiva de conmutación, ya que si bien se asegura estabilidad, la ley de control se aplica a todo momento incluso si no hay riesgo de volcadura. Entonces como en [15] se somete al sistema (18) a incertidumbre paramétrica y queda denotado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_\delta(\theta)\delta + B_u(\theta)u \\ y &= C(\theta)x \end{aligned} \quad (21)$$

donde la matriz $A(\theta)$ y los vectores $B_\delta(\theta), B_u(\theta), C(\theta)$ pueden ser escritos como una combinación convexa de matrices y vectores respectivamente, lo cuál es válido en este caso considerando que los parámetros del vehículo, varían solo dentro de sus respectivos rangos convexos, cerrados y acotados. Entonces es posible encontrar por medio de un software de resolución de desigualdades lineales matriciales (Linear Matrix Inequalities, LMI's) un vector renglón K tal que ley de control $u = Kx$ hace al sistema (21) L_∞ CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

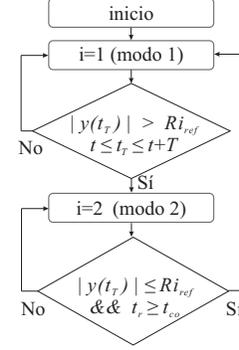


Fig. 3. Algoritmo de conmutación.

estable para toda $|\delta(t)| \leq \delta_s$, donde δ_s representa la magnitud máxima del ángulo en las ruedas para no violar la restricción $|RI| \leq RI_{ref}$ para cierto nivel de desempeño γ_1 , donde γ_1 es una medida de la capacidad del sistema a lazo cerrado para atenuar el efecto de la entrada δ en la salida RI [15]. Note que $\delta_s \leq \delta_f$ debido a la restricción $|Kx| \leq u_{max}$ donde la fuerza de frenado máxima que se puede aplicar en el vehículo $u_{max} < \infty$ está determinada por las características del camino, de las llantas y del vehículo, en este trabajo se considera que $u_{max} = mg$.

Es natural proponer un sistema conmutado de dos subsistemas, uno con $u(t) \neq 0$ que se identificará como Modo 2 y otro en el que como no existe riesgo de volcadura $u(t) = 0$ que se identificará como Modo 1. Es necesario establecer una ley de conmutación que determinará cuál modo estará activo a cada instante. Se utiliza una estrategia de conmutación que consiste en evaluar a lo largo de la trayectoria futura del sistema si hay un riesgo de volcadura en cuyo caso se conmuta al modo 2, la conmutación al modo 1 se realizará cuando no haya riesgo de volcadura en ningún instante a lo largo de la trayectoria futura del sistema. Bajo esta ley de conmutación, no se tiene que esperar a que el riesgo de volcadura esté presente para tomar una acción correctiva, sino que se tomará la acción correctiva si se detecta algún riesgo a lo largo de la predicción. El sistema conmutado por la estrategia predictiva y bajo incertidumbre paramétrica queda definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i(\theta)x + B_\delta(\theta)\delta(t), \\ y &= C(\theta)x \\ i &= \begin{cases} 1 & |y(t_T, \theta)| \leq RI_{ref} \text{ (Modo 1)} \\ 2 & |y(t_T, \theta)| > RI_{ref} \text{ (Modo 2)} \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

con $A_1(\theta) = A(\theta)$ y $A_2(\theta) = A(\theta) + B_u(\theta)K$ y $t \leq t_T \leq t + T$ con $T > 0$. En la Figura 3 se ilustra el algoritmo de la ley de conmutación. Se sabe que el comportamiento a lazo abierto es estable, i.e. $A_1(\theta)$ es Hurwitz. Por otro lado, dado que el par $(A_2(\theta), B_u(\theta))$ es completamente controlable, podemos seleccionar un vector K tal la matriz $A_2(\theta) = A(\theta) + B_u(\theta)K$ sea también Hurwitz. Dado el resultado en [16], la incertidumbre de la matriz $A(\theta)$ se encuentra en un conjunto convexo, y se puede asegurar que la matriz $A_2(\theta)$ es Hurwitz para todo punto dentro de este conjunto.

Nota 1. Para determinar el valor de $y(0, t_T, \theta)$ en el intervalo $t < t_T \leq T$ (predicción de la salida o RI), se requiere

conocer el valor de $\delta(t_T)$, por ello se considera que el comportamiento del conductor en el intervalo $(t, t+T]$ se conoce debido a que se cuenta con datos sobre su comportamiento. En particular en [14] se muestra como este conocimiento de su comportamiento se utiliza para modelar al conductor como un sistema lineal de orden n . En particular, en este trabajo y dadas las conclusiones de [14], se considera por conveniencia un comportamiento de orden 1.

En el marco de trabajo propuesto, prevalece el siguiente problema que se intenta resolver:

Problema de control.

Sea el conjunto

$$\Omega \triangleq \{x(0, t, \theta) \text{ tal que } |y(0, t, \theta)| \leq RI_{ref}\}. \quad (23)$$

Establecer condiciones bajo las cuales Ω es positivamente invariante para el sistema (22) (bajo una ley de control conmutada en la cuál ninguna acción de control es efectuada si no existen condiciones predichas de vuelco hasta un horizonte de predicción T). Es decir si $x(0, 0, \theta) \in \Omega \Rightarrow x(0, t, \theta) \in \Omega, \forall t \geq 0$.

B. Propiedades del controlador conmutado

Se asume el conocimiento completo de los estados del sistema, en [12] se puede encontrar un algoritmo para su estimación. Con el propósito de establecer la solución del problema, se presenta el siguiente:

Teorema 1: Sea el sistema conmutado (22) con condición inicial $x(0, 0, \theta) = x_0 \in \Omega$ con Ω definido en (23), y $\theta_v \subset \Theta$ el conjunto de todos los vértices de la incertidumbre $\theta \in \Theta$. Si se cumple que:

$$T \geq t_{co}, \quad |\delta(t)| \leq \delta_{critico}, \quad t_r \geq t_c$$

donde T es el horizonte de predicción, t_r es el mínimo tiempo de residencia en Modo 2, y:

$$[t_{co}, \theta_{co}] = \underset{t, \theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\{ -C(\theta)e^{A_1(\theta)t} A_1^{-1}(\theta) B_\delta(\theta) \delta_r \right\}$$

$$[t_c, \theta_c] = \underset{t, \theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\{ -C(\theta)e^{A_2(\theta)t} A_1^{-1}(\theta) B_\delta(\theta) \delta_r \right\}$$

$$\delta_{critico} = \left| \left(RI_{ref} + C(\theta)e^{A_2(\theta)t_c} x_r(\theta_c) \right) r^{-1}(t_c, \theta_c) \right|$$

Con:

$$r(t_c, \theta_c) = C(\theta_c)(e^{A_2(\theta_c)t_c} - I)A_2^{-1}(\theta_c)B_\delta(\theta_c)$$

$$\theta_r = \underset{\theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmax}} \left\{ -C(\theta)A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta) \right\}$$

$$\delta_r = -RI_{ref} \left(C(\theta_r)A_1^{-1}(\theta_r)B_\delta(\theta_r) \right)$$

entonces el conjunto Ω es positivamente invariante, es decir $x(0, t, x_0) \in \Omega, \forall t \geq 0$.

Note que i) t_{co} representa el mínimo valor del horizonte de predicción y representa el tiempo característico del sistema a lazo abierto (21) ii) $\delta_{critico}$ es un escalar que representa el máximo valor que puede tomar $|\delta|$ y iii) t_c es el mínimo intervalo de tiempo que se debe permanecer en Modo 2 (aplicar frenado diferencial) ante una situación predicha de vuelco, son condiciones para cumplir con la restricción $|RI| \leq RI_{ref}$ para todo tiempo para el sistema a lazo cerrado CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

(22), i.e. para evitar la volcadura bajo la ley de control conmutada propuesta.

Demostración: La idea de la demostración consiste en construir el peor de los escenarios para: i) cuantificar el valor del horizonte de predicción con base en la respuesta del sistema (22) a una entrada escalón δ_{co} en Modo 1, y ii) determinar el valor de la máxima entrada escalón δ_c en Modo 2 tal que la tesis del teorema se cumpla¹.

Con el fin de cuantificar el valor del horizonte de predicción, sin pérdida de generalidad, considere una condición inicial $x(0, 0, \theta) = x_r(\theta)$ cuasi riesgo de volcadura a la derecha en estado estacionario, i.e. con $\delta_r < 0$, se supone que para $t < 0$ se cumple que la trayectoria estuvo siempre en Ω . Como $A_1(\theta)$ es Hurwitz, es invertible y entonces:

$$\dot{x} = 0 = A_1(\theta)x_r + B_\delta(\theta)\delta_r \quad (24)$$

$$x_r(\theta) = -A_1^{-1}B_\delta(\theta)\delta_r \quad (25)$$

Por lo que la salida en el escenario de cuasi riesgo de volcadura, debe coincidir con RI_{ref} , i.e.:

$$C(\theta)x_r(\theta) = RI_{ref} = -C(\theta)A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta)\delta_r \quad (26)$$

$$\delta_r(\theta) = -RI_{ref} \left(C(\theta)A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta) \right)^{-1} \quad (27)$$

Para establecer el peor escenario de incertidumbre, es decir el valor de θ que hace máximo el ángulo en las ruedas de la ecuación (27), en principio es necesario evaluarlo en todo el conjunto Θ con $\theta \in \Theta$. Sin embargo dado que $A_1(\theta), B_\delta(\theta), C(\theta)$ pueden ser escritos como combinaciones convexas, es suficiente hacer esta evaluación para los valores de sus vértices $\theta_v \subset \Theta$:

$$\theta_r = \underset{\theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmax}} \left\{ -C(\theta)A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta) \right\}. \quad (28)$$

Entonces:

$$\delta_r \triangleq -RI_{ref} \left(C(\theta_r)A_1^{-1}(\theta_r)B_\delta(\theta_r) \right)^{-1} \quad (29)$$

Se desea calcular el tiempo que es necesario para predecir un cuasi riesgo de volcadura hacia el costado izquierdo con x_r como condición inicial, es decir un cuasi riesgo de volcadura a la derecha. Se sabe que (22) tiene un comportamiento subamortiguado estable en su salida, y cuyo sobreimpulso dada una entrada escalón $\delta(0^+) = \delta_{co} > \delta_r$ se presentará a un tiempo característico $t_{co} > 0$. Considere entonces la salida de (22) dada por $y(0, t, \theta)$ con condición inicial x_r de (25) y una entrada escalón $\delta(0^+) = \delta_{co} > \delta_r$. El peor escenario de riesgo de volcadura ante estas condiciones, será cuando ninguna acción de control sea aplicada, i.e. el sistema permanece en Modo 1. Bajo estas condiciones, se sabe que la solución esta dada por:

$$y(0, t, \theta) = C(\theta)e^{A_1(\theta)t}x_r(\theta) + C(\theta) \left(e^{A_1(\theta)t} - I \right) A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta)\delta_{co} \quad (30)$$

Las trayectorias de respuesta ante este escalón están acotadas dado que el sistema es estable. Observe que dadas las

¹Recuerde que delta es la entrada de dirección del conductor. Este valor esta acotado, primero por el angulo máximo de la dirección del auto y segundo; por el tiempo de respuesta del conductor. Se sabe que un ser humano puede alcanzar velocidades máximas de 1700 *grados/s* sobre el volante de la dirección [13]

suposiciones anteriores, existe entonces un valor mínimo de $y(0, t, \theta)$ en (30) que ocurre a un tiempo t_{co} ². Para establecer claramente la existencia de este valor mínimo considere lo siguiente. Las primeras derivadas de (30) con $x_r(\theta)$ de (25), con respecto del tiempo están dadas por:

$$\frac{\partial y(0, t, \theta)}{\partial t} = C(\theta)e^{A_1(\theta)t}B_\delta(\theta)(\delta_{co} - \delta_r) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 y(0, t^2, \theta)}{\partial t^2} = C(\theta)A_1(\theta)e^{A_1(\theta)t}B_\delta(\theta)(\delta_{co} - \delta_r) > 0 \quad (32)$$

Por otro lado se sabe que $e^{A_1(\theta)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A_1(\theta)t)^k$, por lo que de (31) se tiene:

$$C(\theta) \left(A_1(\theta)t + \frac{(A_1(\theta)t)^2}{2!} + \dots \right) B_\delta(\theta) = -C(\theta)B_\delta(\theta) \quad (33)$$

por otro lado de (32) se tiene:

$$C(\theta) \left(A_1(\theta)t + \frac{(A_1(\theta)t)^2}{2!} + \dots \right) B_\delta(\theta) \frac{\delta_{co} - \delta_r}{t} > 0 \quad (34)$$

Substituyendo (33) en (34):

$$-C(\theta)B_\delta(\theta)(\delta_{co} - \delta_r) > 0 \quad (35)$$

donde:

$$-C(\theta)B_\delta(\theta) = \frac{2c(\theta)h(\theta)c_v(\theta)}{mgTJ_x(\theta)} > 0 \quad (36)$$

Entonces es suficiente para la existencia de un mínimo de $y(0, t, \theta)$ que:

$$\delta_{co} > \delta_r \quad (37)$$

Observe de (31) que el tiempo característico t_{co} no depende de la magnitud de δ_{co} siempre que se cumpla (37). (Ver Figura 4.) Sin pérdida de generalidad, en (30) se puede tomar $\delta_{co} = 0$, y así el mínimo de $y(0, t, \theta)$ existe en algún vértice de $A_1(\theta), B_\delta(\theta), C(\theta)$ y se calcula como:

$$[t_{co}, \theta_{co}] = \underset{t, \theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\{ -C(\theta)e^{A_1(\theta)t}A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta)\delta_r \right\}. \quad (38)$$

Entonces t_{co} representa el menor tiempo en que sucede el valor mínimo de sobreimpulso, y si se quiere predecir la volcadura eficazmente el horizonte de predicción debe ser al menos este tiempo característico, es decir $T \geq t_{co}$. Observe que esta restricción constituye una de las condiciones del teorema.

Ahora se quiere establecer un valor $\delta_{critico}$ para $\delta(t)$, tal que si $|\delta(t)| \leq \delta_{critico}$ entonces el sobreimpulso mínimo de la salida que ocurre a un tiempo t_c , cumple $y(0, t_c, \theta) = RI_{ref}$ en Modo 2, y como consecuencia $y(0, t, \theta) \leq RI_{ref} \Rightarrow x(0, t, \theta) \in \Omega$. Note que esto constituye la segunda condición del teorema.

Con el fin de establecer el valor $\delta_{critico}$ considere la condición inicial $x_r(\theta)$ de (25), i.e. un cuasi riesgo de volcadura hacia la derecha en estado estacionario, con $T \geq t_{co}$ y que se detecta un riesgo a futuro $y(0, t_T, \theta) < -RI_{ref}$ para t_T que cumple $t \leq t_T \leq T$ bajo una maniobra de viraje hacia la izquierda. Observe que virar hacia la

derecha constituye un riesgo de volcadura y por lo tanto, no hay margen de seguridad hacia ese costado. Con los argumentos anteriores en mente, considere una condición final cuasi riesgo de volcadura a la izquierda $x_c(0, t_c, \theta)$, es decir $C(\theta)x_c(0, t_c, \theta) = -RI_{ref}$, entonces se busca el valor del escalón $\delta_c(0^+)$ tal que se cumpla la condición final cuasi riesgo de volcadura a la izquierda con evolución en Modo 2. La salida del sistema (22) en este escenario:

$$\begin{aligned} y(0, t, \theta) &= C(\theta)x_c(0, t, \theta) = -RI_{ref} \\ &= C(\theta) \left(e^{A_2(\theta)t}x_r(\theta) + (e^{A_2(\theta)t} - I)A_2^{-1}(\theta)B_\delta(\theta)\delta_{co} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

El tiempo característico en Modo 2 de sobreimpulso mínimo de $y(0, t, \theta)$ calculado como en (38):

$$[t_c, \theta_c] = \underset{t, \theta \in \theta_v \subset \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\{ C(\theta)e^{A_2(\theta)t}A_1^{-1}(\theta)B_\delta(\theta)\delta_r \right\}. \quad (40)$$

Substituyendo t_c, θ_c en (39) se obtiene:

$$\delta_c = \left(-RI_{ref} - C(\theta)e^{A_2(\theta)t_c}x_r(\theta_c) \right) r^{-1}(t_c, \theta_c)$$

con:

$$r(t_c, \theta_c) = C(\theta_c)(e^{A_2(\theta_c)t_c} - I)A_2^{-1}(\theta_c)B_\delta(\theta_c)$$

Note que si se parte de una condición inicial de cuasi riesgo de volcadura a la izquierda y se busca una condición final cuasi riesgo de volcadura a la derecha, obtenemos $-\delta_c$, entonces se puede escribir:

$$\delta_{critico} = \left| \left(RI_{ref} + C(\theta)e^{A_2(\theta)t_c}x_r(\theta_c) \right) r^{-1}(t_c, \theta_c) \right|$$

Observe que se debe mantener el Modo 2 al menos un tiempo $t = t_c$ para que este resultado sea válido, entonces se denota como t_r al mínimo tiempo de residencia en Modo 2 y se debe cumplir que $t_r \geq t_c$ que constituye la última condición del teorema.

Por construcción se cumplen todas las condiciones del teorema y queda finalizada la demostración. ■

El valor t_{co} según especificaciones vehiculares es aproximadamente medio segundo para SUV's. Con una predicción estadística lineal es posible calcular la entrada en la dirección para tiempos moderadamente mayores de manera precisa. En caso que no fuera suficiente la predicción lineal, pueden utilizarse aproximaciones de ordenes superiores, esquemas de redes neuronales u otros.

Nota 2. El esquema propuesto es válido para variaciones de velocidad y de otros parámetros inciertos considerados en la obtención del vector de ganancia K , i.e. la descripción de la solución está dada para el simplejo de matrices bajo incertidumbre.

V. SIMULACIONES

Con el fin de ilustrar el comportamiento del controlador predictivo conmutado robusto, se realizaron las siguientes simulaciones, para lo cual se utilizaron los parámetros de la Tabla 2 y una velocidad inicial de 40m/s, una relación lineal entre el ángulo del volante y las ruedas de 18 : 1 y la ecuación (16) para incluir el comportamiento de desaceleración del vehículo. La predicción de cierta maniobra tipo slalom sobre el volante, puede ser verificada en la Figura 5 así como la predicción resultante del Índice de volcadura a lazo abierto

²Note el valor mínimo de $y(0, t, \theta)$ corresponde al sobreimpulso de la trayectoria del sistema

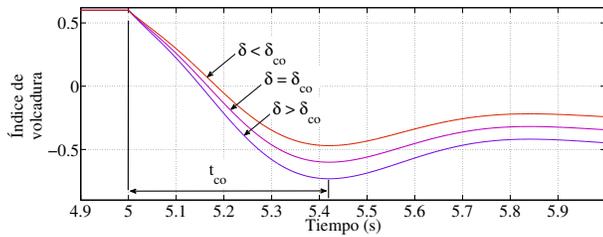


Fig. 4. RI bajo diferentes entradas escalón.

Tabla II
PARÁMETROS

c	$4000 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
h	0.375 m
J_z	$1280 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_x	$362.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
k	$36075 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$
L_v	1.102 m
L_h	1.25 m
m	1224 kg
b	1.51 m

en la Figura 6. Aunque al aumentar demasiado el horizonte las predicciones se degradan respecto al ideal, la predicción es bastante buena para el horizonte requerido por el Teorema. Para los parámetros de la Tabla 2 se obtiene un $t_{co} = 0.4204\text{s}$, $t_c = 0.3711\text{s}$ y $\delta_c = 0.06787$. Para todas las tendencias mostradas se fija un Horizonte de Predicción $T = 0.5\text{s}$ y un tiempo de residencia $t_r = 2t_{co} = 0.84\text{s}$ y se considera que $u_{max} = mg$. El vector de ganancia del controlador conmutado en Modo 2, K se asigna según [15], i.e. $K = mg[-7.1287 \ 0.9842 \ 0.3271 \ -0.0944]$ con el propósito de presentar tendencias comparativas entre tal control robusto y el control predictivo conmutado robusto del presente trabajo. En la figura 7 se puede ver la tendencia resultante para el Índice de volcadura, introduciendo una maniobra escalonada en la dirección del vehículo con valores

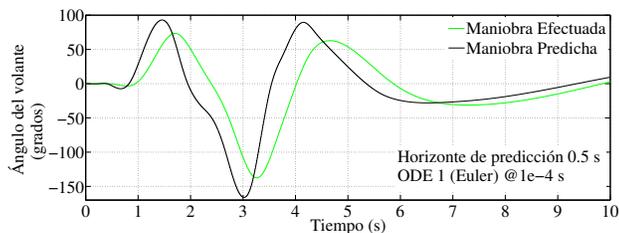


Fig. 5. Predicción de la maniobra al volante.

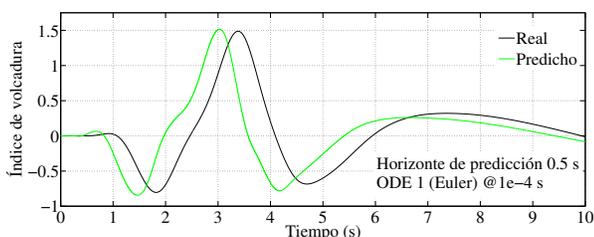


Fig. 6. Predicción del Índice de volcadura.

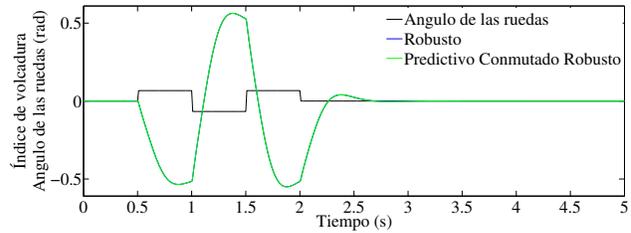


Fig. 7. Comparativa del Índice de volcadura bajo maniobra agresiva.

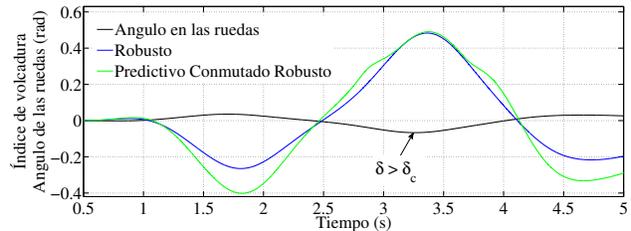


Fig. 8. Comparativa Índice de volcadura maniobra slalom.

máximos $\pm\delta_c$, se muestra la maniobra introducida, el RI resultante del controlador robusto no conmutado de [15] y el RI del esquema propuesto en este documento; dada la maniobra tan agresiva la ley de conmutación siempre calcula como Modo 2 activo, la acción de frenado es muy semejante a la del controlador no conmutado y por lo tanto el RI es muy semejante.

En las figuras 8 y 9 se muestran resultados de introducir una maniobra tipo slalom donde $\delta(t)$ alcanza un valor $-\delta_c$ en 3.26 s, en la Figura 8 se muestra la maniobra introducida, el RI resultante de frenar a todo tiempo como en [15] y el RI del controlador predictivo conmutado robusto, en ningún caso el RI supera la referencia RI_{ref} como se esperaba, sin embargo en la Figura 9 se muestra la salida de los controladores robustos predictivo conmutado y no conmutado, y se puede notar claramente que la acción de frenado se aplica solo cuando es necesario en el controlador predictivo conmutado robusto mientras en el caso del controlador robusto no conmutado se aplica a todo tiempo.

En la Figura 10, se presenta la tendencia de la fuerza de frenado en conducción normal del vehículo, i.e. sin riesgo de volcadura, donde para el caso del controlador predictivo conmutado robusto en ningún momento se aplica la ley de control es decir $u = 0$.

Finalmente en la Figura 11 se presenta la comparativa del ángulo de alabeo a lazo abierto, contra el ángulo de alabeo obtenido con el esquema predictivo conmutado robusto y contra el ángulo de alabeo obtenido con el esquema control robusto no conmutado, con la peculiaridad de que en este caso se utiliza un modelo matemático no lineal de una Jeep Cherokee 2001 generado por CarSim, y cuyos parámetros difieren de los de la Tabla 2. En este caso se introduce una maniobra tan agresiva que a lazo abierto el vehículo se vuelca, el ángulo de alabeo en lazo cerrado se mantiene por debajo del ángulo característico de levantamiento de las ruedas a lazo cerrado con ambos controladores robustos, sin embargo la ventaja del controlador conmutado predictivo robusto es que aplicará frenado diferencial solo cuando sea necesario como es el caso de esta última simulación.

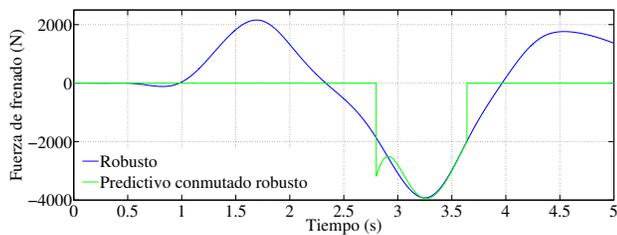


Fig. 9. Fuerza de frenado Robusto vs Predictivo Conmutado Robusto.

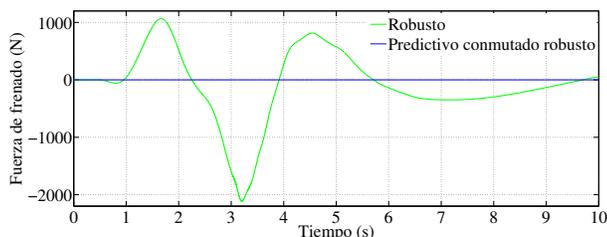


Fig. 10. Maniobra sin riesgo de volcadura.

VI. CONCLUSIONES

En el presente documento, se presentan resultados acerca de la estabilidad de un sistema conmutado bajo un esquema predictivo y con una ley de control robusta ante incertidumbre paramétrica. Se establece el valor mínimo del horizonte de predicción requerido para lograr los resultados esperados, así como también se recomienda una predicción basada en un modelo del chofer de bajo orden cuyo computo en tiempo real no requiere grandes recursos computacionales para horizontes de predicción del orden del tiempo característico del sistema a lazo abierto. El presente estudio, desde luego sigue siendo válido para algún modelo de chofer más sofisticado, que de lograr una predicción más precisa, conseguirá un mejor desempeño del controlador en el sentido de ser menos conservador, i.e. el frenado diferencial se activará ante una predicción más precisa y/o con mayor antelación, mejorando el desempeño del esquema global del controlador. Si la predicción no fuera suficientemente precisa (e.g. usando un modelo de chofer tipo muestreo y retención) y/o a un horizonte de predicción menor que el indicado en el Teorema, el riesgo de volcadura no es mitigado bajo el esquema de esta propuesta, i.e. la predicción del comportamiento del chofer debe ser capaz de detectar un riesgo de vuelco con la anticipación indicada por el Teorema y cumplir con todas sus condiciones para mitigar el riesgo de volcadura eficazmente. A diferencia de otros esquemas de control anti vuelco, en la propuesta de este trabajo no se aplica frenado diferencial

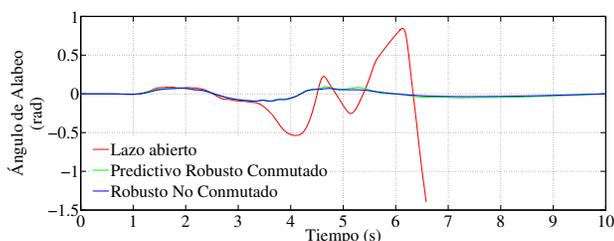


Fig. 11. Simulación con modelo de Cherokee de CarSim.

hasta que una situación de riesgo lo amerite obteniendo muy buenos resultados respecto a la mitigación de riesgo de vuelco, a coste de realizar la estimación futura del comportamiento del chofer y la predicción de la dinámica al horizonte de predicción. Además se logran establecer condiciones sobre el ángulo en las ruedas para cumplir con la norma referente al riesgo de volcadura, y aun más resulta relativamente sencillo reproducir este esquema para implementar una estrategia que en tiempo real calcule este umbral de ángulo en las ruedas permitido y por medio de un mecanismo o alarma de cuenta al conductor del riesgo, y así se obtiene una solución completa al problema de volcadura. Como ejemplo, considere que se puede actuar disminuyendo el nivel de asistencia en la dirección hidráulica, eléctricamente asistida o completamente eléctrica proporcionada al chofer, para retroalimentarle la situación de riesgo a la que está expuesto. Esta implementación es relativamente sencilla.

REFERENCIAS

- [1] 2012, "NHTSA 5-Star Safety Ratings". Disponible en: www.safercar.gov y en <http://www.safercar.gov>
- [2] Juyong Kang, Jinho Yoo, and Kyongsu Yi, SEPTEMBER 2011, IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY, VOL. 60, NO. 7, "Driving Control Algorithm for Maneuverability, Lateral Stability, and Rollover Prevention of 4WD Electric Vehicles With Independently Driven Front and Rear Wheels".
- [3] Seongjin Yim, NOVEMBER 2011, IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY, VOL. 60, NO. 9, "Design of a Preview Controller for Vehicle Rollover Prevention".
- [4] Steven C. Peters, James E. Bobrow, and Karl Iagnemma, 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage Convention District, Alaska, USA, "Stabilizing a Vehicle near Rollover: An Analogy to Cart-Pole Stabilization".
- [5] North American Free Trade Agreement, Land Transportation Standards Subcommittee, Working Draft for Consultation, November 1999, "Highway Safety Performance Criteria In Support of Vehicle Weight and Dimension Regulations: Candidate Criteria & Recommended Thresholds".
- [6] Uwe Kiencke, Lars Nielsen, 2005 "Automotive Control Systems For Engine, Driveline, and Vehicle" Second Edition, Springer.
- [7] S.M. Savaresi, C. Poussot-Vassal, "Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles", Elsevier, 2010.
- [8] Bo-Chiuan Chen, Huei Peng, 1999, Proceedings of the 1999 ASME International Congress and Exposition, Knoxville, TN, "Rollover warning of articulated vehicles based on a time to rollover metric."
- [9] Rajesh Rajamani, Damrongrit Piyabongkarn, 2011, IEEE TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS, VOL. 12, NO. 4, "Parameter and State Estimation in Vehicle Roll Dynamics".
- [10] M. Hiemer, 2004, Proceedings of the first IFAC symposium on advances in automotive control AAC04 "Cornering stiffness adaptation for improved side slip angle observation".
- [11] Hassan Khalil, 2002, "Nonlinear control", 3rd. edition, Prentice Hall.
- [12] Selim Solmaz, 2007, Hamilton Institute, A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy "Topics in Automotive Rollover Prevention: Robust and Adaptive Switching Strategies for Estimation and Control".
- [13] Joerg J. Breuer, Daimler-Benz AG, 1998, Germany, "ANALYSIS OF DRIVER-VEHICLE-INTERACTIONS IN AN EVASIVE MANOEUVRE - RESULTS OF MOOSE TEST STUDIES"
- [14] Martin R. Licea, I. Cervantes, 2012, 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, "On the predictive rollover detection in wheeled vehicles"
- [15] Solmaz S., Corless M., Shorten R., 2006, 45th IEEE Conference on Decision and Control, Automation and Systems Engineering, "A methodology for the design of robust rollover prevention controllers for automotive vehicles: Part I-Differential braking"
- [16] T. Pancake, M. Corless, M. Brockman, 2000, American Control Conference, Issue 6, "Analysis and control of polytopic uncertain/nonlinear systems in the presence of bounded disturbance inputs"
- [17] Daniel Liberzon, 1973, "Switching in Systems and Control", Birkhliuser Boston.